ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, №№ 5—6, 1978 Математика

В. М. МАРТИРОСЯН

ЗАМЫКАНИЕ И БАЗИСНОСТЬ НЕКОТОРЫХ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ И РЕШЕНИЕ КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ В УГЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Введение

1. В работе М. М. Джрбашяна [1] был предложен метод построения системы функций $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональной на окружности $|z|=1$ с системой рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, где

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\,z^{s_k-1}}{(1-\overline{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad (k=1,\ 2,\cdots), \tag{1}$$

$\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(|\alpha_k|<1)$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию Бляшке, а $s_k\geqslant 1$ — кратность появления числа α_k на отрезке $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\}$.

Им же было показано [2], что этот метод эффективен также для построения системы функций $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональной на вещественной оси с системой рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, где

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!}{(z-\overline{\mu}_k)^{s_k}}\quad (k=1,\ 2,\cdots), \tag{2}$$

$\{\mu_k\}_1^\infty$ $(\operatorname{Im}\mu_k>0)$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию Бляшке для полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$, а $s_k\geqslant 1$ — кратность появления числа μ_k на отрезке $\{\mu_1,\cdots,\mu_k\}$.

Поскольку этот метод биортогонализации лежит в основе данной работы, считаем уместным привести здесь небольшой обзор его истоков и развития.

Впервые этот метод был указан в одной давней работе М. М. Джрбашяна и А. Б. Нерсесяна [3], посвященной построению биортогональных на конечном отрезке систем целых функций — линейных комбинаций от функций типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}\ (\rho>0,\ \mu>0).$$

В связи с этим исследовались также вопросы разложений функций по указанным системам, порожденным, вообще говоря, *кратными нулями* определенных целых функций такого же рода [4].

В дальнейшем тот же метод построения биортогональных систем, порождаемых аналитическими функциями *с кратными нулями*, нашел существенно новые применения в ряде различных по своей природе вопросов анализа: в теории краевых задач для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом [5], [6] и для уравнений дробного порядка типа Штурма-Лиувилля [7], в вопросах разложений функций по неполным обобщенным системам Мюнца-Сасса [8] $\{e^{-\lambda_j x} x^{\lambda_j - 1}\}_1^\infty$ ($\mathrm{Re}\,\lambda_j > 0$) и т. д.

Далее, этот метод нашел новые приложения и интересные обобщения в серии работ Верблюнского [9]—[11], относящихся, в частности, к вопросам негармонических рядов Фурье, а также в работах А. Ф. Леонтьева [12], [13].

Отметим также, что в работах М. М. Джрбашяна [14], [15] этот же метод впервые был применен к вопросам изучения асимптотических рядов Дирихле-Тейлора, обладающих свойством примыкания лишь на некотоной полуоси $[a, +\infty)$ или в бесконечных областях типа криволинейных полос.

Остановимся вкратце на других важных, непосредственно связанных с данной работой, аспектах применения этого метода.

Как уже отмечалось выше, в работах [1] и [2] были построены системы, биортогональные с системами вида (1) или (2).

Биортогональные системы М. М. Джрбашяна $\{r_k(z); \Omega_k(z)\}_1^\infty$ и их различные модификации позволили установить критерий базисности этих систем и получить полное решение кратной интерполяционной задачи в различных классах аналитических функций.

В его работе [16] при помощи системы $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, являющейся модификацией системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ и также биортогональной на окружности $|z| = 1$ с системой (1), было дано полное и эффективное решение кратной интерполяционной задачи в классе H_2 Харди.

В его же работах [17], [18] было дано полное и эффективное решение кратной интерполяционной задачи в классах H_+^p $(1 < p < +\infty)$ Хилле-Тамаркина функций, аналитических в полуплоскости $\mathrm{Im}\, z > 0$. Там же было получено полное внутреннее описание замыканий в метрике H_+^p неполных систем вида (2) и биортогональных с ними систем. Был установлен также критерий базисности этих систем в подпространствах пространств H_+^p.

Системы М. М. Джрбашяна $\{r_k(z); \Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональные на окружности $|z| = 1$, и ряд их важных свойств, установленных в работах [1] и [16], послужили в работе Г. М. Айрапетяна [19] основой для установления критерия базисности систем вида (1) и биортогональных с ними систем в подпространствах пространств $H_p (1 < p < +\infty)$ в круге $|z| < 1$, а также для решения кратной интерполяционной задачи в классах H_p в круге $|z| < 1$. Следует отметить, что результаты относительно круга, содержащиеся в указанной работе [19], аналогичны по своей природе лишь части результатов из работ [17] и [18] относительно полуплоскости. Одновременно отметим, что буквально все результаты, относящиеся, соответственно, к полуплоскости и к кругу, принципиально не могут быть сведены друг к другу путем конформного отображения.

С другой стороны, в заметке автора [20] были построены системы функций $\{\Omega_k(z)\}_1^{\infty}$, биортогональные на границе угловой области $\left\{z: |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}\right\} \left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty\right)$ с определенными системами простейших рациональных дробей. Был установлен критерий базисности этих систем в определенных гильбертовых пространствах функций, аналитических в угловых областях. Использование этих биортогональных систем позволило также получить полное и эффективное решение кратной интерполяционной задачи в классах

$$H_2[\alpha;\omega]\left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty, \ -1 < \omega < 1\right)$$

функций, аналитических в угловой области $\left\{z: |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}\right\}$.

2. Настоящая работа посвящена обобщению отмеченных выше результатов из работ [18] и [20].

Следует, однако, отметить, что эти обобщения не получаются путем простого переноса методов получения результатов из работ [18] и [20].

С одной стороны, дело осложняется в силу специфики рассматриваемых в данной работе более общих объектов. С другой стороны, рассмотрение таких общих объектов позволило наряду с обобщением некоторых, известных ранее, результатов из работ [18] и [20] получить также более простые их доказательства. Подробнее об этом будет отмечаться в основном тексте.

Приведем теперь краткое содержание данной работы.

В § 1 устанавливается ряд свойств классов $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ $(1 < p < +\infty, \ -1 < \omega < p-1)$. Эти классы являются обобщениями классов $H_2[\alpha;\omega]$, введенных впервые М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [21], и классов H^p в полуплоскости.

Для значений $\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$, $-\infty < \vartheta < +\infty$ класс $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ $(1 < p < +\infty, \ -1 < \omega < p-1)$ определяется как множество функций $F(z)$, аналитических в угловой области

$$\Delta(\alpha;\vartheta) = \left\{z: \ |\operatorname{Arg} z - \vartheta| < \frac{\pi}{2\alpha}, \ 0 < |z| < +\infty\right\}$$

и удовлетворяющих условию

$$\sup_{|\varphi-\vartheta| < \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{\int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^p r^{\omega}\, dr\right\} < +\infty.$$

В теореме 1 устанавливается, что любая функция

$$F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$$

почти всюду на границе $\partial\Delta(\alpha; \vartheta)$ угловой области $\Delta(\alpha; \vartheta)$ имеет угловые граничные значения $F(\zeta)$. При этом граничная функция $F(\zeta)$ принадлежит классу $L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$, т. е.

$$\|F\|_{p, \omega} = \left\{ \int\limits_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} |F(\zeta)|^p |\zeta|^\omega |d\zeta| \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty \tag{3}$$

и $F(z)$ является интегралом Коши своей граничной функции.

В том же параграфе устанавливается одно обобщение теоремы М. Рисса о проектировании из $L_p (1 < p < +\infty)$ в H^p. Именно, в теореме 3 доказывается, что интеграл типа Коши функции из

$$L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta)) \ (1 < p < +\infty, \ -1 < \omega < p-1)$$

принадлежит классу $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$.

Здесь доказывается также, что $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha, \vartheta)] (1 < p < \infty, \ -1 < < \omega < p-1$ *с нормой* (3) *является банаховым пространством.*

В § 2 с последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Delta(\alpha; \vartheta)$ ассоциируется система простейших рациональных дробей $\{r_k(z)\}_1^\infty$, где

$$r_k(z) = \frac{(s_k - 1)!}{(z - \lambda_k)^{s_k}} \quad (k = 1, 2 \cdots),$$

а $s_k \geqslant 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_k\}$.

В теореме 6 доказывается, что если $1 < p < +\infty, \ -1 < \omega < p-1$ то для полноты системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в пространстве

$$H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \vartheta)] = H_p^{(\omega)}[\Delta(\rho; \vartheta + \pi)] \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha} = 2\right)$$

необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k|^{2\rho})^{-1} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^{\rho}. \tag{4}$$

В случае сходимости этого ряда, в теореме 7 дается полное внутреннее описание замыкания системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$. Оказывается, что это замыкание совпадает с подпространством тех функций из $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \vartheta)]$, которые в определенном смысле допускают мероморфное продолжение в угловую область $\Delta(\alpha; \vartheta)$.

В том же параграфе при условии сходимости ряда (4) строится система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональная с системой $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в следующем смысле:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\alpha; \vartheta)} r_k(\zeta)\, \Omega_n(\zeta)\, d\zeta = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (k, n = 1, 2, \cdots),$$

где направление на $\partial\Delta(\alpha;\vartheta)$ совпадает с направлением положительного обхода области $\Delta(\alpha;\vartheta)$. Доказывается также, что если ряд (4) расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не минимальна в пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)]$ и, следовательно, не имеет биртогонального дополнения.

Здесь дается также полное внутреннее описание замыкания системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty \subset H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ $(1 < p < +\infty,\ -1 < \omega < p-1)$.

В § 3 устанавливаются критерии базисности систем

$$\{r_k(z)\}_1^\infty \subset H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)] \text{ и } \{\Omega_k(z)\}_1^\infty \subset H_p^{(\omega)}(\Delta(\alpha;\vartheta))$$

$(1 < p < +\infty,\ -1 < \omega < p-1)$, в порожденных ими замкнутых подпространствах. Оказывается, что для базисности этих систем в порожденных ими подпространствах необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия:

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_k}}^{\infty}\left|\frac{(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha-(e^{-i\vartheta}\lambda_j)^\alpha}{(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha+\overline{(e^{-i\vartheta}\lambda_j)^\alpha}}\right|\right\}>0,\quad \sup_{k\geq 1}|s_k|<+\infty \tag{5}$$

(теоремы 11 и 12).

В том же параграфе дается полное решение кратной интерполяционной задачи в классах $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ $(1 < p < +\infty,\ 1 < \omega < p-1)$.

В теореме 13 устанавливается, что если выполняются условия (5), то пространство последовательностей

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty:\ f\in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]\} \tag{6}$$

совпадает с пространством последовательностей $\gamma\equiv\{\gamma_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\|\gamma\|_{p,\omega}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k|^{\omega+(1-\alpha)(2-p)}\left[|\lambda_k|^{1-\alpha}\operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha\right]^{p(s_k-1)+1}|\gamma_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

При этом доказывается, что для любой последовательности $\gamma\equiv\{\gamma_k\}_1^\infty$, удовлетворяющей условию (7), ряд

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\Omega_k(z)$$

сходится в $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ и определяет функцию $f(z)$, удовлетворяющую следующим интерполяционным данным:

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k)=\gamma_k\ (k=1,2,\cdots).$$

Наконец, в той же теореме 13 доказывается, что если хотя бы одно из условий (5) нарушается, то пространство последовательностей (6) не совпадает ни с каким весовым l_s-пространством $(1\leqslant s<+\infty)$.

Пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и внимание к работе.

§ 1. Пространства $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$

1.1(а) Пусть $\frac{1}{2}<\alpha<+\infty$, $-\infty<\vartheta<+\infty$. Обозначим через

$$\Delta(\alpha;\vartheta)=\left\{z:|\operatorname{Arg} z-\vartheta|<\frac{\pi}{2\alpha},\ 0<|z|<+\infty\right\}, \tag{1.1}$$

$$\Delta^*(\alpha;\vartheta)=\left\{z:\frac{\pi}{2\alpha}<|\operatorname{Arg} z-\vartheta|\leqslant\pi,\ 0<|z|<+\infty\right\}$$

взаимно-дополнительные угловые области на конечной комплексной плоскости **C**. Общую границу этих угловых областей обозначим через $\partial\Delta(\alpha;\vartheta)$ (через $\partial\Delta^*(\alpha;\vartheta)$), полагая, что направление на $\partial\Delta(\alpha;\vartheta)$ (на $\partial\Delta^*(\alpha;\vartheta)$) совпадает с направлением положительного обхода области $\Delta(\alpha;\vartheta)$ (области $\Delta^*(\alpha;\vartheta)$).

Обозначим через $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$ класс функций $F(z)$, аналитических в угловой области $\Delta(\alpha,\vartheta)$ и удовлетворяющих условию

$$\|F\|^*_{p,\omega}=\sup_{|\varphi-\vartheta|<\frac{\pi}{2\alpha}}\left\{\int_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^p r^{\omega}\,dr\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty. \tag{1.2}$$

Отметим, что классы $H_2[\alpha;\vartheta]\equiv H_2^{(0)}[\Delta(\alpha;0)]$ впервые были введены в совместной работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [21], которые установили также их параметрическое представление, являющееся существенным обобщением теоремы Винера-Пэли (см. также гл. VII монографии М. М. Джрбашяна [22]).

Отметим также, что если $\rho^{-1}+\alpha^{-1}=2$, то угловые области $\Delta^*(\alpha;\vartheta)$ и $\Delta(\rho;\vartheta+\pi)$ совпадают. Поэтому класс $H_p^{(\omega)}[\Delta(\rho;\vartheta+\pi)]$ будем обозначать также через $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)]$.

Наконец, обозначим через $L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha;\vartheta))$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$ пространство измеримых на $\partial\Delta(\alpha;\vartheta)$ функций $F(\zeta)$ с нормой

$$\|F\|_{p,\omega}=\left\{\int_{\partial\Delta(\alpha;\vartheta)}|F(\zeta)|^p|\zeta|^{\omega}|d\zeta|\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty. \tag{1.3}$$

(б) Пусть H_p $(0<p<+\infty)$ — известный (см., напр., [23]) класс функций $f(z)$, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H_p}=\sup_{0<x<+\infty}\left\{\int_0^{+\infty}|f(x+iy)|^p\,dy\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty,$$

а H_p^* — это класс функций $f(z)$, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Re} z>0$ и таких, что

$$\|f\|_{H_p^*} = \sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p \, dr \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Следующая теорема при $p=2$ была установлена в совместной работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [21], а в общем случае — в работе А. М. Седлецкого [24]*.

Теорема А. *Для любого* $p \in (0, +\infty)$ *справедливы утверждения:*

1°. $H_p = H_p^*$;

2°. $2^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{H_p} \leqslant \|f\|_{H_p}^* \leqslant \|f\|_{H_p}$.

Так как $H_p^{(0)}[\Delta(1; 0)] = H_p^*$, то из этой теоремы видно, что классы $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ — это естественные обобщения классов H_p. Поэтому они обладают многими свойствами, которыми обладают классы H_p. Некоторые из этих свойств приведены в следующей теореме.

Теорема 1. *Для любой функции* $F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ $(1 < p < +\infty, \ -1 < \omega < p-1)$ *справедливы утверждения:*

1°. *Почти всюду на* $\partial\Delta(\alpha; \vartheta)$ *функция* $F(z)$ *имеет угловые граничные значения* $F(\zeta) \in L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$, *причем*

$$\lim_{\varphi \to \pm\frac{\pi}{2\alpha}+\vartheta} \int_0^{+\infty} \left|F(re^{i\varphi}) - F\left(re^{i\left(\pm\frac{\pi}{2\alpha}+\vartheta\right)}\right)\right|^p r^{\omega} \, dr = 0;$$

2° *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha;\vartheta)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \begin{cases} F(z), & z \in \Delta(\alpha; \vartheta), \\ 0, & z \in \Delta^*(\alpha; \vartheta); \end{cases}$$

3° *Для любого* $\varphi_0 \left(0 < \varphi_0 < \dfrac{\pi}{2\alpha}\right)$

$$\max_{|\varphi-\vartheta| \leqslant \varphi_0} |F(re^{i\varphi})| = o\left(r^{-\frac{1+\omega}{p}}\right), \text{ при } r \to +0, \ r \to +\infty.$$

В случае $p=2$, $\vartheta = 0$, это утверждение известно (см. [22], гл. VII, теорему 7.5). В общем случае теорема 1 доказывается аналогичным образом.

(в) Со стандартными операциями сложения функций и умножения функций на скляр $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ является комплексным линейным пространством. При этом равенством (1.2) в этом пространстве задается норма. В силу теоремы 1 в этом пространстве можно задать норму также равенством (1.3), где $F(\zeta)$ — угловые граничные значе-

* Включение $H_p \subset H_p^*$ и неравенство $\|f\|_{H_p^*} \leqslant \|f\|_{H_p}$ вытекают также из работы С. А. Акопяна [25].

ния функции $F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$. Докажем следующую теорему, из которой, в частности, следует, что нормы (1.2) и (1.3) порождают в $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ одну и ту же топологию.

Теорема 2. *Если* $1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p - 1$, *то справедливы утверждения:*

1°. $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ *с нормой* (1.3) *является банаховым пространством;*

2°. *Для любой функции* $F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ *имеем:*

$$2^{-\frac{1}{p}} \|F\|_{p,\omega} \leqslant \|F\|_{p,\omega}^{*} \leqslant \|F\|_{p,\omega}.$$

Доказательство. Пусть $F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$. Положив*

$$\Phi(w) = \alpha^{-\frac{1}{p}} F\left(e^{i\vartheta} w^{\frac{1}{\alpha}}\right) w^{\frac{1+\omega-\alpha}{p\alpha}}, \ \mathrm{Re}\, w > 0,$$

будем иметь: $\Phi(w) \in H_p^{(0)}[\Delta(1; 0)]$, а также

$$\|\Phi\|_{p,0}^{*} = \|F\|_{p,\omega}^{*}, \ \|\Phi\|_{p,0} = \|F\|_{p,\omega}. \tag{1.4}$$

Поскольку $H_p^{(0)}[\Delta(1; 0)] = H_p^{*}$, то по теореме A $H_p^{(0)}[\Delta(1;0)] = H_p$. Следовательно, в силу второго из равенств (1.4), а также равенства $\|\Phi\|_{p,0} = \|\Phi\|_{H_p}$, пространство $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ с нормой $\|\cdot\|_{p,\omega}$ изометрически изоморфно пространству H_p с нормой $\|\cdot\|_{H_p}$. Отсюда на основании известного факта о полноте пространства H_p получаем утверждение 1° теоремы.

С другой стороны, так как $\|\Phi\|_{p,0}^{*} = \|\Phi\|_{H_p^{*}}$ и $\|\Phi\|_{p,0} = \|\Phi\|_{H_p}$, то из (1.4) получаем

$$\|F\|_{p,\omega}^{*} = \|\Phi\|_{H_p^{*}}, \ \|F\|_{p,\omega} = \|\Phi\|_{H_p}.$$

Отсюда и из теоремы A (2°) получаем утверждение 2° теоремы. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ можно рассматривать как замкнутое подпространство банахова пространства $L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$.

1.2. Следующее утверждение, по существу, было установлено в монографии [26] (стр. 176).

Теорема B. *Если* $f(iy) \in L_p(-\infty, +\infty)$ $(1 < p < +\infty)$ *и*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(iy)}{iy - z}\, dy, \ \mathrm{Re}\, z > 0,$$

---

* Здесь и всюду в дальнейшем для значений $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ и $\beta \in (-\infty, +\infty)$ будем полагать $z^{\beta} = |z|^{\beta} e^{i\beta \arg z}$ $(-\pi < \arg z < \pi)$.

то $F(z)\in H_p$ *и* $\|F\|_{H_p}\leqslant A_p\|f\|_p$, *причем* $A_p\in(0,+\infty)$ *не зависит от* f.

Мы хотим обобщить эту теорему.

Обозначим через $L_p^{(\omega)}(L(\varphi))$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1,\ -\infty<\varphi<+\infty)$ класс функций $f(\zeta)$, измеримых на луче

$$L(\varphi)=\{\zeta=re^{i\varphi}:\ 0\leqslant r<\infty\}$$

и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{L_p^{(\omega)}(L(\varphi))}=\left\{\int\limits_0^{+\infty}|f(re^{i\varphi})|^p r^{\omega}\,dr\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

Лемма 1. *Пусть* $1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1$. *Если*

$$f(\zeta)\in L_p^{(\omega)}(L(\varphi))\quad(-\infty<\varphi<+\infty),$$

*то интеграл типа Коши**

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\varphi)}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\ z\in\mathbf{C}\setminus L(\varphi),$$

обладает следующими свойствами:

1°. $F(z)$ *аналитична в области* $\mathbf{C}\setminus L(\varphi)$ *и справедливо неравенство*

$$\sup_{\varphi<\theta<\varphi+2\pi}\left\{\int\limits_0^{+\infty}|F(re^{i\theta})|^p r^{\omega}\,dr\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant A_{p,\omega}\|f\|_{L_p^{(\omega)}(L(\varphi))},\tag{1.5}$$

где $A_{p,\omega}\in(0,+\infty)$ *не зависит от* $f(\zeta)$;

2°. *Функция* $F(z)$ *почти всюду на* $L(\varphi)$ *имеет угловые граничные значения* $F^{(-)}(\zeta)$ *и* $F^{(+)}(\zeta)\in L_p^{(\omega)}(L(\varphi))$, *соответственно слева и справа от луча* $L(\varphi)$, *причем*

$$f(\zeta)=F^{(-)}(\zeta)-F^{(+)}(\zeta)\ \text{почти всюду на}\ L(\varphi).\tag{1.6}$$

Доказательство. Очевидно, что путем поворота комплексной плоскости доказательство леммы можно свести к случаю $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, когда $L(\varphi)$ совпадает с положительной частью мнимой оси.

Итак, пусть

$$\varphi=\frac{\pi}{2},\ f(iy)\in L_p^{(\omega)}\left(L\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

и

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{f(iy)}{iy-z}\,dy,\ z\in\mathbf{C}\setminus L\left(\frac{\pi}{2}\right).\tag{1.7}$$

* Полагаем, что направление на $L(\varphi)$ совпадает с направлением возрастания $|\zeta|$.

Из абсолютной и равномерной сходимости этого интеграла внутри области $\mathbf{C} \setminus L\left(\frac{\pi}{2}\right)$ следует, что в этой области $F(z)$ аналитична.

Перейдем к доказательству неравенства (1.5) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$. С этой целью, зафиксировав $\vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$ и положив

$$H_\vartheta(r;\ r-y) = \frac{1}{2\pi} \frac{|r-y|}{iy - re^{i\vartheta}},$$

определим оператор T_ϑ равенством

$$T_\vartheta(\varphi)(r) = \int_0^{+\infty} \{H_\vartheta(r;\ r-y)/|r-y|\}\, \varphi(y)\, dy. \tag{1.8}$$

Докажем, что T_ϑ — ограниченный оператор в $L_p(0, +\infty)$. Пусть $\varphi(y) \in L_p(0, +\infty)$. Положив

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{iy - z}\, dy = \begin{cases} \Phi^{(+)}(z), & \operatorname{Re} z > 0, \\ \Phi^{(-)}(z), & \operatorname{Re} z < 0, \end{cases}$$

на основании теоремы B заключаем, что

$$\Phi^{(+)}(z) \in H_p,\quad \Phi^{(-)}(-z) \in H_p$$

и

$$\|\Phi^{(+)}\|_{H_p} \leqslant A_p \|\varphi\|_{L_p(0,+\infty)},\ \|\Phi^{(-)}(-z)\|_{H_p} \leqslant A_p \|\varphi\|_{L_p(0,+\infty)}.$$

Следовательно, в силу теоремы A имеем также

$$\Phi^{(+)}(z) \in H_p^*,\quad \Phi^{(-)}(-z) \in H_p^*,$$

причем

$$\|\Phi^{(+)}\|_{H_p^*} \leqslant A_p \|\varphi\|_{L_p(0,+\infty)},\ \|\Phi^{(-)}(-z)\|_{H_p^*} \leqslant A_p \|\varphi\|_{L_p(0,+\infty)}.$$

Это значит, что при $\vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$ справедливо неравенство

$$\left\{\int_0^{+\infty} |\Phi(re^{i\vartheta})|^p\, dr\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant A_p \|\varphi\|_{L_p(0,+\infty)},$$

причем $A_p \in (0, +\infty)$ не зависит от ϑ и $\varphi(y)$. Поскольку $T_\vartheta(\varphi)(r) = \Phi(re^{i\vartheta})$, то последнее неравенство можно переписать в виде

$$\|T_\vartheta(\varphi)\|_{L_p(0,+\infty)} \leqslant A_p \|\varphi\|_{L_p(0,+\infty)},\quad \varphi \in L_p(0, +\infty).$$

Значит T_ϑ — ограниченный оператор в $L_p(0, +\infty)$. Кроме того, $|H_\vartheta(r;\ r-y)| \leqslant 1/(2\pi)$. Следовательно, в силу одного результата И. Стейна [27], для любой измеримой функции $\varphi(y)$ будем иметь

$$\| T_\vartheta(\varphi)(r)\, r^{\frac{\omega}{p}} \|_{L_p(0,+\infty)} \leqslant A_{p,\omega} \| \varphi(y)\, y^{\frac{\omega}{p}} \|_{L_p(0,+\infty)}, \tag{1.9}$$

причем $A_{p,\omega} \in (0, +\infty)$ не зависит от $\vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi\right)$ и $\varphi(y)$. В частности, для функции $\varphi_0(y) = f(iy)$, в силу определений (1:7) и (1.8) функции $F(z)$ и оператора T_ϑ, будем иметь: $T_\vartheta(\varphi_0)(r) = F(re^{i\vartheta})$. В этом случае неравенство (1.9) принимает вид

$$\left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\vartheta})|^p\, r^{\omega}\, dr \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant A_{p,\omega} \|f\|_{L_p^{(\omega)}\left(L\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}, \tag{1.10}$$

где $\vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, \frac{\pi}{2}+2\pi\right)$. Поскольку отсюда вытекает принадлежность $F(z)$ классу $H_p^{(\omega)}[\Delta(1; 0)]$, то в силу теоремы 1 (1°) неравенство (1.10) верно и при $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$. Этим завершается доказательство утверждения 1°.

Чтобы убедиться в справедливости утверждения 2° леммы положим

$$F(z) = \begin{cases} F^{(+)}(z), & \operatorname{Re} z > 0, \\ F^{(-)}(z), & \operatorname{Re} z < 0. \end{cases}$$

Тогда, в силу (1.10), $F^{(+)}(z)$ и $F^{(-)}(-z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(1; 0)]$. Следовательно, по теореме 1 функция $F(z)$ почти всюду на $L\left(\frac{\pi}{2}\right)$ имеет угловые граничные значения $F^{(-)}(\zeta)$ и $F^{(+)}(\zeta) \in L_p^{(\omega)}\left(L\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$, соответственно слева и справа от луча $L\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Наконец, (1.6) вытекает из известных результатов об интегралах типа Коши (см., напр., [28], стр. 416). Лемма доказана.

Применение доказанной леммы позволяет получить следующее обобщение теоремы B.

Теорема 3. *Если* $F(\zeta) \in L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha; \vartheta))$ $(1 < p < +\infty,\ -1 < \omega < p-1)$, *то интеграл типа Коши*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} F^{(+)}(z), & z \in \Delta(\alpha; \vartheta), \\ F^{(-)}(z), & z \in \Delta^*(\alpha; \vartheta), \end{cases}$$

обладает следующими свойствами.

1°. $F^{(+)}(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$, $F^{(-)}(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha; \vartheta)]$;

2° *Имеют место неравенства*

$$\|F^{(+)}\|_{p,\omega} \leqslant B_{p,\omega}\|F\|_{p,\omega}, \quad \|F^{(-)}\|_{p,\omega} \leqslant B_{p,\omega}\|F\|_{p,\omega},$$

где $B_{p,\omega} \in (0, +\infty)$ *не зависит от* $F(\zeta)$;

3° *Почти всюду на* $\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)$

$$F(\zeta) = F^{(+)}(\zeta) - F^{(-)}(\zeta).$$

Доказательство. Положив

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L\left(\vartheta\pm\frac{\pi}{2\alpha}\right)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \Phi^{(\pm)}(z),\ z\in \mathbf{C}\setminus L\left(\vartheta\pm\frac{\pi}{2\alpha}\right),$$

очевидно, будем иметь

$$\Phi^{(-)}(z) - \Phi^{(+)}(z) = \begin{cases} F^{(+)}(z),\ z\in\Delta(\alpha;\ \vartheta),\\ F^{(-)}(z),\ z\in\Delta^*(\alpha;\ \vartheta).\end{cases}$$

Применив к функциям $\Phi^{(\pm)}(z)$ лемму 1, получим утверждения 1° и 3°, а также неравенства

$$\|F^{(+)}\|^*_{p,\omega} \leqslant A_{p,\omega}\|F\|_{p,\omega},\quad \|F^{(-)}\|^*_{p,\omega} \leqslant A_{p,\omega}\|F\|_{p,\omega}.$$

Из этих неравенств, воспользовавшись теоремой 2 (2°), получим утверждение 2°. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть* $F(\zeta)\in L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta))$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$. *Для того чтобы* $F(\zeta)$ *была граничной функцией некоторой функции из класса* $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0,\quad z\in\Delta^*(\alpha;\ \vartheta).$$

1.3. Мы хотим установить общий вид линейного функционала в пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$, удобный для наших дальнейших целей. Сначала докажем лемму.

Лемма 2. *Если* $F(z)\in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$ *и* $G(z)\in H_q^{(\tilde\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ $\left(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \tilde\omega=(1-q)\,\omega\right)$, *то*

$$\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} F(\zeta)\, G(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{1.11}$$

Доказательство. Для фиксированных значений ε, R и φ_0 $\left(0<\varepsilon<R<+\infty,\ 0<\varphi_0<\frac{\pi}{2\alpha}\right)$ обозначим через $C(\varepsilon;\ R;\ \varphi_0)$ границу области $\{z\colon |\mathrm{Arg}\, z-\vartheta|<\varphi_0,\ \varepsilon<|z|<R\}$. По теореме Коши

$$\int\limits_{C(\varepsilon;\ R;\ \varphi_0)} F(z)\, G(z)\, dz = 0. \tag{1.12}$$

С другой стороны, в силу теоремы 1 (3°) имеем

$$\max_{|\varphi-\vartheta|<\varphi_0}\|F(re^{i\varphi})\| = o\left(r^{-\frac{1+\omega}{p}}\right),$$

$$r\to+0,\ r\to+\infty,$$

$$\max_{|\varphi-\vartheta|<\varphi_0}\|G(re^{i\varphi})\| = o\left(r^{-\frac{1+(1-q)\omega}{q}}\right),$$

откуда

$$\int\limits_{\substack{|z|=r\\ |\operatorname{Arg} z-\vartheta|<\varphi_0}} F(z)\,G(z)\,dz = o(1),\quad r\to+0,\ r\to\infty.$$

Следовательно, устремив в (1.12) $\varepsilon\to+0$, $R\to+\infty$, получим

$$\int\limits_0^{+\infty} F(re^{i(-\varphi_0+\vartheta)})\,G(re^{i(-\varphi_0+\vartheta)})\,e^{i(-\varphi_0+\vartheta)}\,dr\,-$$

$$-\int\limits_0^{+\infty} F(re^{i(\varphi_0+\vartheta)})\,G(re^{i(\varphi_0+\vartheta)})\,e^{i(\varphi_0+\vartheta)}\,dr = 0. \tag{1.13}$$

Теперь уже нетрудно в этом равенстве перейти к пределу при $\varphi_0\to\frac{\pi}{2\alpha}$.

Действительно, в силу теоремы 1 (1°), при $\varphi_0\to\frac{\pi}{2\alpha}$ будем иметь

$$F\left(re^{i\left(\pm\frac{\pi}{2\alpha}+\vartheta\right)}\right)r^{\frac{\omega}{p}} = \operatorname*{l.i.m.}_{\varphi_0\to\frac{\pi}{2\alpha}} F\left(re^{i(\pm\varphi_0+\vartheta)}\right)r^{\frac{\omega}{p}},$$

$$G\left(re^{i\left(\pm\frac{\pi}{2\alpha}+\vartheta\right)}\right)e^{i\left(\pm\frac{\pi}{2\alpha}+\vartheta\right)}r^{-\frac{\omega}{p}} = \operatorname*{l.i.m.}_{\varphi_0\to\frac{\pi}{2\alpha}} G\left(re^{i(\pm\varphi_0+\vartheta)}\right)r^{i(\pm\varphi_0+\vartheta)}r^{-\frac{\omega}{p}},$$

где в первом из этих равенств предел в среднем берется по метрике $L_p(0,+\infty)$, а во втором — по метрике $L_q(0,+\infty)$. Отсюда заключаем, что произведения правых частей этих равенств сходятся по метрике $L_1(0,+\infty)$ к произведениям их левых частей. Следовательно, устремив в (1.13) $\varphi_0\to\frac{\pi}{2\alpha}$, получим (1.11), Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть Φ — ограниченный линейный функционал, заданный на пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)]$ $(1<p<+\infty,\ -1<\omega<p-1)$. Тогда существует единственная функция $G(z)\in H_q^{(\tilde\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \tilde\omega=(1-r)\omega\right)$ такая, что*

$$\Phi[F] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\vartheta)} F(\zeta)\,G(\zeta)\,d\zeta,\quad F\in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)]. \tag{1.14}$$

При этом

$$\|\Phi\|_* \leqslant \frac{1}{2\pi}\|G\|_{q,\tilde{\omega}} \leqslant B_{p,\omega}\|\Phi\|_*, \tag{1.15}$$

где $\|\Phi\|_*$ *— это норма функционала* Φ *на пространстве* $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)]$, *а* $B_{p,\omega}\in(0,+\infty)$ *не зависит от* Φ.

Обратно, если $G(z)\in H_q^{(\tilde{\omega})}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$, *то формулой* (1.14) *определяется ограниченный линейный функционал, заданный на пространстве* $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)]$.

Доказательство. Пусть Φ — ограниченный линейный функционал, заданный на пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)]\subset L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha;\vartheta))$. Продолжим этот функционал с сохранением нормы на все пространство $L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha;\vartheta))$. Из общего вида функционала в $L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha;\vartheta)$ имеем

$$\Phi[F]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\vartheta)}F(\zeta)\overline{g(\zeta)}\,|\zeta|^{\omega}\,d\zeta,\quad F\in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)], \tag{1.16}$$

где $g(\zeta)\in L_q^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha;\vartheta))$, причем

$$2\pi\|\Phi\|_*=\|g\|_{q,\omega}. \tag{1.17}$$

Так как $\overline{g(\zeta)}\,|\zeta|^{\omega}\in L_q^{(\tilde{\omega})}(\partial\Delta(\alpha;\vartheta))$, то по теореме 3 существуют функции $G(z)\in H_q^{(\tilde{\omega})}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ и $G^*(z)\in H_q^{(\tilde{\omega})}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)]$ такие, что

$$\|G\|_{q,\tilde{\omega}}\leqslant B_{q,\omega}\|\overline{g(\zeta)}\,|\zeta|^{\omega}\|_{q,\tilde{\omega}}=B_{p,\omega}\|g\|_{q,\omega} \tag{1.18}$$

и почти всюду на $\partial\Delta(\alpha;\vartheta)$

$$\overline{g(\zeta)}\,|\zeta|^{\omega}=G(\zeta)-G^*(\zeta). \tag{1.19}$$

Воспользовавшись лемой 2, из (1.16) и (1.19) получим (1.14).

Далее, применив к (1.14) неравенство Гельдера, будем иметь

$$|\Phi[F]|\leqslant\frac{1}{2\pi}\|G\|_{q,\tilde{\omega}}\|F\|_{p,\omega},\quad F\in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)]. \tag{1.20}$$

Отсюда, из (1.17) и (1.18) следуют неравенства (1.15).

Докажем единственность представления (1.14).

Пусть $G(z)\in H_q^{(\tilde{\omega})}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ и

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\vartheta)}F(\zeta)\,G(\zeta)\,d\zeta=0,\quad\forall F\in H_p^{(\omega)}]\Delta^*(\alpha;\vartheta)]. \tag{1.21}$$

Так как при фиксированном $z\in\Delta(\alpha;\vartheta)$ функция $F_z(\zeta)=(\zeta-z)^{-1}$ непрерывна в замкнутой области $\overline{\Delta^*(\alpha;\vartheta)}$, а при $|\zeta|\to+\infty$ имеет порядок $O(|\zeta|^{-1})$, то $F_z(\zeta)\in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)]$. Поэтому из (1.21), в частности, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)}\frac{G(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0,\quad z\in\Delta(\alpha;\,\vartheta).$$

Следовательно, по теореме 1, $G(z)\equiv 0$, $z\in\Delta(\alpha;\,\vartheta)$, и единственность представления (1.14) доказана.

Наконец, если $G(z)\in H_q^{(\bar{\omega})}[\Delta(\alpha;\,\vartheta)]$, то формулой (1.14) задается линейный функционал, ограниченность которого следует из (1.20). Теорема доказана.

1.4. В заключение этого параграфа опишем множество нулей функций класса $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\,\vartheta)]$.

Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty\subset\Delta(\alpha;\,\vartheta)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, а $s_k\geqslant 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$. Образуем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha}{1+|\lambda_k|^{2\alpha}}.\tag{1.22}$$

Справедливо следующее утверждение (см., напр., [29], лемму 3).

Лемма А. *Если ряд* (1.22) *сходится, то произведение типа Бляшке*

$$B_{\alpha,\vartheta}(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(e^{-i\vartheta}z)^\alpha-(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha}{(e^{-i\vartheta}z)^\alpha+\overline{(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha}}\,\frac{|1-(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^{2\alpha}|}{1-(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^{2\alpha}}\tag{1.23}$$

сходится в области $\Delta(\alpha;\,\vartheta)$ *и определяет нам аналитическую функцию* $B_{\alpha,\vartheta}(z)$, *обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности* $\{\lambda_k\}_k^\infty$. *Более того*

$$|B_{\alpha,\vartheta}(z)|\leqslant 1\ (z\in\Delta(\alpha;\,\vartheta));\quad B_{\alpha,\vartheta}^{(s_k-1)}(\lambda_k)=0\quad(k=1,\,2,\cdots);$$

$$|B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)|=1\ \text{почти всюду на}\ \partial\Delta(\alpha;\,\vartheta).$$

Имеет место

Теорема 5. *Пусть* $1<p<+\infty$ *и* $-1<\omega<p-1$. *Справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если ряд* (1.22) *сходится, то существует функция* $G(z)\in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\,\vartheta)]$, *обращающаяся в нуль лишь в точках последовательности* $\{\lambda_k\}_1^\infty$, *причем*

$$G^{(s_k-1)}(\lambda_k)=0\quad(k=1,\,2,\cdots);\tag{1.24}$$

2°. *Если ряд* (1.22) *расходится и функция* $G(z)\in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\,\vartheta)]$ *удовлетворяет условиям* (1.24), *то* $G(z)\equiv 0$.

Доказательство. 1°. Если ряд (1.22) сходится, то в силу леммы А функция

$$G(z)=\frac{B_{\alpha,\vartheta}(z)}{z-\zeta_0},\quad z\in\Delta(\alpha;\,\vartheta),$$

где $\zeta_0\in\Delta^*(\alpha;\,\vartheta)$ фиксировано, аналитична и ограничена в области $\Delta(\alpha;\,\vartheta)$, а при $|z|\to+\infty$ имеет порядок $O(|z|^{-1})$. Следовательно, $G(z)\in$

$\in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$ и, в силу той же леммы А, удовлетворяет условиям (1.24).

2°. Пусть $G(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$ и удовлетворяет условиям (1.24). Тогда при любом целом $n \geqslant 1$ функция

$$G_n(z) = G(z)\,\pi_n^{-1}(z), \quad z \in \Delta(\alpha,\ \vartheta),$$

где

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(e^{-i\vartheta} z)^\alpha - (e^{-i\vartheta} \lambda_k)^\alpha}{(e^{-i\vartheta} z)^\alpha + (e^{-i\vartheta} \lambda_k)^\alpha},$$

принадлежит классу $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$. Следовательно, по теореме 1

$$\frac{G(z)}{\pi_n(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} \frac{G(\zeta)\,\pi_n^{-1}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in \Delta(\alpha;\ \vartheta).$$

Применив здесь неравенство Гельдера и учитывая, что $|\pi_n(\zeta)| = 1$, $\zeta \in \partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)$, получим

$$|G(z)| \leqslant |\pi_n(z)| \frac{\|G\|_{p,\,\omega}}{2\pi} \left\{ \int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} \frac{|\zeta|^{\omega} |d\zeta|}{|\zeta - z|^q} \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad z \in \Delta(\alpha;\ \vartheta).$$

Наконец, поскольку из расходимости ряда (1.22) следует, что

$$\lim_{n \to +\infty} |\pi_n(z)| = 0, \quad z \in \Delta(\alpha;\ \vartheta),$$

(см. [29], лемму 2), то, устремив в последнем неравенстве $n \to +\infty$, получим $G(z) \equiv 0$. Теорема доказана.

§ 2. Полнота и замыкание биортогональных систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ в угловых областях

2.1 (a). Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\alpha;\ \vartheta)$, среди которых могут быть числа произвольной конечной или даже бесконечной кратности.

Для любого целого $j \geqslant 1$ обозначим через s_j и p_j кратности появления числа λ_j на отрезке $\{\lambda_k\}_1^j$ и во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ соответственно.

Очевидно, что

$$1 \leqslant s_j \leqslant p_j \leqslant +\infty \quad (j = 1, 2, \cdots).$$

Отметим также, что если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\,(e^{-i\vartheta} \lambda_k)^\alpha}{1 + |\lambda_k|^{2\alpha}} \tag{2.1}$$

сходится, то число p_j будет конечным при всех $j \geqslant 1$.

Условимся также всюду ниже полагать

$$1 < p < +\infty, \ -1 < \omega < p-1, \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \ \tilde{\omega}=(1-q)\,\omega. \tag{2.2}$$

Отметим, что эти условия симметричны относительно указанных параметров в том смысле, что

$$1 < q < +\infty, \ -1 < \tilde{\omega} < q-1, \ \frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1, \ \omega=(1-p)\,\tilde{\omega}$$

Этим обстоятельством мы будем часто пользоваться.

(б) С последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ассоциируем систему простейших рациональных дробей $\{r_k(z)\}_1^\infty$, положив

$$r_k(r) = \frac{(s_k-1)!}{(z-\lambda_k)^{s_k}} \quad (k=1,\ 2,\cdots). \tag{2.3}$$

Так как $r_k(z)$ непрерывна в замкнутой области $\overline{\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)}$, а при $|z|\to+\infty$ имеет порядок $O(|z|^{-1})$, то

$$r_k(z)\in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)] \quad (k=1,\ 2,\cdots).$$

Теорема 6. *Для полноты системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ в пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ необходимо и достаточно, чтобы ряд* (2.1) *расходился.*

Доказательство. Пусть Φ — заданный на пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ ограниченный линейный функционал, удовлетворяющий условиям

$$\Phi[r_k]=0 \quad (k=1,\ 2,\cdots). \tag{2.4}$$

В силу теоремы Хана-Банаха нам нужно показать, что если ряд (2.1) расходится, то не существует нетривиального функционала Φ, удовлетворяющего условиям (2.4), а если ряд (2.1) сходится, то такой функционал Φ существует. Но из общего вида функционала

$$\Phi[F]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} F(\zeta)\,G(\zeta)\,d\zeta, \quad F\in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha,\ \vartheta)],$$

где $G(z)\in H_q^{(\tilde{\omega})}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$ (см. теорему 4), из (2.4) и (2.3) имеем

$$G^{(s_k-1)}(\lambda_k)=0 \quad (k=1,\ 2,\cdots).$$

Остается воспользоваться теоремой 5. Теорема доказана.

Аналогично можно доказать, что если ряд (2.1) расходится, то система $\{r_k(z)\}_{k=2}^\infty$ полна в пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$. Таким образом,

Если ряд (2.1) *расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не минимальна в* $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ и, следовательно, не имеет биортогонального дополнения.

Отметим, что в случае $p=2$ утверждение теоремы 6 было анонсировано в заметке автора [30].

(в) Если система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не полна в $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ (т. е. ряд (2.1) сходится), то она порождает в $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ некоторое замкнутое подпространство. Мы хотим дать полное внутреннее описание этого подпространства.

При условии сходимости ряда (2.1) обозначим через $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$ множество тех функций $F(z)\in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$, для которых $F(\zeta)\ B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)$, $\zeta\in\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)$, являются угловыми граничными значениями некоторой функции из класса $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$.

В силу следствия из теоремы 3 справедлива

Лемма 3. *Если ряд* (2.1) *сходится, то класс* $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta^*(\alpha;\vartheta)\}$ *совпадает с множеством тех* $F(z)\in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$, *для которых*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)}\frac{F(\zeta)\,B_{\alpha;\,\vartheta}(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=0,\quad z\in\Delta^*(\alpha;\ \vartheta). \tag{2.5}$$

Из этой леммы легко следует, что $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$ является замкнутым подпространством пространства $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$.

Оказывается, что справедлива

Теорема 7. *Если ряд* (2.1) *сходится, то замыкание в метрике* $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ *линейной оболочки системы* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *совпадает с классом* $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что $\{r_k(z)\}_1^\infty\subset\subset H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$. Поэтому, обозначив через $V(\{r_k\}_1^\infty;H_p^{(\omega)}(\alpha;\ \vartheta)])$ замыкание в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ линейной оболочки системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$, будем иметь

$$V(\{r_k\}_1^\infty;\ H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)])\subset H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}.$$

Докажем, что

$$V(\{r_k\}_1^\infty;\ H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)])=H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}.$$

Пусть Φ — зданный на $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ ограниченный линейный функционал, удовлетворяющий условиям

$$\Phi[r_k]=0\quad(k=1,\ 2,\cdots).$$

Нам нужно доказать, что

$$\Phi[F]=0,\ \forall F\in H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}.$$

Из общего вида функционала

$$\Phi[F]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha,\ \vartheta)}F(\zeta)\,G(\zeta)\,d\zeta,$$

где $G\in H_1^{(\tilde{\omega})}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$ (см. теорему 4), имеем: $G^{(s_k-1)}(\lambda_k)=0.\ (k=1,2,\cdots)$. Отсюда заключаем, что $G(\zeta)\,B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(\zeta)\in H_q^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$. С другой стороны, если $F\in H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$, то $F(\zeta)\,B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)\in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$.

Следовательно, в силу леммы 2

$$\Phi[F] = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)} \{F(\zeta) B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)\} \{G(\zeta) B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(\zeta)\} d\zeta = 0$$

для всех $F \in H_p^{(\omega)} [\lambda_k; \Delta^*(\alpha; \vartheta)]$. Теорема доказана.

Отметим, что в случае $p = 2$ утверждение этой теоремы было установлено в работе С. А. Акопяна и И. О. Хачатряна [31], а в случае $\alpha = 1$, $\omega = 0$ — в работе М. М. Джрбашяна [18]. Однако примененный здесь метод доказательства теоремы 7 отличается как от метода, примененного в работе [31], так и от метода, примененного в работе [18] и раньше приводит к цели.

2.2. (а) Если ряд (2.1) расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не имеет биортогонального дополнения. Но при условии сходимости ряда (2.1) система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ имеет биортогональную с ней систему. Займемся ее построением.

(б). Пусть ряд (2.1) сходится. Тогда бесконечное произведение (1.23) сходится в области $\Delta(\alpha; \vartheta)$ и представляет там ограниченную аналитическую функцию $B_{\alpha,\vartheta}(z)$, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. При этом для функции $B_{\alpha,\vartheta}(z)$ точка $z = \lambda_k$ является нулем кратности p_k. Очевидно, что функция

$$\tau_k(z) = (z - \lambda_k)^{p_k} B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(z) \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{2.6}$$

регулярна и отлична от нуля в некоторой окрестности точки $z = \lambda_k$. Следовательно, при достаточно малом $\delta > 0$ справедливо разложение

$$\tau_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\lambda_k) (z - \lambda_k)^\nu, \quad |z - \lambda_k| < \delta; \tag{2.7}$$

$$a_\nu(\lambda_k) = \frac{1}{\nu!} \tau_k^{(\nu)}(\lambda_k) \quad (\nu = 0, 1, \cdots; \quad k = 1, 2, \cdots). \tag{2.8}$$

Отметим, что $a_0(\lambda_k) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots,)$.

Введем в рассмотрение полиномы

$$q_k(z) = \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} a_\nu(\lambda_k)(z - \lambda_k)^\nu \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.9}$$

и функции

$$\Omega_k(z) = \frac{B_{\alpha,\vartheta}(z)\, q_k(z)}{(s_k - 1)!\,(z - \lambda_k)^{p_k - s_k + 1}} = \tag{2.10}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$= \frac{B_{\alpha,\vartheta}(z)}{(s_k - 1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} \frac{a_\nu(\lambda_k)}{(z - \lambda_k)^{p_k - s_k - \nu + 1}}.$$

Так как функция $B_{\alpha,\vartheta}(z)$ аналитична и ограничена в области $\Delta(\alpha; \vartheta)$ и в точке $z = \lambda_k$ имеет нуль кратности p_k, то $\Omega_k(z)$ аналитична и ограничена в той же области $\Delta(\alpha; \vartheta)$. Более того, при $|z| \to +\infty$ функция $\Omega_k(z)$ имеет порядок $O(|z|^{-1})$. Отсюда легко видеть, что

$$\Omega_k(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)] \quad (k = 1,\ 2, \cdots).$$

Лемма 4. *Функции системы* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *удовлетворяют следующим интерполяционным данным:*

$$\Omega_k^{(s_n-1)}(\lambda_n) = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (k,\ n = 1,\ 2, \cdots).$$

Доказательство. Из (2.7) и (2.9) следует, что

$$q_k(z) = \tau_k(z) - \sum_{\nu = p_k - s_k + 1}^{\infty} a_\nu(\lambda_k)(z - \lambda_k)^\nu,\ |z - \lambda_k| < \delta,$$

а в силу (2.6) имеем

$$\frac{B_{\alpha,\vartheta}(z)\tau_k(z)}{(s_k - 1)!\,(z - \lambda_k)^{p_k - s_k + 1}} = \frac{(z - \lambda_k)^{s_k - 1}}{(s_k - 1)!}.$$

Из этих равенств и из (2.10) получаем

$$\Omega_k(z) = \frac{(z - \lambda_k)^{s_k - 1}}{(s_k - 1)!} - \frac{B_{\alpha,\vartheta}(z)}{(s_k - 1)!} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} b_\varkappa(\lambda_k)(z - \lambda_k)^\varkappa,\ |z - \lambda_k| < \delta. \tag{2.11}$$

Так как $B_{\alpha,\vartheta}(z)$ в точке $z = \lambda_k$ имеет нуль кратности $p_k \geqslant s_k$, то из (2.11) имеем $\Omega_k^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 1$ $(k \geqslant 1)$.

Если $\lambda_k = \lambda_n$, но $k \neq n$, то $s_k \neq s_n$, и из (2.11) получаем: $\Omega_k^{(s_n-1)}(\lambda_n) = 0$.

Наконец, если $\lambda_k \neq \lambda_n$, то из (2.10) вытекает, что в точке $z = \lambda_n$ функция $\Omega_k(z)$ вместе с $B_{\alpha,\vartheta}(z)$ имеет нуль кратности $p_n \geqslant s_n$. Следовательно, $\Omega_k^{(s_n-1)}(\lambda_n) = 0$. Лемма доказана.

Теорема 8. *Пусть ряд* (2.1) *сходится. Тогда системы* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *и* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *биортогональны в следующем смысле:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} r_n(\zeta)\,\Omega_k(\zeta)\,d\zeta = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (k,\ n = 1,\ 2, \cdots), \tag{2.12}$$

где направление на $\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)$ *совпадает с направлением положительного обхода области* $\Delta(\alpha;\ \vartheta)$.

Эта теорема следует из леммы 4, так как написанный в (2.12) интеграл равен $\Omega_k^{(s_n-1)}(\lambda_n)$ (в силу (2.3) и теоремы 1 (2°)).

(в) Теперь мы хотим описать замкнутую линейную оболочку системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty \subset H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$. Напомним, что эта система определена лишь при условии сходимости ряда (2.1).

Пусть ряд (2.1) сходится. Обозначим через $\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta(\alpha;\ \vartheta)\}$ множество тех функций $f(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$, для которых $f(\zeta)\,B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(\zeta)$, $\zeta \in \partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)$, являются граничными значениями некоторой функции из класса $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$.

Теорема 9. *Пусть ряд* (2.1) *сходится. Тогда замыкание в метрике* $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ *линейной оболочки системы* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *совпадает с классом* $\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta(\alpha;\vartheta)\}$.

Доказательство. Для произвольного целого $j\geqslant 1$ обозначим через $\{K_j\}$ множество тех индексов k, для которых $\lambda_k=\lambda_j$. Обозначим, далее, через A_j и B_j семейства функций:

$$A_j=\left\{\frac{(n-1)!}{(z-\lambda_j)^n}\right\}_{n=1}^{p_j},\quad B_j=\left\{\frac{1}{(n-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_j-n}\frac{a_\nu(\lambda_j)}{(z-\lambda_j)^{p_j-n-\nu+1}}\right\}_{n=1}^{p_j}.$$

В силу определения множества $\{K_j\}$ будем иметь

$$A_j=\{r_k(z)\colon k\in\{K_j\}\},\ B_j=\{\Omega_k(z)B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(z)\colon k\in\{K_j\}\},$$

откуда заключаем, что

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j=\{r_k(z)\}_1^\infty,\quad \bigcup_{j=1}^{\infty}B_j=\{B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(z)\,(\Omega_k(z)\}_1^\infty. \tag{2.13}$$

С другой стороны, любая функция семейства B_j есть линейная комбинация функций семейства A_j, и обратно, так как $a_0(\lambda_j)\neq 0$, то любая функция семейства A_j является линейной функций семейства B_j. Иначе говоря, линейные оболочки семейств A_j и B_j совпадают. Следовательно, в силу (2.13), линейные оболочки систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(z)\times\Omega_k(z)\}_1^\infty$ также совпадают.

Пусть теперь $f(z)\in\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta(\alpha;\vartheta)\}$. Тогда существует функция $F(z)\in H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta^*(\alpha;\vartheta)\}$ такая, что почти всюду на $\partial\Delta(\alpha;\vartheta)=\partial\Delta^*(\alpha;\vartheta)$ справедливо равенство

$$f(\zeta)\,B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(\zeta)=F(\zeta). \tag{2.14}$$

По теореме 7 существует последовательность $\{P_n(z)\}_1^\infty$ линейных комбинаций функций системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ такая, что $\|P_n-F\|_{p,\omega}\to 0$ (при $n\to\infty$). Отсюда, учитывая (2.14) и тот факт, что $|B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)|=1$ почти всюду на $\partial\Delta(\alpha;\vartheta)=\partial\Delta^*(\alpha;\vartheta)$, получим: $\|B_{\alpha,\vartheta}P_n-f\|_{p,\omega}\to 0$ $(n\to+\infty)$. При этом ясно, что $\{B_{\alpha,\vartheta}P_n\}_1^\infty$ — это последовательность линейных комбинаций функций системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ (т. к. линейные оболочки систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k B_{\alpha,\vartheta}^{-1}\}_1^\infty$ совпадают).

Таким образом, $\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta(\alpha;\vartheta)\}$ является подпространством замыкания в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ линейной оболочки системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$. А поскольку $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty\subset\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta(\alpha;\vartheta)\}$, то $\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta(\alpha;\vartheta)\}$ совпадает с этим замыканием. Теорема доказана.

Отметим, что в случае $\alpha=1$, $\omega=0$ утверждение этой теоремы иным способом было доказано в работе М. М. Джрбашяна [18].

2.3. Докажем несколько непосредственно связанных с содержанием этого параграфа лемм, которыми воспользуемся ниже.

Лемма 5. *Пусть ряд* (2.1) *сходится. Если* $f(z) \in \widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta(\alpha;\ \vartheta)\}$ *и* $f^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$, *то* $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Так как $f^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0$ $(k \geq 1)$, то

$$f(\zeta)\, B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(\zeta) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)].$$

С другой стороны, из

$$f(z) \in \widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta(\alpha;\ \vartheta)\}$$

имеем

$$f(\zeta)\, B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(\zeta) \in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)].$$

Следовательно, в силу теоремы 1 (2°)

$$\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} \frac{f(\zeta)\, B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \equiv 0, \quad z \in \Delta(\alpha;\ \vartheta) \cup \Delta^*(\alpha;\ \vartheta).$$

Отсюда заключаем, что $f(\zeta)\, B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(\zeta) = 0$ почти всюду на $\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)$ (см. теорему 3 (3°)), и поскольку $|B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)| = 1$ на $\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)$, то $f(z) \equiv 0$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть ряд* (2.1) *сходится. Тогда любая функция* $G(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$ *представима в виде*

$$G(z) = g(z) + \frac{B_{\alpha,\vartheta}(z)}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} \frac{G(\zeta)}{B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)}\, \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Delta(\alpha;\ \vartheta), \tag{2.15}$$

где

$$g(z) \in \widetilde{H}_p^{\omega}\{\lambda_k;\ \Delta(\alpha,\ \vartheta)\},\quad \widetilde{G}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\alpha,\ \vartheta)} \frac{G(\zeta)}{B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)}\, \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]. \tag{2.16}$$

При этом справедливо неравенство

$$\|g\|_{p,\omega} \leq B_{p,\omega} \|G\|_{p,\omega}, \tag{2.17}$$

где $B_{p,\omega} \in (0, +\infty)$ *не зависит от* $G(z)$.

Доказательство. Пусть $G(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$. Так как $|B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)| = 1$ почти всюду на $\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)$, то по теореме 1 (1°)

$$G(\zeta)\, B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(\zeta) \in L_p^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)).$$

Следовательно, положив

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\alpha,\ \vartheta)} \frac{G(\zeta)}{B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)}\, \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} \widetilde{G}(z), & z \in \Delta(\alpha;\ \vartheta), \\ -F(z), & z \in \Delta^*(\alpha;\ \vartheta), \end{cases}$$

в силу теоремы 3 можем написать

$$\widetilde{G}(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)],\quad F(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)],$$

причем $\|F\|_{p,\omega} \leqslant B_{p,\omega}\|G\|_{p,\omega}$. Более того, почти всюду на $\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)$

$$G(\zeta)\, B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(\zeta) = \bar{G}(\zeta) + F(\zeta).$$

Следовательно, определив функцию $g(z)$ равенством

$$g(z) = G(z) - B_{\alpha,\vartheta}(z)\,\bar{G}(z), \quad z \in \Delta(\alpha;\ \vartheta),$$

будем иметь: $g(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha,\ \vartheta)]$, и почти всюду на $\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)$

$$g(\zeta)\, B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(\zeta) = F(\zeta).$$

Отсюда на основании леммы 3 заключаем, что $F(z) \in H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$.

Следовательно; $g(z) \in \tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta(\alpha;\ \vartheta)\}$, причем

$$\|g\|_{p,\omega} = \|g\, B_{\alpha,\vartheta}^{-1}\|_{p,\omega} = \|F\|_{p,\omega} \leqslant B_{p,\omega}\|G\|_{p,\omega},$$

и лемма доказана.

Лемма 7. *Если ряд* (2.1) *сходится, то*

1°. *При любом целом* $k \geqslant 1$ *формулой*

$$\chi_k[\varphi] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} \Omega_k(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta,\ \ \varphi \in H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\},$$

на пространстве $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$ *определяется ограниченный линейный функционал* χ_k;

2°. *Системы* $\{\chi_k\}_1^\infty$ *и* $\{r_k\}_1^\infty$ *биортогональны:*

$$\chi_k[r_n] = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (k,\ n = 1,\ 2, \cdots);$$

3°. *Справедливы неравенства*

$$\|\Omega_k\|_{q,\tilde{\omega}} \leqslant C_{p,\omega}\|\chi_k\| \quad (k = 1,\ 2, \cdots),$$

где $\|\chi_k\|$ — *это норма функционала* χ_k *на пространстве* $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$, а $C_{p,\omega} \in (0,\ +\infty)$ *не зависит от* $k \geqslant 1$.

Доказательство. Так как $\Omega_k(z) \in H_q^{(\tilde{\omega})}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$ и $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\} \subset H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$, то утверждение 1° следует из теоремы 4. Утверждение 2° следует из теоремы 8. Перейдем к доказательству утверждения 3° леммы.

Положим

$$T_k(\zeta) = \Omega_k(\zeta)\, B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(\zeta) = \frac{1}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\lambda_k)}{(\zeta-\lambda_k)^{p_k-s_k-\nu+1}},\quad \zeta \in \partial\Delta(\alpha;\ \vartheta).$$

Нетрудно видеть, что $T_k \in H_q^{(\tilde{\omega})}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ и $\|T_k\|_{q,\tilde{\omega}} = \|\Omega_k\|_{q,\tilde{\omega}}$. Следовательно, по теореме 4 формулой

$$\Phi_k[G] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} T_k(\zeta)G(\zeta)\,d\zeta,\ G \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$$

определяется ограниченный линейный функционал Φ_k, заданный на пространстве $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$. При этом

$$\|\Omega_k\|_{q,\infty}^{-} = \|T_k\|_{q,\infty}^{-} \leqslant 2\pi B_{p,\infty} \sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)} T_k(\zeta)\,G(\zeta)\,d\zeta\right|\right\}, \tag{2.18}$$

где верхняя грань берется по всем $G \in H_p^{(\infty)}[\Delta(\alpha;\,\vartheta)]$ с нормой $\|G\|_{p,\infty} \leqslant 1$. Но по лемме 6 каждая такая функция представима в виде

$$G(z) = g(z) + B_{\alpha,\vartheta}(z)\,\tilde{G}(z), \quad z \in \Delta(\alpha;\,\vartheta), \tag{2.19}$$

где $g(z) \in \tilde{H}_p^{(\infty)}\{\lambda_k;\ \Delta(\alpha;\,\vartheta)\}$, $\tilde{G}(z) \in H_p^{(\infty)}[\Delta(\alpha;\,\vartheta)]$, причем $\|g\|_{p,\infty} \leqslant B_{p,\infty}$.

Но так как функция $B_{\alpha,\vartheta}(z)\,\tilde{G}(z)$ вместе с $B_{\alpha,\vartheta}(z)$ в точке $z = \lambda_k$ имеет нуль кратности p_k, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)} T_k(\zeta)\,B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)\,\tilde{G}(\zeta)\,d\zeta = 0,$$

и из (2.19) получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)} T_k(\zeta)\,G(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)} T_k(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta. \tag{2.20}$$

Однако $g(z) \in \tilde{H}_p^{(\infty)}\{\lambda_k;\ \Delta(\alpha;\,\vartheta)\}$. Значит

$$g(\zeta)\,B_{\alpha,\vartheta}^{-1}(\zeta) = \varphi(\zeta) \in H_p^{(\infty)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\,\vartheta)\}, \tag{2.21}$$

и поскольку $\|g\|_{p,\infty} \leqslant B_{p,\infty}$, то $\|\varphi\|_{p,\infty} \leqslant B_{p,\infty}$. Наконец, так как $T_k(\zeta)\,B_{\alpha,\vartheta}(\zeta) = \Omega_k(\zeta)$, то из (2.20) и (2.21) получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha,\,\vartheta)} T_k(\zeta)\,G(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha,\,\vartheta)} \Omega_k(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta.$$

Отсюда и из (2.18) заключаем, что

$$\|\Omega_k\|_{q,\infty}^{-} \leqslant 2\pi B_{p,\infty} \sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)} \Omega_k(\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta\right|\right\},$$

где верхняя грань берется по всем $\varphi(\zeta) \in H_p^{(\infty)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\vartheta)\}$ с нормой $\|\varphi\|_{p,\infty} \leqslant B_{p,\infty}$, откуда и вытекает утверждение 3°. Лемма доказана.

Аналогично доказывается

Лемма 8. *Если ряд* (2.1) *сходится, то*

1°. *При любом целом* $k \geqslant 1$ *формулой*

$$R_k[g] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)} r_k(\zeta)\,g(\zeta)\,d\zeta, \quad g \in \tilde{H}_p^{(\infty)}\{\lambda_k;\ \Delta(\alpha;\,\vartheta)\},$$

на пространстве $\tilde{H}_p^{\infty}\{\lambda_k;\ \Delta(\alpha;\,\vartheta)\}$ *определяется ограниченный линей-нейный функционал* R_k;

2°. *Системы* $\{R_k\}_1^{\infty}$ *и* $\{\Omega_k\}_1^{\infty}$ *биортогональны*:

$$R_k[\Omega_n] = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (k,\ n = 1,\ 2,\cdots);$$

3°. *Справедливы неравенства*

$$\|r_k\|_{p, \omega} \leqslant C_{p, \omega} \|R_k\| \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

где $\|R_k\|$ — *это норма функционала* R_k *на пространстве* $\tilde{H}_p^{(\omega)} [\lambda_k; \Delta (\alpha; \vartheta)]$, *а* $C_{p, \omega} \in (0, +\infty)$ *не зависит от* $k \geqslant 1$.

§ 3. Базисность систем $\{r_k (z)\}_1^\infty$, $\{\Omega_k (z)\}_1^\infty$ и решение кратной интерполяционной задачи в классах $H_p^{(\omega)} [\Delta (\alpha; \vartheta)]$

3.1 (а) Для удобства читателя приведем здесь некоторые известные определения и факты.

Пусть X — банахово пространство и $\{x_k\}_1^\infty$ — система элементов этого пространства. Обозначим через $V (\{x_k\}_1^\infty; X)$ замкнутую линейную оболочку системы $\{x_k\}_1^\infty$.

Как известно, система $\{x_k\}_1^\infty$ называется базисом пространства $V (\{x_k\}_1^\infty; X)$, если любой элемент $x \in V (\{x_k\}_1^\infty; X)$ единственным образом разлагается в сходящийся по метрике X ряд

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x) x_k, \tag{3.1}$$

где $c_k (x)$ — комплексные коэффициенты. В этом случае система $\{c_k (x)\}_1^\infty$ будет биортогональна с системой $\{x_k\}_1^\infty$.

Напомним, что системы $\{x_k\}_1^\infty \subset X$ и $\{x_k^*\}_1^\infty \subset X^*$ называются биортогональными, если

$$x_k^* (x_n) = \delta_{k, n} \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

где $\delta_{k, n}$ — символ Кронекера.

Если система $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом пространства $V (\{x_k\}_1^\infty; X)$, то эта система имеет биортогональное дополнение $\{x_k^*\}_1^\infty$, причем справедливо неравенство

$$\sup_{k \geqslant 1} \{\|x_k\| \|x_k^*\|\} < +\infty, \tag{3.2}$$

где $\|x_k^*\|$ — это норма функционала x_k^* на пространстве $V (\{x_k\}_1^\infty; X)$ (см. [32], стр. 164—171).

Скажем, что система $\{x_k\}_1^\infty$ является базисом $V (\{x_k\}_1^\infty; X)$, изоморфным стандартному базису пространства l_p, если существует ограниченный обратимый линейный оператор T_p: $V (\{x_k\}_1^\infty; X) \to l_p$ такой, что $T_p (x_k) = \{\delta_{k, n}\}_{n=1}^\infty$ при всех $k \geqslant 1$.

(б) Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Delta (\alpha; \vartheta)$ — произвольная последовательность. Как и раньше, для произвольного целого $j \geqslant 1$ через s_j и p_j будем обозначать кратности появления числа λ_j на отрезке $\{\lambda_k\}_1^j$ и во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ соответственно.

Обозначим через $US(\Delta(\alpha;\vartheta))$ класс тех последовательностей $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Delta(\alpha;\vartheta)$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_k}}^{\infty}\left|\frac{(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha-(e^{-i\vartheta}\lambda_j)^\alpha}{(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha+\overline{(e^{-i\vartheta}\lambda_j)^\alpha}}\right|\right\}>0,\quad \sup_{k\geq 1}|p_k|<+\infty. \tag{3.3}$$

Отметим, что из первого из этих условий вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha}{1+|\lambda_k|^{2\alpha}}. \tag{3.4}$$

С последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ассоциируем новую последовательность $l_{(p,\omega)}\equiv\{l_k^{(p,\omega)}\}_1^\infty$, положив

$$\lambda_k^{(p,\omega)}=\{|\lambda_k|^{\omega+(1-\alpha)(2-p)}(|\lambda_k|^{1-\alpha}\operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha)^{p(s_k-1)+1}\}^{\frac{1}{p}}\quad (k=1,2,\cdots). \tag{3.5}$$

Пусть, далее $\varkappa\equiv\{\varkappa_k\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел. Обозначим через $l_p\{\varkappa\}$ банахово пространство всевозможных последовательностей комплексных чисел $\gamma\equiv\{\gamma_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\|\gamma\|_{p,\varkappa}=\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\varkappa_k^p|\gamma_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}<+\infty.$$

Очевидно, что если последовательности $w=\{w_k\}_1^\infty$ и $\gamma=\{\gamma_k\}_1^\infty$ удовлетворяют условиям $w_k=\varkappa_k\gamma_k\ (k\geq 1)$, то $\gamma\in l_p\{\varkappa\}$ тогда и только тогда, когда $w\in l_p$.

Наконец, напомним, что выше мы условились через $p,\ q,\ \omega$ и $\bar{\omega}$ обозначать параметры, определяемые из условий (2.2).

3.2 (а). Докажем лемму.

Лемма 9. *Если $\lambda\in\Delta(\alpha;\vartheta)$ и $n\geq 1$, то*

$$\left\{\frac{2\operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda)^\alpha}{\alpha|\lambda|^{\alpha-1}}\right\}^n\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\vartheta)}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\lambda|^{n+1}}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}\right)^n.$$

Доказательство. Положив $\varphi_\lambda^{(\pm)}=\dfrac{\pi}{2\alpha}\pm\arg(e^{-i\vartheta}\lambda)$, можно написать

$$J_n(\lambda)=\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\vartheta)}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\lambda|^{n+1}}=J_n^{(+)}(\lambda)+J_n^{(-)}(\lambda),$$

где

$$J_n^{(\pm)}(\lambda)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{dr}{[r^2-2r|\lambda|\cos\varphi_\lambda^{(\pm)}+|\lambda|^2]^{(n+1)/2}}.$$

Произведя здесь замену переменной $R=\left(\frac{r}{|\lambda|}-1\right)\Big/\sqrt{1-\cos\varphi_\lambda^{(\pm)}}$, получим

$$J_n^{(\pm)}(\lambda)=\left(|\lambda|\sqrt{1-\cos\varphi_\lambda^{(\pm)}}\right)^{-n}\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{1-\cos\varphi_\lambda^{(\pm)}}}}^{+\infty}\frac{dR}{\left[R^2+2R\sqrt{1-\cos\varphi_\lambda^{(\pm)}}+2\right]^{(n+1)/2}}.$$

Отсюда

$$J_n^{(\pm)}(\lambda)>\left(|\lambda|\sqrt{1-\cos\varphi_\lambda^{(\pm)}}\right)^{-n}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{dR}{\left[R^2+2R\sqrt{1-\cos\varphi_\lambda^{(\pm)}}+2\right]^{(n+1)/2}}>$$

$$\geqslant\left(|\lambda|\sqrt{1-\cos\varphi_\lambda^{(\pm)}}\right)^{-n}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0}\frac{dR}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\right]^{(n+1)/2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(|\lambda|\sqrt{1-\cos\varphi_\lambda^{(\pm)}}\right)^{-n}.$$

Но так как $\sqrt{1-\cos\varphi_\lambda^{(\pm)}}\leqslant\frac{|\varphi_\lambda^{(\pm)}|}{2}$, то

$$J_n^{(\pm)}(\lambda)>\frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^n|\lambda|^{-n}|\varphi_\lambda^{(\pm)}|^{-n}.$$

Следовательно,

$$J_n(\lambda)=J_n^{(+)}(\lambda)+J_n^{(-)}(\lambda)>\frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^n|\lambda|^{-n}\left(|\varphi_\lambda^{(+)}|^{-n}+|\varphi_\lambda^{(-)}|^{-n}\right).\quad(3.6)$$

Теперь заметим, что $|\arg(e^{-i\theta}\lambda)|<\frac{\pi}{2\alpha}$ и, следовательно, хотя бы одно из чисел $\varphi_\lambda^{(+)}$, $\varphi_\lambda^{(-)}$ лежит на отрезке $\left[0,\frac{\pi}{2\alpha}\right]$. Отсюда заключаем, что хотя бы одно из чисел $\alpha\varphi_\lambda^{(+)}$, $\alpha\varphi_\lambda^{(-)}$ принадлежит промежутку $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Приняв это во внимание и воспользовавшись неравенством

$$\sin x\geqslant\frac{2}{\pi}x,\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

из равенств

$$\cos(\alpha\arg(e^{-i\theta}\lambda))=\sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\arg(e^{-i\theta}\lambda)\right)=\sin(\alpha\varphi_\lambda^{(\pm)})$$

получим

$$[\cos(\alpha\arg(e^{-i\theta}\lambda))]^n\geqslant\left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^n\min\{|\varphi_\lambda^{(+)}|^n,|\varphi_\lambda^{(-)}|^n\}.$$

Следовательно,

$$\left\{\frac{2\operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda)}{\alpha|\lambda|^{\alpha-1}}\right\}^n=\left(\frac{2}{\alpha}\right)^n|\lambda|^n[\cos(\alpha\arg(e^{-i\vartheta}\lambda))]^n>$$

$$>\left(\frac{4}{\pi}\right)^n|\lambda|^n\min\{|\varphi_\lambda^{(+)}|^n,|\varphi_\lambda^{(-)}|^n\}.$$

Отсюда и из (3.6) вытекает неравенство леммы.

Лемма 10. *Пусть ряд* (3.4) *сходится. Если*

$$\sup_{k\geq 1}\{\|r_k\|_{p,\alpha}\|\Omega_k\|_{q,\alpha}\}=C<+\infty, \tag{3.7}$$

то $\{\lambda_k\}_1^\infty\in US(\Delta(\alpha;\vartheta))$.

Доказательство. Сначала заметим, что в силу сходимости ряда (3.4) число p_n (т. е. кратность появления числе λ_n во всей последовательности) $\{\lambda_k\}_1^\infty$) при любом $n\geq 1$ конечно.

Обозначим через $\{N\}$ множество тех индексов n, для которых $p_n=s_n$.

Из определения (2.10) функций $\Omega_k(z)$ следует, что

$$\Omega_n(z)=\frac{a_0(\lambda_n)}{(p_n-1)!}\,\frac{B_{\alpha,\vartheta}(z)}{z-\lambda_n},\quad n\in\{N\},$$

причем

$$|a_0(\lambda_n)|=\left\{\left|\frac{2\operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda_n)^\alpha}{\alpha|\lambda|^{\alpha-1}}\right|^{p_n}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_n}}^{\infty}\left|\frac{(e^{-i\vartheta}\lambda_n)^\alpha-(e^{-i\vartheta}\lambda_j)^\alpha}{(e^{-i\vartheta}\lambda_n)^\alpha+\overline{(e^{-i\vartheta}\lambda_j)^\alpha}}\right|\right\}\right\}^{-1} \tag{3.8}$$

Имеем также

$$r_n(z)=\frac{(p_n-1)!}{(z-\lambda_n)^{p_n}},\quad n\in\{N\}.$$

Учитывая, что $|B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)|=1$ почти всюду на $\partial\Delta(\alpha;\vartheta)$ и применяя неравенство Гельдера, можем написать

$$|a_0(\lambda_n)|\int\limits_{\partial\Delta(\alpha,\vartheta)}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-\lambda_n|^{p_n+1}}=\int\limits_{\partial\Delta(\alpha,\vartheta)}|r_n(\zeta)|\zeta|^{\frac{\alpha}{p}}\Omega_n(\zeta)|\zeta|^{-\frac{\alpha}{p}}||d\zeta|\leq$$

$$\leq\|r_n\|_{p,\alpha}\|\Omega_n\|_{q,\alpha},\quad n\in\{N\}.$$

Отсюда, воспользовавшись леммой 9, в силу (3.7) и (3.8) будем иметь

$$\frac{1}{3}\left(\frac{8\sqrt{2}}{3\pi}\right)^{p_n}\leq C\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_n}}^{\infty}\left|\frac{(e^{-i\vartheta}\lambda_n)^\alpha-(e^{-i\vartheta}\lambda_j)^\alpha}{(e^{-i\vartheta}\lambda_n)^\alpha+\overline{(e^{-i\vartheta}\lambda_j)^\alpha}}\right|\right\},\quad n\in\{N\}. \tag{3.9}$$

Так как $(8\sqrt{2})/(3\pi)>1$, а выражение справа в (3.9) не превосходит C, то из (3.9) получаем

$$\inf_{n\in\{N\}}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_n}}^{\infty}\left|\frac{(e^{-i\vartheta}\lambda_n)^\alpha-(e^{-i\vartheta}\lambda_j)^\alpha}{(e^{-i\vartheta}\lambda_n)^\alpha+\overline{(e^{-i\vartheta}\lambda_j)^\alpha}}\right|\right\}>0,\quad \sup_{n\in\{N\}}\{p_n\}<+\infty.$$

Отсюда следует (3.3) и лемма доказана.

Лемма 11. *Пусть ряд* (3.4) *сходится. Если система* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *при какой-либо перестановке членов является базисом замыкания в метрике* $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)]$ *своей линейной оболочки, то* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in U(S\Delta(\alpha;\vartheta))$.

Доказательство. Напомним, что при условии сходимости ряда (3.4) система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ определена. При том же условии замыкание в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\vartheta)]$ линейной оболочки системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ совпадает с пространством $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta^*(\alpha;\vartheta)\}$ (см. теорему 7).

Если система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ при какой-либо перестановке членов является базисом пространства $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta^*(\alpha;\vartheta)\}$, то в силу леммы 7 и (3.2) имеет место (3.7). Остается воспользоваться леммой 10.

Аналогично доказывается

Лемма 12. *Пусть ряд* (3.4) *сходится. Если система* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *при какой-либо перестановке членов является базисом замыкания в метрике* $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ *своей линейной оболочки то* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha;\vartheta))$.

б) Следующее утверждение играет существенную роль при установлении достаточных условий базисности систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$.

Теорема 10. *Пусть* $\{z_k\}_1^\infty$ — *последовательность попарно различных точек из* $\Delta(\alpha;\vartheta)$, *удовлетворяющая условию*

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{(e^{-i\vartheta}z_k)^\alpha-(e^{-i\vartheta}z_j)^\alpha}{(e^{-i\vartheta}z_k)^\alpha+\overline{(e^{-i\vartheta}z_j)^\alpha}}\right|\right\}>0. \tag{3.10}$$

Тогда для любой функции $f(z)\in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ *справедливы неравенства*

$$L_r[f]=\sum_{k=1}^{\infty}|z_k^{(r)}|^p|f^{(r-1)}(z_k)|^p\leqslant A_{p,\omega}^{(r)}\|f\|_{p,\omega}^p\quad (r=1,2,\cdots), \tag{3.11}$$

где $A_{p,\omega}^{(r)}\in(0,+\infty)$ *не зависит от* $f(z)$, *а*

$$z_k^{(r)}=\{|z_k|^{\omega+(1-\alpha)(2-p)}(|z_k|^{1-\alpha}\operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}z_k)^\alpha)^{p(r-1)+1}\}^{1/p}\quad (k=1,2,\cdots). \tag{3.5'}$$

Доказательство. Наряду с последовательностью $\{z_k\}_1^\infty$ рассмотрим новую последовательность $\{w_k\}_1^\infty$ из полуплоскости $\operatorname{Re} w>0$, где

$$w_k=(e^{-i\vartheta}z_k)^\alpha\quad (k=1,2,\cdots). \tag{3.12}$$

Тогда, как известно, [33], в силу (3.10) для любого $F(w)\in H_p$ будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{Re} w_k)^{p(r-1)+1}|F^{(r-1)}(w_k)|^p\leqslant A_p^{(r)}\|F\|_{H_p}^p\quad (r=1,2,\cdots), \tag{3.13}$$

где $A_p^{(r)}\in(0,+\infty)$ *не зависит от* $F(w)$.

Пусть теперь $f(z)\in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$. Положив

$$F(w)=f(e^{i\vartheta}w^{1/\alpha})\,w^{\gamma-1},\ \operatorname{Re} w>0,\ \gamma-1=\frac{1+\omega-\alpha}{p\alpha},\tag{3.14}$$

непосредственной проверкой убеждаемся, что $F(w)\in H_p^*$. Значит $F(w)\in H_p$ по теореме A, и для функции $F(w)$ (3.13) имеет место.

С другой стороны, применив индукцию по r $(r=1,2,\cdots)$, легко убедиться в справедливости тождества

$$w^{\frac{r-1}{\alpha}+\gamma-r}\left.\frac{d^{r-1}f(z)}{dr^{r-1}}\right|_{z=e^{i\vartheta}w^{\frac{1}{\alpha}}}=\sum_{\nu=0}^{r-1}A_\nu^{(\gamma;r)}w^{-\nu}\frac{d^{r-1-\nu}F(w)}{dw^{r-1-\nu}},\ \operatorname{Re} w>0,$$

где $A_\nu^{(\gamma;r)}$ $(0\leqslant\nu\leqslant r-1)$ не зависят от w и $f(z)$. Отсюда и из (3.12) получаем

$$|f^{(r-1)}(z_k)|^p\leqslant B_r|w_k|^{-p\left(\frac{r-1}{\alpha}+\gamma-r\right)}\left\{\sum_{\nu=0}^{r-1}|w_k|^{-\nu}|F^{(r-1-\nu)}(w_k)|\right\}^p\ (k\geqslant 1),$$

где $B_r\in(0,+\infty)$ не зависит от $k\geqslant 1$ и $f(z)$. Применив здесь неравенство

$$\left|\sum_{n=1}^{N}a_n\right|^p\leqslant N^{p/q}\sum_{n=1}^{N}|a_n|^p,\tag{3.15}$$

получим

$$|f^{(r-1)}(z_k)|^p\leqslant r^{p/q}B_r\sum_{\nu=0}^{r-1}|w_k|^{-p\left(\frac{r-1}{\alpha}+\gamma-r+\nu\right)}|F^{(r-1-\nu)}(w_k)|^p\quad(k\geqslant 1).$$

Следовательно

$$L_r[f]\leqslant r^{p/q}\,B_r\sum_{\nu=0}^{r-1}\sum_{k=1}^{\infty}|z_k^{(r)}|^p|w_k|^{-p\left(\frac{r-1}{\alpha}+\gamma-r+\nu\right)}|F^{(r-1-\nu)}(w_k)|^p.\tag{3.16}$$

С учетом (3.12), (3.5′) и равенства $\gamma-1=(1+\omega-\alpha)/(p\alpha)$, можем написать

$$|z_k^{(r)}|^p|w_k|^{-p\left(\frac{r-1}{\alpha}+\gamma-r+\nu\right)}=|w_k|^{-p\nu}(\operatorname{Re} w_k)^{pr-1}\leqslant(\operatorname{Re} w_k)^{p(r-\nu-1)+1}.$$

Воспользовавшись этим неравенством и (3.13), из (3.16) имеем

$$L_r[f]\leqslant r^{p/q}B_r\sum_{\nu=0}^{r-1}\sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{Re} w_k)^{p(r-\nu-1)+1}|F^{(r-\nu-1)}(w_k)|^p\leqslant$$

$$\leqslant r^{p/q}B_r\sum_{\nu=0}^{r-1}A_p^{(r-\nu)}\|F\|_{H_p}^p\quad(r=1,2,\cdots),$$

откуда, в силу равенства $\|F\|_{H_p}^p=\alpha\|f\|_{p,\omega}^p$, получаем (3.11). Теорема доказана.

Следствие. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty\in US(\Delta(\alpha;\vartheta))$, *то для любой функции* $f(z)\in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{(p,\omega)}|^p |f^{(s_k-1)}(\lambda_k)|^p \leqslant D_{p,\omega} \|f\|_{p,\omega}^p, \quad (3$$

где $\{\lambda_k^{(p,\omega)}\}_1^\infty$ *определяется из* (3.5), *а* $D_{p,\omega} \in (0, +\infty)$ *не зависит* $f(z)$.

Доказательство. Обозначим через $\{z_k\}_1^\infty$ последовательно попарно различных точек последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Так как $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha;\vartheta))$, то $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (3.10). Следовательно, для любого $f \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ имеет место (3.11).

Пусть для данного целого $j \geqslant 1$ число $q_j \geqslant 1$ означает кратнос появления числа z_j во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Очевидно, чт

$$\sup_{k\geqslant 1} \{q_k\} = \sup_{k\geqslant 1} \{p_k\} = P < +\infty.$$

Поэтому согласно (3.11) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{q_k} |z_k^{(r)}|^p |f^{(r-1)}(z_k)|^p \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{P} |z_k^{(r)}|^p |f^{(r-1)}(z_k)|^p =$$

$$= \sum_{r=1}^{P} L_r[f] \leqslant \left\{ \sum_{r=1}^{P} A_{p,\omega}^{(r)} \right\} \|f\|_{p,\omega}^p . \quad (3.1$$

Теперь для каждого целого $k \geqslant 1$ обозначим через $\{J_k\}$ множество т индексов j, для которых

$$\lambda_j = z_k \text{ при } j \in \{J_k\}.$$

Непосредственно видно, что

$$\{J_{k_1}\} \cap \{J_{k_2}\} = \varnothing \ (k_1 \neq k_2); \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \{J_k\} = \{j\}_1^\infty,$$

а также, что когда j пробегает множество $\{J_k\}$, соответствующая ему величина s_j однократно пробегает совокупность чисел $\{1, 2, \cdots, q_k$ Принимая во внимание эти замечания, а также определения (3.5) и (3.5′) последовательностей $\{\lambda_k^{(p,\omega)}\}_1^\infty$ и $\{z_k^{(r)}\}_1^\infty$, мы убеждаемся в справедливости равенств

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{(p,\omega)}|^p |f^{(s_k-1)}(\lambda_k)|^p = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j\in\{J_k\}} |\lambda_j^{(p,\omega)}|^p |f^{(s_j-1)}(\lambda_j)|^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j\in\{J_k\}} |z_k|^{\omega+(1-\alpha)(2-p)} (|z_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta} z_k)^\alpha)^{p(s_j-1)+1} |f^{(s_j-1)}(z_k)|^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{q_k} |z_k^{(r)}|^p |f^{(r-1)}(z_k)|^p.$$

Отсюда в силу (3.18) получаем (3.17).

(в) Сейчас нам понадобится следующая лемма об оценках коэффициентов разложения (2.7).

Лемма 13. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha;\ \vartheta))$, *то для коэффициентов разложения* (2.7) *справедливы оценки*

$$|a_\nu(\lambda_k)| \leqslant A\,\{|\lambda_k|^{1-\alpha}\,\mathrm{Re}\,(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha\}^{p_k-\nu} \qquad (0 \leqslant \nu \leqslant p_k-1,\ k \geqslant 1),$$

где $A \in (0,\ +\infty)$ *не зависит от* ν *и* k.

Эта лемма доказывается точно так же как лемма 1.6 из работы [16] или лемма 2.9 из работы [18].

Лемма 14. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha;\ \vartheta))$ *и последовательность* $\{\lambda_k^{(p,\ \omega)}\}_1^\infty$ *определяется из* (3.5), *то для любой функции* $F(\zeta) \in L_q^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta))$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k^{(p,\ \omega)}|^{-q} \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} F(\zeta)\,\Omega_k(\zeta)\,|\zeta|^\omega\,d\zeta\right|^q \leqslant C_{p,\,\omega}\|F\|_{q,\,\omega}^q, \tag{3.19}$$

где $C_{p,\,\omega} \in (0,\ +\infty)$ *не зависит от* $F(\zeta)$.

Доказательство. Положим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} \frac{F(\zeta)\,B_{\alpha,\,\vartheta}(\zeta)\,|\zeta|^\omega}{\zeta - z}\,d\zeta,\quad z \in \Delta(\alpha;\ \vartheta). \tag{3.20}$$

Так как $F(\zeta)\,B_{\alpha,\,\vartheta}(\zeta)\,|\zeta|^\omega \in L_q^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta))$, то по теореме 3 имеем $f(z) \in H_q^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$, причем

$$\|f\|_{q,\,\omega} \leqslant B_{q,\,\omega}\|F(\zeta)\,B_{\alpha,\,\vartheta}(\zeta)\,|\zeta|^\omega\|_{q,\,\omega} = B_{q,\,\omega}\|F\|_{q,\,\omega}, \tag{3.21}$$

где $B_{q,\,\omega} \in (0,\ +\infty)$ не зависит от $F(\zeta)$.

Принимая во внимание определения (2.10) и (3.20) функций $\Omega_k(z)$ и $f(z)$, можем написать

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} F(\zeta)\,\Omega_k(\zeta)\,|\zeta|^\omega\,d\zeta = \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \frac{a_\nu(\lambda_k)}{(s_k-1)!\,(p_k-s_k-\nu)!}\,f^{(p_k-s_k-\nu)}(\lambda_k).$$

Применив здесь неравенство (3.15) (заменив p на q) получим

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} F(\zeta)\,\Omega_k(\zeta)\,|\zeta|^\omega\,d\zeta\right|^q \leqslant (p_k-s_k)^{q/p}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\lambda_k)|^q\,|f^{(p_k-s_k-\nu)}(\lambda_k)|^q. \tag{3.22}$$

Так как в силу услония $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha;\ \vartheta))$ должно быть

$$\sup_{k \geqslant 1}\{p_k\} = P < +\infty, \tag{3.23}$$

то из (3.22), воспользовавшись леммой 13, получим

$$|\lambda_k^{(p,\ \omega)}|^{-q}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} F(\zeta)\,\Omega_k(\zeta)\,|\zeta|^\omega\,d\zeta\right|^q \leqslant$$

$$\leqslant P^{q/p} A^q \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} [\lambda_k^{(p,\,\omega)}]^{-q} \{|\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha\}^{q(p_k-\nu)} |f^{(p_k-s_k-\nu)}(\lambda_k)|^q =$$

$$= P^{q/p} A^q \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |\lambda_k|^{\bar\omega+(1-\alpha)(2-q)} \{|\lambda_k|^{-1\alpha} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha\}^{q(p_k-s_k-\nu)+1} \times$$
$$\times |f^{(p_k-s_k-\nu)}(\lambda_k)|^q$$

(для получения последнего равенства мы воспользовались определением (3.5) последовательности $\{\lambda_k^{(p,\,\omega)}\}_1^\infty$ и (2.2)). Произведя здесь замену переменной $p_k - s_k - \nu + 1 = r$ и учитывая (3.23), можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k^{(p,\,\omega)}]^{-q} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)} F(\zeta)\,\Omega_k(\zeta)\,|\zeta|^\omega\, d\zeta \right|^q \leqslant$$

$$\leqslant P^{q/p} A^q \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{p_k-s_k+1} |\lambda_k|^{\bar\omega+(1-\alpha)(2-q)} \{|\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha\}^{q(r-1)+1} |f^{(r-1)}(\lambda_k)|^q \leqslant$$

$$\leqslant P^{q/p} A^q \sum_{r=1}^{P} \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{\bar\omega+(1-\alpha)(2-q)} \{|\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha\}^{q(r-1)+1} |f^{(r-1)}(\lambda_k)|^q. \quad (3.24)$$

Теперь обозначим через $\{z_k\}_1^\infty$ последовательность попарно различных точек последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$, а через $\{J_k\}$ обозначим множество тех индексов $j \geqslant 1$, для которых

$$\lambda_j = z_k \text{ при } j \in \{J_k\}.$$

Непосредственно видно, что

$$\{J_{k_1}\} \cap \{J_{k_2}\} = \varnothing \ (k_1 \neq k_2); \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} \{J_k\} = \{j\}_1^\infty.$$

Учитывая эти замечания и (3.23), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|^{\bar\omega+(1-\alpha)(2-q)} \{|\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda_k)^\alpha\}^{q(r-1)+1} |f^{(r-1)}(\lambda_k)|^q =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j\in\{J_k\}} |\lambda_j|^{\bar\omega+(1-\alpha)(2-q)} \{|\lambda_j|^{1-\alpha} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda_j)^\alpha\}^{q(r-1)+1} |f^{(r-1)}(\lambda_j)|^q \leqslant$$

$$\leqslant P \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{\bar\omega+(1-\alpha)(2-q)} \{|z_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta} z_k)^\alpha\}^{q(r-1)+1} |f^{(r-1)}(z_k)|^q \quad (1 \leqslant r \leqslant P).$$

Отсюда и из (3.24) получаем неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k^{(p,\,\omega)}]^{-q} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)} F(\zeta)\,\Omega_k(\zeta)\,|\zeta|^\omega\, d\zeta \right|^q \leqslant$$

$$\leqslant (PA)^q \sum_{r=1}^{P} \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{\bar\omega+(1-\alpha)(2-q)} \{|z_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta} z_k)^\alpha\}^{q(r-1)+1} |f^{(r-1)}(z_k)|^q. \quad (3.25)$$

Но поскольку $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha;\ \vartheta))$, то последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (3.10). С другой стороны, $f(z) \in H_q^{(\tilde{\omega})}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$. Следовательно, воспользовавшись теоремой 10 (предварительно заменив p на q и ω на $\tilde{\omega}$), из (3.25) и (3.21) получим (3.19). Лемма доказана.

Пусть последовательность $\lambda_{(q,\ \tilde{\omega})} = \{\lambda_k^{(q,\ \tilde{\omega})}\}_1^\infty$ определяется из (3.5), т. е.

$$\lambda_k^{(q,\ \tilde{\omega})} = \left\{|\lambda_k|^{\tilde{\omega}+(1-\alpha)(2-q)} \left(|\lambda_k|^{1-\alpha} \operatorname{Re}(e^{-i\vartheta}\lambda_k)\right)^{\alpha} \right\}^{q(s_k-1)+1} \Big\}^{1/q} \quad (k \geqslant 1). \quad (3.26)$$

Лемма 15. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha,\ \vartheta))$, *то для любой функции* $F(\zeta) \in L_q^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta))$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} [\lambda_k^{(q,\ \tilde{\omega})}]^q \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} F(\zeta)\, r_k(\zeta) |\zeta|^{\omega}\, d\zeta \right|^q \leqslant C_{q,\ \omega} \|F\|_{q,\ \omega}^q, \quad (3.27)$$

где $C_{q,\ \omega} \in (0,\ +\infty)$ *не зависит от* $F(\zeta)$.

Доказательство. Положим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} \frac{F(\zeta)|\zeta|^{\omega}\, d\zeta}{\zeta - z},\quad z \in \Delta(\alpha;\ \vartheta). \quad (3.28)$$

Так как $F(\zeta)|\zeta|^{\omega} \in L_q^{(\tilde{\omega})}(\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta))$, то по теореме 3 имеем $f(z) \in H_q^{(\tilde{\omega})}\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$, причем

$$\|f\|_{q,\ \tilde{\omega}} \leqslant B_{q,\ \tilde{\omega}} \|F(\zeta)|\zeta|^{\omega}\|_{q,\ \tilde{\omega}} = B_{q,\ \tilde{\omega}} \|F\|_{q,\ \omega}. \quad (3.29)$$

Принимая во внимание определения (2.3) и (3.28) функций $r_k(z)$ и $f(z)$, можем написать

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} F(\zeta)\, r_k(\zeta)|\zeta|^{\omega}\, d\zeta = f^{(s_k-1)}(\lambda_k) \quad (k \geqslant 1).$$

Следовательно, чтобы получить (3.27) остается воспользоваться следствием из теоремы 10 (предварительно заменив p на q и ω на $\tilde{\omega}$) и неравенством (3.29). Лемма доказана.

Лемма 16. *Пусть ряд* (3.4) *сходится. Если* $f(z) \in H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$ *и*

$$\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} f(\zeta)\, \Omega_k(\zeta)\, d\zeta = 0 \quad (k = 1,\ 2, \cdots), \quad (3.30)$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что при любом $k \geqslant 1$ функция $B_{\alpha,\ \vartheta}(z)(z-\lambda_k)^{-s_k}$ принадлежит классу $\tilde{H}_q^{(\tilde{\omega})}\{\lambda_k;\ \Delta(\alpha;\ \vartheta)\}$. Следовательно, воспользовавшись теоремой 9 (заменив в ней p на q и ω на $\tilde{\omega}$), можем утверждать, что существует последовательность $\{P_n(z)\}_1^\infty$ линейных комбинаций финкций системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, сходящаяся в метрике $H_q^{(\tilde{\omega})}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$ к $B_{\alpha,\ \vartheta}(z)(z-\lambda_k)^{-s_k}$. Но в силу (3.30) имеем

$$\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)} f(\zeta)\,P_n(\zeta)\,d\zeta = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Устремив здесь $n \to +\infty$, получим

$$\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)} \frac{f(\zeta)\,B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)}{(\zeta-\lambda_k)^{s_k}}\,d\zeta = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3.31}$$

Теперь заметим, что из определений классов $H_p^{(\omega)}[\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ и $\tilde{H}_p^{(\omega)}[\lambda_k;\ \Delta(\alpha;\ \vartheta)]$ следует, что если $f(z)\in H_p^{(\omega)}[\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$, то $F(\zeta) = B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)\,f(\zeta)$, $\zeta\in\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)$, является граничной функцией некоторой функции $F(z)\in\tilde{H}_p^{(\omega)}[\lambda_k;\ \Delta(\alpha;\ \vartheta)]$. Для этой функции из (3.31) получаем

$$F^{(s_k-1)}(\lambda_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Отсюда и из леммы 5 получаем $F(z)\equiv 0$, откуда заключаем, что $f(z)\equiv 0$. Лемма доказана.

3.3. Пусть $\{\lambda_k^{(q,\,\tilde{\omega})}\}_1^\infty$ определяется из (3.26). Тогда имеет место

Т е о р е м а 11. *Справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty\in US(\Delta(\alpha;\ \vartheta))$, *то система* $\{\lambda_k^{(q,\,\tilde{\omega})}\,r_k(z)\}_1^\infty$ *является базисом пространства* $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$, *изоморфным стандартному базису пространства* l_p.

2°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty\,\overline{\in}\,US(\Delta(\alpha;\ \vartheta))$, *то система* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *ни при какой перестановке членов не является базисом замыкания в метрике* $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ *своей линейной оболочки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Пусть $f(z)$ — произвольная функция из класса $H_p^{(\omega)}[\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$. Определим последовательность $\gamma(f)\equiv\equiv\{\gamma_k(f)\}_1^\infty$ следующим образом:

$$\gamma_k(f) = [\lambda_k^{(q,\,\tilde{\omega})}]^{-1}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)} f(\zeta)\,\Omega_k(\zeta)\,d\zeta \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3.32}$$

Заметим, что $f(\zeta)\,|\zeta|^{\tilde{\omega}}\in L_p^{(\tilde{\omega})}(\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta))$. Следовательно, воспользовавшись леммой 14 (предварительно заменив в ней p на q, ω на $\tilde{\omega}$ и q на p), можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k(f)|^p = \sum_{k=1}^{\infty}[\lambda_k^{(q,\,\tilde{\omega})}]^{-p}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\,\vartheta)}\{f(\zeta)\,|\zeta|^{-\tilde{\omega}}\}\,\Omega_k(\zeta)\,|\zeta|^{\tilde{\omega}}\,d\zeta\right|^p \leqslant$$

$$\leqslant C_{p,\omega}\,\|f(\zeta)\,|\zeta|^{-\tilde{\omega}}\|_{p,\tilde{\omega}}^p = C_{p,\omega}\,\|f\|_{p,\omega}^p, \tag{3.33}$$

где $C_{p,\omega}\in(0,\ +\infty)$ не зависит от $f(\zeta)$.

Определим теперь оператор $T_{p,\omega}$ следующим образом:

$$T_{p,\omega}[f] = \gamma(f), \quad f\in H_p^{(\omega)}[\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)].$$

Из (3.33) следует, что $T_{p,\varpi}$ — ограниченный линейный оператор, отображающий $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$ в l_p. При этом, в силу леммы 16, оператор $T_{p,\varpi}$ переводит разные элементы из $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$ в разные элементы пространства l_p. С другой стороны, в силу теоремы 8

$$T_{p,\varpi}[\lambda_k^{(q,\tilde\omega)} r_k] = \{\delta_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}\ (k=1,\ 2,\cdots),$$

где $\delta_{k,n}$ — символ Кронекера.

Таким образом, чтобы завершить доказательство утверждения 1° теоремы, нам нужно показать, что $T_{p,\varpi}$ отображает $H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$ на все пространство l_p.

Пусть $\gamma\equiv\{\gamma_k\}_1^{\infty}\in l_p$. В силу теоремы Хана—Банаха

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+m}\gamma_k\lambda_k^{(q,\tilde\omega)} r_k\right\|_{p,\omega} = \sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} F(\zeta)\sum_{k=n}^{n+m}\gamma_k\lambda_k^{(q,\tilde\omega)} r_k(\zeta)\,|\zeta|^{\omega}d\zeta\right|\right\}, \qquad (3.34)$$

где верхняя грань берется по всем $F(\zeta)\in L_*^{(\tilde\omega)}(\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta))$ с нормой $\|F\|_{q,\tilde\omega}\leqslant 2\pi$. Однако в силу неравенства Гельдера и леммы 15 можем написать:

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} F(\zeta)\sum_{k=n}^{n+m}\gamma_k\lambda_k^{(q,\tilde\omega)} r_k(\zeta)\,|\zeta|^{\omega}d\zeta\right| =$$

$$=\left|\sum_{k=n}^{n+m}\gamma_k\left\{\lambda_k^{(q,\tilde\omega)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} F(\zeta)\,r_k(\zeta)\,|\zeta|^{\omega}d\zeta\right\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{k=n}^{n+m}|\gamma_k|^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_{k=n}^{n+m}[\lambda_k^{(q,\tilde\omega)}]^q\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\ \vartheta)} F(\zeta)\,r_k(\zeta)\,|\zeta|^{\omega}d\zeta\right|^q\right\}^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{k=n}^{n+m}|\gamma_k|^p\right\}^{1/p} C_{q,\tilde\omega}\|F\|_{q,\tilde\omega}.$$

Отсюда и из (3.34) получаем

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+m}\gamma_k\lambda_k^{(q,\tilde\omega)} r_k\right\|_{p,\omega}\leqslant 2\pi\, C_{q,\tilde\omega}\left\{\sum_{k=n}^{n+m}|\gamma_k|^p\right\}^{1/p}\qquad (n,\ m=1,\ 2,\cdots).$$

Следовательно, ряд

$$f_\gamma(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\lambda_k^{(q,\tilde\omega)} r_k(z)$$

сходится в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ и определяет некоторую функцию $f_\gamma(z)\in H_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta^*(\alpha;\ \vartheta)\}$ (см. теоремы 2 и 7), а в силу теоремы 8 $T_{p,\varpi}[f_\gamma]=\gamma\equiv\{\gamma_k\}_1^{\infty}$. Утверждение 1° доказано.

2°. Если ряд (3.4) расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ не минимальна в $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ и, следовательно, ни при какой перестановке членов не является базисом.

Если же ряд (3.4) сходится, то надо воспользоваться леммой 11. Теорема доказана.

Отметим, что утверждения этой теоремы в случае $p=2$ были установлены в работе автора [20], а в случае $\alpha=1$, $\omega=0$ — в работе М. М. Джрбашяна [17] (см. также [18]).

Установим теперь критерий базисности системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$. Напомним, что эта система определена лишь при условии сходимости ряда (3.4). При этом замыкание в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ её линейчой оболочки совпадает с пространством $\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; [\Delta(\alpha;\vartheta)\}$ (см. теорему 9).

Если $\{\lambda_k^{(p,\omega)}\}_1^\infty$ определяется из (3.5), то имеет место

Теорема 12. *Пусть ряд* (3.4) *сходится. Справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty\in US(\Delta(\alpha,\vartheta))$, *то система* $\{(\lambda_k^{(p,\omega)})^{-1}\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *является базисом пространства* $\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta(\alpha;\vartheta)\}$, *изоморфным стандартному базису пространства* l_p.

2°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty\overline{\in}US(\Delta(\alpha;\vartheta))$, *то система* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *ни при какой перестановке членов не является базисом пространства*

$$\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta(\alpha;\vartheta)\}.$$

Доказательство. 1°. Пусть $f(z)\in\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta(\alpha;\vartheta)\}$. Определим последовательность $\gamma(f)\equiv\{\gamma_k(f)\}_1^\infty$ следующим образом:

$$\gamma_k(f)=\lambda_k^{(p,\omega)}f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\quad(k=1,2,\cdots).$$

Нетрудно видеть, что

$$\gamma_k(f)=\lambda_k^{(p,\omega)}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\vartheta)}\{f(\zeta)|\zeta|^{-\tilde{\omega}}\}\,r_k(\zeta)|\zeta|^{\tilde{\omega}}\,d\zeta\quad(k=1,2,\cdots),$$

причем $f(\zeta)|\zeta|^{-\tilde{\omega}}\in L_p^{(\tilde{\omega})}(\partial\Delta(\alpha;\vartheta))$. Следовательно, воспользовавшись леммой 15 (предварительно заменив в ней q на p и ω на $\tilde{\omega}$), можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\gamma_k(f)|^p\leqslant C_{p,\tilde{\omega}}\|f(\zeta)|\zeta|^{-\tilde{\omega}}\|_{p,\tilde{\omega}}^p=C_{p,\tilde{\omega}}\|f\|_{p,\omega}^p,\tag{3.35}$$

где $C_{p,\tilde{\omega}}\in(0,+\infty)$ не зависит от $f(\zeta)$.

Определим теперь оператор $Q_{p,\omega}$ следующим образом:

$$Q_{p,\omega}[f]=\gamma(f),\ f\in\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta(\alpha;\vartheta)\}.$$

Из (3.35) следует, что $Q_{p,\omega}$ — ограниченный линейный оператор, отображающий $\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta(\alpha;\vartheta)\}$ в l_p. При этом, в силу леммы 5, оператор $Q_{p,\omega}$ переводит разные элементы из $\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\Delta(\alpha;\vartheta)\}$ в разные элементы пространства l_p. С другой стороны, в силу леммы 4

$$Q_{p,\omega}[(\lambda_k^{(p,\omega)})^{-1}\Omega_k] = \{\delta_{k,n}\}_{n=1}^{\infty} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Таким образом, чтобы завершить доказательство утверждения 1° теоремы, нам нужно показать, что $Q_{p,\omega}$ отображает $\tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)\}$ на все пространство l_p.

Пусть $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^{\infty} \in l_p$. В силу теоремы Хана-Банаха

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+m}\gamma_k(\lambda_k^{(p,\omega)})^{-1}\Omega_k\right\|_{p,\omega} = \sup\left\{\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\vartheta)} F(\zeta)\sum_{k=n}^{n+m}\gamma_k(\lambda_k^{(p,\omega)})^{-1}\Omega_k(\zeta)|\zeta|^{\omega}\,d\zeta\right|\right\},$$

(3.36)

где верхняя грань берется по всем $F(\zeta) \in L_q^{(\omega)}(\partial\Delta(\alpha;\vartheta))$ с нормой $\|F\|_{q,\omega} \leqslant 2\pi$. Однако, в силу неравенства Гельдера и леммы 14, можем написать

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m}\gamma_k\left\{(\lambda_k^{(p,\omega)})^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\vartheta)}F(\zeta)\Omega_k(\zeta)|\zeta|^{\omega}\,d\zeta\right|\leqslant\right.$$

$$\leqslant\left\{\sum_{k=n}^{n+m}|\gamma_k|^p\right\}^{1/p}\left\{\sum_{k=n}^{n+m}(\lambda_k^{(p,\omega)})^{-q}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha;\vartheta)}F(\zeta)\Omega_k(\zeta)|\zeta|^{\omega}\,d\zeta\right|^q\right\}^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\sum_{k=n}^{n+m}|\gamma_k|^p\right\}^{1/p}C_{p,\omega}\|F\|_{q,\omega} \quad (n,\ m = 1, 2, \cdots).$$

Отсюда и из (3.36) получаем

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+m}\gamma_k(\lambda_k^{(p,\omega)})^{-1}\Omega_k\right\|_{p,\omega} \leqslant 2\pi C_{p,\omega}\left\{\sum_{k=n}^{n+m}|\gamma_k|^p\right\}^{1/p} \quad (n,\ m = 1, 2, \cdots).$$

Следовательно, ряд

$$f_\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(\lambda_k^{(p,\omega)})^{-1}\Omega_k(z)$$

сходится в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ и определяет некоторую функцию $f_\gamma(z) \in \tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha;\vartheta)\}$ (см. теоремы 2 и 9), а в силу леммы 4 $Q_{p,\omega}[f_\gamma] = \gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^{\infty}$. Утверждение 1° доказано.

Утверждение 2° следует из леммы 12. Теорема доказана.

Воспользовавшись леммами 4 и 6, из теоремы 12 получаем следующее

Следствие. *Если* $\{\lambda_k\}_1^{\infty} \in US(\Delta(\alpha;\vartheta))$, *то для любой функции* $f(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$ *справедливо представление вида*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\lambda_k)\Omega_k(z) + \frac{B_{\alpha,\vartheta}(z)}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\alpha,\vartheta)}\frac{f(\zeta)}{B_{\alpha,\vartheta}(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta - z},\quad z\in\Delta(\alpha;\vartheta),$$

где ряд сходится по метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\vartheta)]$.

Отметим, что в случае $p=2$ утверждения теоремы 12 были установлены в работе автора [20], а в случае $\alpha=1$, $\omega=0$ — в работе М. М. Джрбашяна [17] (см. также [18]).

3.4. Пусть J — банахово пространство комплексных последовательностей, в которой плотны финитные последовательности. Скажем, что J — идеальное пространство последовательностей, если из условий $\{a_k\}_1^\infty \in J$, $|b_k| \leqslant |a_k|$ $(k=1, 2, \cdots)$ следует $\{b_k\}_1^\infty \in J$.

Кратная интерполяционная задача в классе $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ состоит в нахождении условий, при которых пространство последовательностей

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]\} \tag{3.37}$$

совпадает с каким-либо идеальным пространством последовательностей.

В следующей теореме содержится полное решение этой задачи.

Теорема 13. 1°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha; \vartheta))$, *то справедливы следующие утверждения:*

а) *если последовательность* $\lambda_{p,\omega} \equiv \{\lambda_k^{(p,\omega)}\}_1^\infty$ *определяется из* (3.5), *то справедливы равенства*

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f(z) \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]\} =$$

$$= \{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f(z) \in \tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)\}\} = l_p\{\lambda_{(p,\omega)}\}; \tag{3.38}$$

б) *если* $\gamma \equiv \{\gamma_k\}_1^\infty \in l_p\{\lambda_{(p,\omega)}\}$, *то ряд*

$$f(z) = \sum_{k=1}^\infty \gamma_k \Omega_k(z) \tag{3.39}$$

сходится в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]$ *и определяет функцию* $f(z) \in \tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)\}$, *которая удовлетворяет следующим интерполяционным данным:*

$$f^{(s_k-1)}(\lambda_k) = \gamma_k \quad (k=1, 2, \cdots); \tag{3.40}$$

в) *функция из класса* $\tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)\}$, *удовлетворяющая интерполяционным данным* (3.40), *единственна.*

2°. *Если* $\{\lambda_k\}_1^\infty \overline{\in} US(\Delta(\alpha; \vartheta))$, *то пространство* (3.37) *не совпадает ни с каким идеальным пространством последовательностей.*

Доказательство. 1°. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty \in US(\Delta(\alpha; \vartheta))$. В силу следствия из теоремы 10 имеем

$$\{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f \in \tilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k; \Delta(\alpha; \vartheta)\}\} \subset$$

$$\subset \{(f^{(s_k-1)}(\lambda_k))_{k=1}^\infty : f \in H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha; \vartheta)]\} \subset l_p\{\lambda_{(p,\omega)}\}.$$

Следовательно, равенства (3.38) будут доказаны, если мы докажем утверждение б).

Пусть $\gamma = \{\gamma_k\}_1^\infty \in l_p\{\lambda_{(p,\omega)}\}$. Тогда последовательность $\{\lambda_k^{(p,\omega)}\gamma_k\}_1^\infty$ принадлежит l_p. Следовательно, в силу утверждения 1° теоремы 12 ряд (3.39) сходится по метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta(\alpha;\ \vartheta)]$, и по теореме 9 сумма этого ряда принадлежит классу $\widetilde{H}_p^{(\omega)}\{\lambda_k;\ \Delta(\alpha;\ \vartheta)\}$. Равенства (3.40) вытекают из леммы 4.

Наконец, утверждение в) является следствием леммы 5, и утверждение 1° доказано.

2°. Пусть теперь $\{\lambda_k\}_1^\infty \overline{\in} US(\Delta(\alpha;\ \vartheta))$. Предположим, что пространство последовательностей (3.37) совпадает с каким-либо идеальным пространством последовательностей J. Но легко видеть, что пространство последовательностей (3.37) совпадает с пространством

$$\{(\Phi[r_k])_1^\infty : \Phi \in (H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)])^*\}, \tag{3.41}$$

где $(H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)])^*$ — это сопряженное пространство пространства $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ (нужно только воспользоваться теоремами 1 и 4 и определением (2.3) функций $r_k(z)$). Но тогда пространство последовательностей (3.41) также совпадает с J. Следовательно, система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ является безусловным базисом замыкания в метрике $H_p^{(\omega)}[\Delta^*(\alpha;\ \vartheta)]$ своей линейной оболочки (см. [34], стр. 27), а это противоречит утверждению 2° теоремы 11. Теорема доказана.

Так как при любом $s\,(1 \leqslant s < +\infty)$ пространство $l_s\{\varkappa\}$ является идеальным, то из утверждения 2° теоремы 13, в частности, следует, что:

Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \overline{\in} US(\Delta(\alpha;\ \vartheta))$, *то пространство последовательностей* (3.37) *не совпадает ни с каким пространством* $l_s\{\varkappa\}$ $(1 \leqslant s < +\infty)$.

Отметим, что в случае $p = 2$ утверждение 1° теоремы 13 было установлено в работе автора [20], а в случае $\alpha = 1$, $\omega = 0$ — в работе М. М. Джрбашяна [17] (см. также [18]).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 28.VII 1978

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Որոշ բիօրթոգոնալ սիստեմների փակույթը և բազիսությունը և բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումը անկյունային տիրույթներում (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկված են որոշ բիօրթոգոնալ սիստեմների լրիվության, փակույթի նկարագրության ու բազիսության հարցերը։ Դիտարկումները կատարված են անկյունային տիրույթներում H_p տիպի տարածություններում։ Լուծված է նաև բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդիրը այդ տարածություններում։

V. M. MARTIROSIAN. *Closure and basesness of some biorthogonal systems and solution of the multiple interpolation problem in angular domains* (sumary)

The questions of completeness closure description and basisness for some biorthogonal systems are investigated. This problems are considered in spaces of H_p type in angular domains. A solution of the multiple interpolation problem in such spaces is also given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы функций и представления ядра Коши. Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 1, 1973, 384—409.
2. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси. Матем. сб., 95 (137), № 3 (11), 1974, 418—444.
3. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян.* О построении некоторых специальных биортогональных систем, Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-матем. наук, XII, № 5, 1959, 17—42.
4. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян.* Разложения по некоторым биортогональным системам и краевые задачи для дифференциального уравнения дробного порядка, Труды ММО, X, 1961, 89—179.
5. *А. Б. Нерсесян.* Разложения по собственным функциям некоторых несамосопряженных краевых задач, Сиб. матем. ж., 11, № 3, 1961, 428—453.
6. *А. Б. Нерсесян.* Разложения по собственным функциям краевой задачи для одного интегро-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом, Изв. АН Арм.ССР, серия физ-матем. наук, XII, № 6, 1959, 37—68.
7. *М. М. Джрбашян.* Краевая задача для дифференциального оператора дробного порядка типа Штурма-Лиувилля, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., V, № 2, 1970, 71—95.
8. *М. М. Джрбашян.* О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{i\lambda_k x}x^{s_k-1}\}_1^\infty$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
9. *S. Verblunski.* On some biorthogonal systems, II, Quart. J. Math., 16, 1965, 1—8.
10. *S. Verblunski.* On a class of integral operators, II, Proc. London Math. Soc., XVI, № 3, 1966, 456—472.
11. *S. Verblunski.* On a class of biorthogonal expansions, II, Proc. London Math. Soc., XXV, № 1, 1972, 1—25.
12. *А. Ф. Леонтьев.* Представление функций обобщенными рядами Дирихле, УМН, XXIV, вып. 2 (146), 1969, 97—164.
13. *А. Ф. Леонтьев.* Ряды экспонент, «Наука», М., 1976.
14. *М. М. Джрбашян.* Примыкание и единственность рядов типа Дирихле на вещественной оси, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VII, № 4, 1972, 258—274.
15. *М. М. Джрбашян.* Теоремы единственности аналитических функций, асимптотически представимых рядами Дирихле—Тейлора, Матем. сб., 91 (133), № 4 (8), 1973, 580—626.
16. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974, 339—373.
17. *М. М. Джрбашян.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классе H^p_+, ДАН СССР, 234, № 3, 1977, 517—520.
18. *М. М. Джрбашян.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H^p в полуплоскости, Изв. АН СССР, сер. матем., 43, № 6, 1978, 1322—1384.
19. *Г. М. Айрапетян.* Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогональных систем рациональных функций в классах H_p Харди, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XII, № 4, 1977, 262—277.
20. *В. М. Мартиросян.* Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм.ССР, 63, № 5, 1976, 278—283.
21. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
22. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.

23. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
24. *А. М. Седлецкий.* Эквивалентное определение пространств H_p в полуплоскости и некоторые приложения, Матем. сб., 96 (138), № 1, 1975, 75—82.
25. *С. А. Акопян.* Теорема о двух постоянных для функций класса H_p. Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., II, № 2, 1967, 123—127.
26. *Е. Титчмарш.* Введение в теорию интеграла Фурье, Гостехиздат, 1948.
27. *E. M. Stein.* Note on singular integrals, Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1957, 250—254.
28. *Г. М. Голузин.* Геометрическая теория функций комплексного переменного, «Наука», М., 1966.
29. *М. М. Джрбашян.* О замкнутости системы типа Миттаг—Леффлера, ДАН СССР, 219, № 6, 1974, 1302—1305.
30. *В. М. Мартиросян.* О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера и систем простейших рациональных дробей, ДАН Арм.ССР, 62, № 5, 1976, 269—274.
31. *С. А. Акопян, И. О. Хачатрян.* О замыкании незамкнутых систем функций типа Миттаг—Леффлера, Изв. АН СССР, сер. матем., 40, № 1, 1976, 96—114.
32. *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев.* Элементы функционального анализа, «Наука», М., 1965.
33. *Ш. А. Григорян.* Об одном свойстве функций из H^p $(0 < p < +\infty)$ в полуплоскости, Изв. АН Арм.ССР, XII, № 5, 1977, 335—340.
34. *С. А. Виноградов.* Базисы из показательных функций и свободная интерполяция в банаховых пространствах с L_p-нормой, Записки научн. семинаров ЛОМИ, том 65, вып. VII, 1976, 17—68.