Շ. Ա. ԳՐԻԳՐՅԱՆ

Օ ԲԱԶԻՏՈՒԹՅԱՆ ՈՒՍՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՌԱԿԻՈՆԱԼՆԵՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻՆ ԵՄ ԿՈՆՅԱՆԿԱԿԱՆ ՄԱՐԿԵՆԻ ՄԱՍԻՆ

1°. Երկրորդում Մ. Մ. Ժրբաշյանի [1] աշխատանքում կառուցված էր ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգ, որը կոնյուգատիվ է շրջանագծի վրա $|z|=1$ ընդհանուր ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգի հետ

$$r_k(z) = \frac{(s_k - 1)! z^{s_k - 1}}{(1 - \bar{\alpha}_k z)^{s_k}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1)$$

որտեղ $\{\alpha_k\}_1^\infty$ ($|\alpha_k| < 1$) բավարարում է Բլաշկեի պայմանին, իսկ $s_k \geq 1$ — կրկնությունների թիվը α_k թվի վրա $|\alpha_k| < 1$ ընդհանուր հատվածի վրա։ Այսպիսով ցուցված էր, որ նույն եղանակով կարելի է կառուցել համակարգեր $\{r_k(w)\}_1^\infty$ և $\{Q_k(w)\}_1^\infty$, կոնյուգատիվները ընդհանուր հատվածի վրա [2]։ Այստեղ որպես համակարգ $\{r_k(w)\}_1^\infty$ ընտրվեցին ռացիոնալ ֆունկցիաների համակարգ

$$r_k(w) = \frac{(s_k - 1)!}{(w - \beta_k)^{s_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2)$$

որտեղ $\{\beta_k\}_1^\infty$, ($\text{Im } \beta_k > 0$) բավարարում է միայն պայմանին

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Im } \beta_k}{1 + |\beta_k|^2} < +\infty, \quad (3)$$

և $s_k \geq 1$ — կրկնությունների թիվը β_k թվի վրա $\text{Im } \beta_k > 0$ ընդհանուր հատվածի վրա։

Կոնյուգատիվ համակարգեր Մ. Մ. Ժրբաշյանի աշխատանքները թույլ տվեցին լուծել շարք խնդիրների անալիզի։ Այսպիսով, կոնյուգատիվ համակարգի $\{Q_k(z)\}_1^\infty$ ներդրումով համակարգի $\{Q_k(z)\}_1^\infty$ և նաև կոնյուգատիվ համակարգի (1) հետ, իր աշխատանքում [3] ստացվեցին լուծումներ ինտերպոլյացիոնային խնդրի համար սահմանափակ կրկնությունների դեպքում H_2 Խարդիի դասում։ Այսպիսով նույն աշխատանքում [4] ստացվեցին լուծումներ ինտերպոլյացիոնային խնդրի համար սահմանափակ կրկնությունների դեպքում H_p^+ ($1 < p < +\infty$) դասում կիսաշրջանի վրա $\text{Im } z > 0$ ։ Այստեղ հիմնական դեր ունեցան համակարգեր $\{r_k(w); Q_k(w)\}_1^\infty$, կոնյուգատիվները ընդհանուր հատվածի վրա։ Այստեղ նույն աշխատանքում [4] ստացվեցին կրիտերիներ համակարգերի $\{r_k(w)\}_1^\infty$ և $\{Q_k(w)\}_1^\infty$ համակարգերի համար H_p^+ ($1 < p < +\infty$) դասում կիսաշրջանի վրա $\text{Im } z > 0$ ։

Երկրորդ կողմից, համակարգեր $\{r_k(z)\}_1^\infty$ և $\{Q_k(z)\}_1^\infty$, կոնյուգատիվները շրջանագծի վրա $|z|=1$, ծառայեցին հիմնական դեր ունեցող լուծումներ ստացված խնդիրների համար այս համակարգերի համար H_p ($1 < p < +\infty$) Խարդիի դասում $|z| < 1$, իսկ

также интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классах H_p ($0 < p < +\infty$). Этим вопросам были посвящены работы Г. М. Айрапетяна [5], [6], [7].

В цитированной выше работе [1] с помощью системы (1) для любого ограниченного континуума K были построены также системы простейших рациональных дробей $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ с полюсами, лежащими на произвольной последовательности $\{\omega_k\}_1^\infty \subset K$. Наряду с системами $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ для любого n ($1 \leq n < +\infty$) была построена также система $\{p_{n,k}^{(s)}(z)\}_{k=1}^n$ аналитических вне континуума K функций. В случае, когда K — жорданова область со спрямляемой границей Γ , была доказана биортогональность этих двух систем на Γ .

Отметим, что система $\{m_k^{(s)}(z)\}_1^\infty$ представляет собой существенное обобщение классической системы полиномов Фабера и ее модификацией.

2. В настоящей статье мы используем предложенный в работе [1] метод для построения систем функций, биортогональных на границах бесконечных угловых областей, и устанавливаем критерий их базисности в определенных пространствах функций, аналитических в угловых областях.

Чтобы сформулировать основные результаты, приведем сначала несколько определений и обозначений.

Для произвольного p ($\frac{1}{2} < p < +\infty$) обозначим через

$$\Delta(p) = \left\{ z; |\arg z| < \frac{\pi}{2p}; 0 < |z| < +\infty \right\}$$

угловую область на конечной комплексной плоскости.

Пусть $\alpha = p/2p - 1$, тогда угловая область

$$\Delta(\alpha) = \left\{ z; |\arg(-z)| < \frac{\pi}{2\alpha}; 0 < |z| < +\infty \right\}$$

является дополнением к замыканию $\Delta(p)$; положим, далее, что L_p — обшая граница областей $\Delta(p)$ и $\Delta(\alpha)$.

Обозначим через $H^p[p]$ ($0 < p < +\infty$) пространство функций $f(z)$, аналитических в $\Delta(p)$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H^p[p]} \equiv \sup_{|\theta| < \frac{\pi}{2p}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\theta})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty.$$

Пусть, далее, последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ из $\Delta(\alpha)$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k^\alpha}{1 + |\lambda_k|^{2\alpha}} < +\infty. \quad (4)$$

Для любого $k > 1$ обозначим через $s_k \geq 1$ кратность появления λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^\infty$.

С последовательностью $\{\bar{\lambda}_j^a\}_1^\infty$ ассоциируем систему функций $\{r_k(w)\}_1^\infty$, где

$$r_k(w) = \frac{(s_k - 1)!}{(-w - \lambda_k^a)^{s_k}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Функция $w = \varphi(z) = -(-z)^2$ отображает левую полуплоскость $G^- = \{w; \operatorname{Re} w < 0\}$ на область $\Delta(\alpha)$.

Введем функции

$$\psi_k(z; \alpha) = r_k(\varphi(z))[\varphi'(z)]^{1/p} = \frac{(s_k - 1)! [\alpha(-z)^{\alpha-1}]^{1/p}}{[(-z)^\alpha - \lambda_k^a]^{s_k}},$$

очевидно, для любого $k \geq 1$, имеющие полюс в точке $z = -\lambda_k$ кратности s_k .

Теперь для любого $k > 1$ рассмотрим их главную часть, т. е.

$$m_k(z; \alpha) = \sum_{j=1}^{s_k} \frac{a_j^{(k)}(\alpha)}{(z + \lambda_k)^j}, \quad a_{s_k}^{(k)}(\alpha) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Легко видеть, что $m_k(z; \alpha) \in H^p[\rho]$ ($1 < p < +\infty$) ($1 \leq k < +\infty$). Наряду с системой $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ введем систему функций $\{\rho_k(z; \alpha)\}_1^\infty$, положив

$$\rho_k(z; \alpha) = \overline{\Omega_k(-\overline{\varphi(z)})} [\varphi'(z)]^{1/q}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $q = p/(p-1)$, а $\Omega_k(w)$ ($1 \leq k < +\infty$) определяется из (1.9) § 1. Следует отметить, что $\rho_k(-z; \alpha) \in H^q[\alpha]$ ($1 < q < \infty$) ($1 \leq k < +\infty$).

Системы $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ и $\{\rho_k(z; \alpha)\}_1^\infty$, как показано в лемме 2.3 § 2, биортогональны в смысле

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(t; \alpha) \rho_l(t; \alpha) dt = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 0, & k \neq l, \end{cases} \quad k, l = 1, 2, \dots$$

Пусть, далее, последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (4). Обозначим через $H_p^{\alpha}[\lambda_k]$ ($1 < p < +\infty$) пространство функций, аналитических вне множества $L_p \cup \{-\lambda_k\}_1^\infty$ и удовлетворяющих условиям:

$$1) f(z) \in H^p[\rho] (1 < p < +\infty), \quad z \in \Delta(\rho),$$

$$2) f(z) = \bar{f}(z) B_\alpha^{-1}(-z), \quad \text{где } \bar{f}(-z) \in H^p[\alpha], \quad z \in \Delta(\alpha),$$

а $B_\alpha(z)$ — функция типа Бляшке с нулями в точках $z = \lambda_k$ ($1 \leq k < +\infty$),

$$B_\alpha(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z^\alpha - \lambda_k^a}{z^\alpha + \bar{\lambda}_k^a} \frac{|1 - \lambda_k^{2a}|}{1 - \lambda_k^{2a}}, \quad z \in \Delta(\alpha),$$

3) угловые граничные значения $f(z)$ слева и справа от L_p почти всюду совпадают.

Из теоремы 3.1, § 3 следует, что замыкание в L^p системы $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ совпадают с пространством функций $L^p\{\lambda_k\}$.

Наконец, сформулируем основной результат настоящей работы.

Если последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$, кроме условия (4), удовлетворяет также условию $\sup_{k>1} \{s_k\} < +\infty$, то справедлива

Теорема 3.2. Для того чтобы система рациональных функций $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ являлась базисом в замыкании своей линейной оболочки, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\inf_{k>1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_k + \lambda_j}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k^\alpha - \lambda_j^\alpha}{\lambda_k^\alpha + \bar{\lambda}_j^\alpha} \right| \geq \delta > 0.$$

§ 1. Предварительные сведения

Введем в рассмотрение пространства $H^p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) функций $f(w)$, аналитических в правой полуплоскости $G^+ = \{w; \operatorname{Re} w > 0\}$, для которых

$$\|f\|_{H^p(G^+)} \equiv \|f\|_p^+ \equiv \sup_{x>0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dy \right)^{1/p} < +\infty. \quad (1.1)$$

Как известно [8], для любой функции $f \in H^p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) существуют угловые граничные значения $f(iy) \in L_p(-\infty, +\infty)$, причем

$$\|f\|_p^+ = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(iy)|^p dy \right)^{1/p}. \quad (1.2)$$

Аналогично под $H^p(G^-)$ ($0 < p < +\infty$) будем понимать пространства функций $\varphi(w)$, аналитических в левой полуплоскости $G^- = \{w; \operatorname{Re} w < 0\}$ и удовлетворяющих условию

$$\|\varphi\|_{H^p(G^-)} \equiv \|\varphi\|_p^- \equiv \sup_{x<0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x+iy)|^p dy \right)^{1/p} < +\infty. \quad (1.3)$$

Очевидно, что если $f(w) = \varphi(-w)$, то

$$\|\varphi\|_p^- = \|f\|_p^+.$$

Пусть $\{\beta_k\}_1^\infty$ ($\operatorname{Re} \beta_k > 0$) — произвольная последовательность комплексных чисел, среди которых могут быть числа конечной и даже бесконечной кратности. Для любого $k > 1$ через $s_k > 1$ и $p_k > 1$ обозначим кратности появления числа β_k на отрезке $\{\beta_k\}_1^k$ и во всей последовательности $\{\beta_k\}_1^\infty$ соответственно. Последовательность $\{\beta_k\}_1^\infty$ отнесем классу $\Delta(P)$, если выполняются условия

$$\inf_{k>1} \prod_{\substack{j=1 \\ \beta_j + \beta_k}}^{\infty} \left| \frac{\beta_k - \beta_j}{\beta_k + \bar{\beta}_j} \right| > \delta > 0, \quad (1.4)$$

$$\sup_{k>1} |p_k| = P < +\infty. \quad (1.5)$$

Отметим, что из (1.4) вытекает условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \beta_j}{1 + |\beta_j|^2} < +\infty, \quad (1.6)$$

которое обеспечивает существование функции Бляшке для правой полуплоскости с нулями в точках $\{\beta_j\}_1^{\infty}$:

$$B(w) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{w - \beta_j}{w + \bar{\beta}_j} \frac{|1 - \beta_j^2|}{1 - \beta_j^2}, \quad (1.7)$$

условившись полагать $\frac{|a|}{a} = -1$, при $a = 0$.

Теперь приведем некоторые факты, известные для верхней полуплоскости, но для удобства перефразировав их для правой полуплоскости.

Рассмотрим биортогональные системы функций $\{r_k(w); \Omega_k(w)\}_1^{\infty}$, (см. [2]), ассоциированные с последовательностью $\{\beta_j\}_1^{\infty}$ ($\operatorname{Re} \beta_j > 0$), удовлетворяющей условию (1.6):

$$r_k(w) = \frac{(s_k - 1)!}{(-w - \bar{\beta}_k)^{s_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.8)$$

$$\Omega_k(w) = \frac{B(w)^{p_k - s_k}}{(s_k - 1)!} \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \frac{a_v(\beta_k)}{(w - \beta_k)^{p_k - s_k - v + 1}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

где

$$a_v(\beta_k) = \frac{1}{v!} \frac{\partial^v}{\partial w^v} \left\{ \frac{(w - \beta_k)^{p_k}}{B(w)} \right\}_{w = \beta_k} \quad \begin{matrix} v = 0, 1, \dots, p_k - 1. \\ k = 1, 2, \dots. \end{matrix} \quad (1.10)$$

Как было установлено М. М. Джрбашьяном [2] эти системы биортогональны на мнимой оси $(-i\infty, +i\infty)$ в смысле

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_k(iy) \overline{r_l(iy)} dy = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\Omega_k(iy)} r_l(iy) dy = \delta_{k,l} \quad (k, l = 1, 2, \dots). \quad (1.11)$$

Справедлива следующая теорема (см. [9]).

Теорема А. Если $\{\beta_j\}_1^{\infty} \in \Delta(P)$, то для любой функции $f \in H^p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) имеют место неравенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Re} \beta_k)^{p_{r+1}} |f^{(r)}(\beta_k)|^p \leq A_p(r, \delta) \|f\|_p^p, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (1.12)$$

где $A_p(r, \delta) > 0$ — постоянная, не зависящая от f .

Из этой теоремы вытекает следующая

Теорема В. [4]. Если $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty} \in \Delta(P)$, то для любой функции $f \in H^p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{Re} \beta_k)^{p(s_k-1)-1} |f^{(s_k-1)}(\beta_k)|^p \leq A_p(P, \delta) \|f\|_p^p, \quad (1.13)$$

где $A_p(P, \delta) > 0$ не зависит от f .

Там же [4] были установлены следующие утверждения.

Лемма А. Если $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty} \in \Delta(P)$, то для коэффициентов (1.10) справедливы оценки

$$|a_\nu(\beta_k)| \leq a(\delta, P) (\operatorname{Re} \beta_k)^{p k - \nu}, \quad \nu = 0, 1, \dots, p_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.14)$$

где $a(\delta, P) > 0$ — постоянная, не зависящая от ν и k .

Теорема С. Если $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty} \in \Delta(P)$, то для любой функции $f \in H^p(G^+)$ ($1 < p < +\infty$) справедливо представление

$$f(w) = \sum_{k=1}^{\infty} f^{(s_k-1)}(\beta_k) \Omega_k(w) + \frac{B(w)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(iy)}{B(iy)} \frac{dy}{iy-w}, \quad (1.15)$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $K \subset G^+ \cup G^- \setminus \{-\bar{\beta}_k\}_{k=1}^{\infty}$ и в метрике L_p на мнимой оси $(-i\infty, +i\infty)$.

Отметим еще две теоремы относительно функций из $H^p(G^+)$, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема D. [8]. Если $f \in H^p(G^+)$ ($1 \leq p < +\infty$), то

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{f(t)}{t-w} dt = \begin{cases} f(w), & w \in G^+ \\ 0, & w \in \bar{G}^+. \end{cases} \quad (1.16)$$

Теорема Е. [10]. Если $h(t) \in L_p(-i\infty, +i\infty)$, то интегралы типа Коши

$$f^+(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{h(t)}{t-w} dt, \quad w \in G^+, \quad (1.17)$$

$$f^-(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{h(t)}{t-w} dt, \quad w \in G^- \quad (1.17')$$

обладают свойствами

$$1) \quad f^+ \in H^p(G^+), \quad f^- \in H^p(G^-), \quad (1.18)$$

$$2) \quad \|f^+\|_p^+ \leq A_p \|h\|_p, \quad \|f^-\|_p^- \leq A_p \|h\|_p, \quad (1.19)$$

где $A_p > 0$ — постоянная, не зависящая от h .

3) почти для всех $t \in (-i\infty, +i\infty)$

$$h(t) = f^-(t) - f^+(t). \quad (1.20)$$

Рассмотрим также класс $H_p^*(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) функций $f(w)$, аналитических в правой полуплоскости G^+ , для которых

$$\|f\|_{H_p^*(G^+)} \equiv \|f\|_p^* = \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (1.21)$$

Нам понадобится также следующая

Теорема Г. Для любого p ($0 < p < +\infty$) справедливы утверждения

$$\begin{aligned} 1) \quad & H^p(G^+) = H_p^*(G^+), \\ 2) \quad & A_p \|f\|_p^+ \leq \|f\|_p^* \leq B_p \|f\|_p^+, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где A_p и B_p от f не зависят.

Отметим, что утверждение 1) в случае $p=2$ впервые было установлено в совместной работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [11].

Включение $H_p^*(G^+) \subset H_p^p(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) является очевидным следствием теоремы о двух постоянных С. А. Акопяна [13]. Включение же $H_p^p(G^+) \subset H_p^*(G^+)$ ($0 < p < +\infty$) было доказано А. М. Седецким [14], где после С. А. Акопяна было приведено также другое доказательство включения $H^p(G^+) \subset H_p^*(G^+)$.

§ 2. Представление функций из $H^p[\rho]$ ($1 \leq p < +\infty$)

2.1. а) Для произвольного ρ ($\frac{1}{2} < \rho < +\infty$) обозначим через

$$\Delta(\rho) = \left\{ z; |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho}; 0 < |z| < +\infty \right\}$$

угловую область на конечной комплексной плоскости. Полагая $\alpha = \rho/(2\rho - 1)$, обозначим через

$$\Delta^*(\rho) \equiv \bar{\Delta}(\alpha) = \left\{ z; |\arg(-z)| < \frac{\pi}{2\alpha}; 0 < |z| < +\infty \right\}$$

дополнение к замыканию $\Delta(\rho)$.

Пусть $H^p[\rho]$ ($0 < p < +\infty$) — пространство функций $f(z)$, аналитических в $\Delta(\rho)$ и удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{H^p[\rho]} \equiv \sup_{|\vartheta| < \frac{\pi}{2\rho}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\vartheta})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (2.1)$$

Через $\bar{H}^p[\alpha]$ ($0 < p < +\infty$) обозначим пространства функций $\varphi(z)$, аналитических в $\bar{\Delta}(\alpha)$ и удовлетворяющих условию

$$\|\varphi\|_{H^p(\alpha)} \equiv \sup_{|\theta| < \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^{+\infty} |\varphi(re^{-i\theta})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (2.2)$$

Далее, пусть $L^p[\rho]$ — класс функций $f(t)$, измеримых на общей границе взаимно дополнительных областей $\Delta(\rho)$ и $\Delta^*(\rho)$, для которых

$$\|f\|_{L^p[\rho]} \equiv \left\{ \int_{L^p} |f(t)|^p |dt| \right\}^{1/p} = \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\frac{\pi}{2\rho}})|^p dr + \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} |f(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}})|^p dr \right\}^{1/p} < +\infty. \quad (2.3)$$

б) Полагая всюду в дальнейшем, что $\{\lambda_j\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\alpha)$, для любого k ($1 \leq k < +\infty$) через $s_k \geq 1$ и $p_k \geq 1$ обозначим кратности появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$ и во всей последовательности $\{\lambda_j\}_1^\infty$ соответственно.

Последовательность $\{\lambda_j\}_1^\infty$ отнесем к классу $\Delta_+(P)$, если выполняются условия

$$\inf_{k>1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_k \pm \lambda_j}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k^\alpha - \lambda_j^\alpha}{\lambda_k^\alpha + \bar{\lambda}_j^\alpha} \right| \geq \delta > 0, \quad (2.4)$$

$$\sup_{k>1} \{p_k\} = P < +\infty. \quad (2.5)$$

Из условия (2.4) вытекает условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k^\alpha}{1 + |\lambda_k|^{2\alpha}} < +\infty, \quad (2.6)$$

которое обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость внутри угловой области $\Delta(\alpha)$ произведения типа Бляшке с нулями в точках $z = \lambda_k$:

$$B_+(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z^2 - \lambda_k^\alpha}{z^2 + \bar{\lambda}_k^\alpha} \frac{|1 - \lambda_k^{2\alpha}|}{1 - \lambda_k^{2\alpha}}, \quad z \in \Delta(\alpha), \quad (2.6')$$

вновь условившись полагать, что $\frac{|b|}{b} = -1$ при $b = 0$, а под z^2 понимая главную ветвь этой функции.

Лемма 2. 1. Если $f \in H^p[\rho]$ ($0 < p < +\infty$), то отображением

$f_\rho(w) = f(w^{\frac{1}{\rho}}) \left[\frac{1}{\rho} w^{\frac{1}{\rho} - 1} \right]^{1/p}$ устанавливается изоморфизм между пространством $H^p[\rho]$ и $H^p(G^+)$.

Действительно, если $z = r_1 e^{i\theta}$, то

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^p(G^+)} &= \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} = \\ &= \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(r^{\frac{1}{p}} e^{i\frac{\varphi}{p}})|^p \frac{1}{p} r^{\frac{1}{p}-1} dr \right\} = \\ &= \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(r_1 e^{i\varphi})|^p dr_1 \right\}^{1/p} = \|f\|_{H^p(\mathbb{D}^+)}. \end{aligned}$$

Остается воспользоваться теоремой F .

Следствие 1. Любая функция $f \in H^p[\rho]$ ($0 < p < +\infty$) представима в виде

$$f(z) = B_\rho(z) \cdot e(z), \quad (2.7)$$

причем

$$a_\rho \|e\|_{H^p[\rho]} \leq \|f\|_{H^p[\rho]} \leq b_\rho \|e\|_{H^p[\rho]}, \quad (2.7')$$

где $e(z) \neq 0$ при $z \in \Delta(\rho)$, $e(z) \in H^p[\rho]$, а $B_\rho(z)$ — произведение типа Бляшке для угловой области $\Delta(\rho)$ с нулями функции $f(z)$.

Следствие 2. Для любой функции $f \in H^p[\rho]$ справедливо неравенство

$$|f(z)| \leq C_{p,\rho} (|z|^{1-\rho} \operatorname{Re} z^\rho)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{H^p[\rho]}, \quad z \in \Delta(\rho). \quad (2.8)$$

Оно следует из следующего неравенства:

$$|g(w)| < C_\rho (\operatorname{Re} w)^{-\frac{1}{p}} \|g\|_p^+, \quad w \in G^+,$$

отмеченного в работе [14] для функций $g \in H^p(G^+)$. Благодаря неравенству (2.8), сходимость в метрике $H^p[\rho]$ влечет равномерную сходимость к предельной функции на каждом компакте из угловой области $\Delta(\rho)$.

Теорема 2.1. Для любой функции $f \in H^p[\rho]$ ($1 \leq p < +\infty$) справедливы утверждения:

1°. Любая функция $f \in H^p[\rho]$ ($1 \leq p < +\infty$) почти всюду на L имеет угловые граничные значения $f(t) \in L_p(L_\rho)$ такие, что

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2\rho} - 0} \int_0^{+\infty} |f(re^{i\frac{\pi}{2\rho}}) - f(re^{i\varphi})|^p dr = 0, \quad (2.9)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2\rho} + 0} \int_0^{+\infty} |f(re^{-i\frac{\pi}{2\rho}}) - f(re^{i\varphi})|^p dr = 0. \quad (2.10)$$

2°. Для любого $p \left(\frac{1}{2} < p < +\infty \right)$ имеет место интегральная формула Коши

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(re^{-i\frac{\pi}{2p}})}{re^{-i\frac{\pi}{2p}} - z} d(re^{-i\frac{\pi}{2p}}) - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{+\infty} \frac{f(re^{i\frac{\pi}{2p}})}{re^{i\frac{\pi}{2p}} - z} d(re^{i\frac{\pi}{2p}}) = \\ & = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{f(t)}{t-z} dt = \begin{cases} f(z), & z \in \Delta(p) \\ 0, & z \in \overline{\Delta(p)}, \end{cases} \end{aligned} \quad (2.11)$$

где L_p — граница $\Delta(p)$, пробегаемая в направлении неубывания $\arg t$;

3°. Функция $f(re^{i\varphi})$ почти для всех $r \in (0, +\infty)$ при $\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2p}$ имеет пределы, совпадающие с граничной функцией $f(t)$, $t = re^{\pm i\frac{\pi}{2p}}$, т. е.

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2p} - 0} f(re^{i\varphi}) = f(re^{i\frac{\pi}{2p}}), \quad (2.12)$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2p} + 0} f(re^{i\varphi}) = f(re^{-i\frac{\pi}{2p}}). \quad (2.12')$$

Эта теорема является аналогом теоремы 7.5, установленной М. М. Джрбашьяном (см. [12], стр. 414) для $p=2$ и приводится без доказательства. Отметим, что доказательство 2° в случае $p=2$ основывалось на лемме 8.6 (см. [12]). Используя эту лемму, просто получить аналогичное утверждение для случая $p \in [1, +\infty)$.

Действительно, из следствия 1 леммы 2.1 вытекает, что функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z) = B_p(z) e(z), \quad z \in \Delta(p)$$

или

$$f(z) = B_p(z) ([e(z)]^{p/2})^{2/p} = B_p(z) (E(z))^{2/p},$$

где $E(z) \in H^2[p]$. Тогда для любого $\varphi_0 \left(0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2p} \right)$ имеем

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \{ \max |f(re^{i\varphi})| r^{1/p} \} \leq \lim_{r \rightarrow 0^+} \{ \max |E(re^{i\varphi})| r^{1/2} \}^{2/p} = 0, \quad (2.13)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \{ \max |f(re^{i\varphi})| r^{1/p} \} \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} \{ \max |E(re^{i\varphi})| r^{1/2} \}^{2/p} = 0. \quad (2.14)$$

Лемма 2.2. Для любых функций $f \in H^p[p]$ ($1 \leq p < +\infty$) и $g \in H^q[p]$, где $q = p(p-1)$ на границе L_p области $\Delta(p)$ справедливо равенство

$$\int_{L_\rho} f(\zeta) g(\zeta) d\zeta \equiv 0. \quad (2.15)$$

Доказательство. Так как $f \in H^p[\rho]$, $g \in H^q[\rho]$, то согласно (2.13) и (2.14) для любого $\varphi_0 \left(0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \right)$

$$\max_{|\varphi| < \varphi_0} |f(re^{i\varphi})| = o(r^{-\frac{1}{p}}), \quad r \rightarrow +0, \quad r \rightarrow +\infty, \quad (2.16)$$

$$\max_{|\varphi| < \varphi_0} |g(re^{i\varphi})| = o(r^{-\frac{1}{q}}), \quad r \rightarrow +0, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (2.16')$$

Отсюда имеем

$$\int_{\substack{|z|=r \\ |\arg z| < \varphi_0}} f(z) g(z) dz = o(1), \quad r \rightarrow +0, \quad r \rightarrow +\infty \quad (2.17)$$

и по теореме Коши

$$\int_0^{+\infty} f(re^{i\varphi_0}) g(re^{i\varphi_0}) dre^{i\varphi_0} - \int_0^{+\infty} f(re^{-i\varphi_0}) g(re^{-i\varphi_0}) dre^{-i\varphi_0} = 0. \quad (2.18)$$

Теперь остается проверить, что в (2.18) можно перейти к пределу при $\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2\rho} - 0$. Действительно, справедлива оценка

$$\begin{aligned} U(\varphi_0) &\equiv \left| \int_0^{+\infty} f(re^{\pm i\varphi_0}) g(re^{\pm i\varphi_0}) dre^{\pm i\varphi_0} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{+\infty} f(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}) g(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}) dre^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} \right| \ll \\ &\ll \int_0^{+\infty} \left| f(re^{\pm i\varphi_0}) \left| g(re^{\pm i\varphi_0}) - g(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}) \right| \right| dr + \\ &\quad + \int_0^{+\infty} \left| g(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}) \left| f(re^{\pm i\varphi_0}) - f(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}) \right| \right| dr + \\ &\quad + \left| e^{\pm i\varphi_0} - e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} \right| \int_0^{+\infty} \left| f(re^{\pm i\varphi_0}) g(re^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}) \right| dr. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned}
 U(\varphi_0) &\leq \|f\|_{H^p[\rho]} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| g(re^{\pm i\varphi_0}) - g(re^{\pm i\frac{\pi}{2p}}) \right|^p dr \right\}^{1/p} + \\
 &+ \|g\|_{H^q[\rho]} \left\{ \int_0^{+\infty} \left| f(re^{\pm i\varphi_0}) - f(re^{\pm i\frac{\pi}{2p}}) \right|^p dr \right\}^{1/p} + \\
 &+ \|f\|_{H^p[\rho]} \cdot \|g\|_{H^q[\rho]} |e^{\pm i\varphi_0} - e^{\pm i\frac{\pi}{2p}}|. \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

Но в силу теоремы 2.1 при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2p} = 0$ вторые сомножители в первом и во втором слагаемом стремятся к нулю. Поэтому, переходя к пределу в (2.18) при $\varphi_0 \rightarrow \frac{\pi}{2p} = 0$, в силу (2.19) получим равенство

$$\int_0^{+\infty} f(re^{i\frac{\pi}{2p}}) g(re^{i\frac{\pi}{2p}}) dre^{i\frac{\pi}{2p}} - \int_0^{+\infty} f(re^{-i\frac{\pi}{2p}}) g(re^{-i\frac{\pi}{2p}}) dre^{-i\frac{\pi}{2p}} \equiv 0.$$

Отметим следующий аналог теоремы М. Рисса об интегралах типа Коши.

Теорема 2.2. Если $h(t) \in L_p(L_c)$ ($1 < p < +\infty$), то функции

$$\begin{aligned}
 f_+(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{h(t)}{t-z} dt, \quad z \in \Delta(p) \\
 f_-(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{h(t)}{t-z} dt, \quad z \in \tilde{\Delta}(a)
 \end{aligned}$$

удовлетворяют условиям

- 1) $f_+(z) \in H^p[\rho]$, $f_-(z) \in \tilde{H}^p[a]$,
- 2) $\|f_+\|_{H^p[\rho]} \leq C_p \|h\|_{L^p[\rho]}$; $\|f_-\|_{H^p[a]} \leq C_p \|h\|_{L^p[\rho]}$,
- 3) почти для всех $t \in L_p$

$$h(t) = f_-(t) - f_+(t).$$

Доказательство. Для любого p ($\frac{1}{2} < p < +\infty$) и $a = p/(2p-1)$

введем следующие обозначения

$$L_p^\pm = \left\{ t; \arg t = \pm \frac{\pi}{2p}; 0 < |t| < +\infty \right\},$$

$$L_a^\pm = \left\{ t; \arg t = \pm \frac{\pi}{2a}; 0 < |t| < +\infty \right\},$$

и

$$l_1 = L_p^+ \cup L_2^-, \quad l_2 = L_1^- \cup L_p^+.$$

Далее, если определить две функции следующим образом:

$$h_1(t) = \begin{cases} h(t), & t \in L_p^+ \\ 0, & t \in L_2^-, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$h_2(t) = \begin{cases} h(t), & t \in L_1^- \\ 0, & t \in L_p^+, \end{cases} \quad (2.20')$$

то очевидно $h_1(t) \in L^p(l_1)$, а $h_2(t) \in L^p(l_2)$, причем

$$\|h_1\|_{L^p(l_1)} = \left\{ \int_{L_p^+} |h(t)|^p |dt| \right\}^{1/p}, \quad (2.21)$$

$$\|h_2\|_{L^p(l_2)} = \left\{ \int_{L_1^-} |h(t)|^p |dt| \right\}^{1/p}. \quad (2.21')$$

Теперь рассмотрим функции

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p^+} \frac{h(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_1} \frac{h_1(t)}{t-z} dt,$$

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1^-} \frac{h(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_2} \frac{h_2(t)}{t-z} dt.$$

Заметим, что в силу теорем *E* и *F* функция $f_1(z)$ из классов H^p , H_p^p в полуплоскостях по обе стороны прямой l_1 , но поскольку вдоль L_2^- функция $f_1(z)$ не имеет особенностей, она аналитична во всей плоскости, исключая разрез вдоль L_p^+ . Аналогично, функция $f_2(z)$ из классов H^p , H_p^p в полуплоскостях с общей границей l_2 и аналитична вне L_1^- . Следовательно, используя теоремы *E* и *F*, имеем

$$\begin{aligned} \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2\rho}} \int_0^{+\infty} |f_1(re^{i\varphi})|^p dr &\leq \sup_{-\frac{\pi}{2\alpha} < \varphi < \frac{\pi}{2\alpha}} \int_0^{+\infty} |f_1(re^{i\varphi})|^p dr + \\ &+ \sup_{\frac{\pi}{2\rho} < \varphi < -\frac{\pi}{2\alpha}} \int_0^{+\infty} |f_1(re^{i\varphi})|^p dr \leq 2 \int_{l_1} |f_1(t)|^p |dt| \leq A_p \|h_1\|_{L^p[\rho]}, \end{aligned} \quad (2.22')$$

$$\begin{aligned} \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2\rho}} \int_0^{+\infty} |f_2(re^{i\varphi})|^p dr &\leq \sup_{-\frac{\pi}{2\rho} < \varphi < \frac{\pi}{2\alpha}} \int_0^{+\infty} |f_2(re^{i\varphi})|^p dr + \\ &+ \sup_{\frac{\pi}{2\alpha} < \varphi < -\frac{\pi}{2\rho}} \int_0^{+\infty} |f_2(re^{i\varphi})|^p dr \leq 2 \int_{l_2} |f_2(t)|^p |dt| \leq A_p \|h_2\|_{L^p[\rho]}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим функции

$$f_+(z) = -f_1(z) + f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{h(t)}{t-z} dt, \quad z \in \Delta(\rho),$$

$$f_-(z) = f_1(z) - f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{h(t)}{t-z} dt, \quad z \in \bar{\Delta}(\alpha),$$

которые, очевидно, аналитичны соответственно в областях $\Delta(\rho)$ и $\bar{\Delta}(\alpha)$.

Используя (2.21), (2.21') и (2.22), (2.22') получим

$$\begin{aligned} \|f_+\|_{H^p|\rho|} &= \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2\rho}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f_1(re^{i\varphi}) - f_2(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq \left\{ \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2\rho}} \int_0^{+\infty} |f_1(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} + \left\{ \sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2\rho}} \int_0^{+\infty} |f_2(re^{i\varphi})|^p dr \right\}^{1/p} \leq \\ &\leq 2 \left[\left\{ \int_{I_1} |f_1(t)|^p |dt| \right\}^{1/p} + \left\{ \int_{I_2} |f_2(t)|^p |dt| \right\}^{1/p} \right] \leq \\ &\leq 2A_p \left[\left\{ \int_{L_\rho^+} |h(t)|^p |dt| \right\}^{1/p} + \left\{ \int_{L_\rho^-} |h(t)|^p |dt| \right\}^{1/p} \right] \leq \\ &\leq 2A_p^* \|h\|_{L^p|\rho|}. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается утверждение 2) относительно функции $f_-(z)$.

Утверждение 3) вытекает из известных результатов об интегралах типа Коши.

2.2. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty \subset \Delta(\alpha)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию Бляшке (2.6). Тогда последовательность $\{\beta_k\}_1^\infty$, заданная таким образом:

$$\beta_k = \bar{\lambda}_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяет условию (1.6) и $\operatorname{Re} \beta_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots$). С этой последовательностью ассоциируем системы (1.8) и (1.9) функций $r_k(w)$ и $Q_k(w)$ соответственно.

Теперь отображим конформно область $\bar{\Delta}(\alpha)$ на полуплоскость G^- с помощью функции

$$w = \varphi(z) = -(-z)^\alpha, \quad (2.23)$$

тогда обратное отображение имеет вид

$$z = \psi(w) = -(-w)^{1/\alpha}. \quad (2.24)$$

Далее рассмотрим последовательность функций

$$\psi_k(z; \sigma) = r_k(\varphi(z)) [\varphi'(z)]^{1/p} = \frac{(s_k - 1)! [\alpha (-z)^{\alpha-1}]^{1/p}}{((-z)^\alpha - \lambda_k^\alpha)^{s_k}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Заметим, что для любого $k \geq 1$ функция $\psi_k(z; \alpha)$ регулярна в $\Delta(\alpha)$, кроме точки $z = -\lambda_k$, где она имеет полюс кратности s_k .

Пусть $m_k(z; \alpha)$ — главная часть функции $\psi_k(z; \alpha)$, т. е.

$$m_k(z; \alpha) = \sum_{j=1}^{s_k} \frac{a_j^{(k)}(z)}{(z + \lambda_k)^j}, \quad a_{s_k}^{(k)}(\alpha) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Поскольку $\psi_k(z; \alpha) = O\left(\frac{1}{|z|^{\frac{\alpha}{q} + \frac{1}{p}}}\right)$, при $|z| \rightarrow +\infty$,

где $q = p/(p-1)$, то, аналогично формуле (3.18) ([1], стр. 402), имеем

$$m_k(z; \alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{\psi_k(t; \alpha)}{t-z} dt, \quad z \in \Delta(\rho). \quad (2.27)$$

Здесь и в последующем изложении под L_p будем понимать общую границу областей $\Delta(\rho)$ и $\Delta(\alpha)$, пробегаемую в направлении неубывания $\arg t$.

Так как $m_k(z; \alpha)$ — рациональная функция с полюсом в точке $z = -\lambda_k \in \Delta(\alpha)$, то она непрерывна в $\overline{\Delta(\rho)}$ и $m_k(z; \alpha) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$, при $|z| \rightarrow +\infty$. Отсюда следует, что $m_k(z; \alpha) \in H^p[\rho]$ ($1 < p < +\infty$).

Теперь, наряду с системой $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$, полагая $q = p/(p-1)$, введем систему функций $\{\rho_k(z; \alpha)\}_1^\infty$, регулярных в области $\Delta(\alpha)$, положив

$$\rho_k(z; \alpha) = \overline{\Omega_k(-\varphi(z))} [\varphi'(z)]^{1/q} = \frac{B_\alpha (-z) [\alpha (-z)^{\alpha-1}]^{1/q}}{(s_k - 1)!} \times \\ \times \sum_{v=0}^{p_k - s_k} \frac{a_v(\bar{\lambda}_k)}{[(-z)^\alpha - \lambda_k^\alpha]^{p_k - s_k - v + 1}}.$$

Легко проверить, что для любого $k \geq 1$, $\rho_k(z; \alpha) \in H^q[\alpha]$. Действительно, используя теорему F , имеем

$$\|\rho_k\|_{H^q(\alpha)} = \|\Omega_k\|_{H^q(\alpha^+)} \leq B_p \|\Omega_k\|_{H^q(\alpha^+)} < +\infty. \quad (2.29)$$

Полученные системы функций $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ и $\{\rho_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ в случае $\alpha = 1$ совпадают с системами $\{r_k(w)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(w)\}_1^\infty$ функций (1.8) и (1.9) соответственно.

Лемма 2.3. Системы $\{m_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ и $\{\rho_k(z; \alpha)\}_1^\infty$ биортогональны в смысле

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(t; \alpha) \rho_l(t; \alpha) dt = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}, \quad k, l = 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

Доказательство. Запишем интеграл (2.30) в виде

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} m_\varepsilon(t; \alpha) \rho_k(t; \alpha) dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \psi_\varepsilon(t; \alpha) \rho_k(t; \alpha) dt + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} [\psi_\varepsilon(t; \alpha) - m_\varepsilon(t; \alpha)] \rho_k(t; \alpha) dt = J_1 + J_2.$$

Учитывая биортогональность систем $\{r_k(w)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(w)\}_1^\infty$ на мнимой оси в смысле (1.11) и определения (2.28), (2.25) функций $\rho_k(z; \alpha)$ и $\psi_k(z; \alpha)$ соответственно, после замены $iy = \varphi(t) = -(-t)^\alpha$, получим

$$J_1 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} r_l(\varphi(t)) \cdot \overline{\varphi(t)} \overline{\Omega_k(-\varphi(t))} dt = \\ = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} r_l(iy) \overline{\Omega_k(iy)} dy = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}.$$

Далее, для любого $l \geq 1$ по определению функций $\psi_l(z; \alpha)$ и $m_l(z; \alpha)$ их разность $\varphi_l(z; \alpha) = \psi_l(z; \alpha) - m_l(z; \alpha)$ имеет порядок

$$O\left(\frac{1}{|z|^\mu}\right), \quad \mu = \min\left\{1, \frac{\alpha}{q} + \frac{1}{p}\right\}$$

при $|z| \rightarrow +\infty$ и регулярна в $\Delta(\alpha)$. Следовательно, $\varphi_l(z; \alpha) \in \tilde{H}^p[\alpha]$ и

так как $\rho_k(z; \alpha) \in \tilde{H}^q[\alpha]$, то в силу леммы 2.2 $J_2 = 0$.

2.3. Для любого фиксированного $z \in \Delta(\rho)$ рассмотрим функцию

$$\lambda_\alpha(w; z) = \frac{\left[\frac{1}{\alpha} w^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]^{\frac{1}{q}}}{-(-w)^{1/\alpha} - z}, \quad w \in G^-,$$

очевидно регулярную в полуплоскости G^- . Тогда функция

$$\lambda_\alpha^*(w; z) = \overline{\lambda_\alpha(-\bar{w}; z)}, \quad z \in \Delta(\rho)$$

относительно w будет регулярной в G^+ и принадлежит пространству $H^q(G^+)$ ($1 < q < +\infty$).

Лемма 2.4. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_\alpha(P)$, то для любых $z \in \Delta(\rho)$, $\zeta \in \tilde{\Delta}(\alpha)$ имеет место разложение

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(z; \alpha) m_k(z; \alpha) - \frac{[\alpha(-\zeta)^{\alpha-1}]^{1/q} B_\alpha(-\zeta)}{2\pi i} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_\alpha(iy; z) B(iy)}{iy - \varphi(\zeta)} dy. \quad (2.31)$$

Доказательство. Очевидно, что если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_0(P)$, то из определения классов $\Delta_0(P)$ и $\Delta_1(P)$ следует, что $\{\bar{\lambda}_k\}_1^\infty \in \Delta_1(P)$. Поскольку $\chi_\alpha^*(w; z) \in H^q(G^+)$ ($1 < q < +\infty$), то по теореме С имеет место представление

$$\chi_\alpha^*(w; z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_k(w) \chi_\alpha^{*(s_k-1)}(\bar{\lambda}_k; z) + \frac{B(w)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_\alpha^*(iy; z)}{B(iy)(iy-w)} dy, \quad (2.32)$$

где ряд относительно w сходится абсолютно и равномерно в области $G^+ \cup G^- \setminus \overline{\{\bar{\lambda}_k\}_1^\infty}$ и в метрике L_q на мнимой оси, $B(w)$ — функция Бляшке с нулями в точках $\{\bar{\lambda}_k\}_1^\infty$.

Простой подсчет показывает, что

$$\begin{aligned} \chi_\alpha^*(\bar{\lambda}_k; z) &= -\frac{(s_k-1)!}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_\alpha^*(iy; z)}{(iy - \bar{\lambda}_k)^{s_k}} dy = \\ &= -\frac{(s_k-1)!}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_\alpha^*(iy; z)}{(-iy - \bar{\lambda}_k)^{s_k}} dy = \\ &= -\frac{(s_k-1)!}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{[\alpha(-t)^{\alpha-1}]^{1/p}}{[(-t)^2 - \bar{\lambda}_k]^{s_k}(t-z)} dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{\psi_k(t; \alpha)}{t-z} dt = \overline{m_k(z; \alpha)}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Отсюда и из (2.32), учитывая тождество $\overline{B(-\bar{w})} = B^{-1}(w)$, после замены $w = -\bar{\eta}$ и перехода к сопряженным величинам получим

$$\chi_\alpha(\eta; z) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\Omega_k(-\bar{\eta})} m_k(z; \alpha) - \frac{1}{B(\eta)} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_\alpha^*(iy; z) B(iy)}{iy - \eta} dy. \quad (2.34)$$

Из (2.34) в результате замены $\eta = \varphi(\zeta) = -(-\zeta)^\alpha$ получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha(-\zeta)^{\alpha-1}]^{1/q} \overline{\Omega_k((- \zeta)^\alpha)} m_k(z; \alpha) - \\ &- \frac{[\alpha(-\zeta)^{\alpha-1}]^{1/q}}{B(-(-\zeta)^\alpha)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_\alpha^*(iy; z) B(iy)}{iy - \varphi(\zeta)} dy. \end{aligned}$$

Отсюда, используя определение (2.28) функции $\rho_k(z; \alpha)$, получаем разложение (2.31), где $B_1(-z)$ — функции типа Бляшке для угловой области $\Delta(\alpha)$ с нулями в точках $\{-\lambda_k\}_1^\infty$.

Отметим, что построения и леммы, аналогичные леммам 2.3 и 2.4 для конечных областей впервые были установлены в работе М. М. Джрбашяна [1].

Теорема 2.3. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_\alpha(P)$, то любая функция $f \in H^p[\rho]$ ($1 < p < +\infty$) представима в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) m_k(z; \alpha) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} f(\zeta) B_\alpha(-\zeta) F(\zeta; z) d\zeta, \quad (2.35)$$

где

$$c_k(f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} f(\zeta) \rho_k(\zeta; \alpha) d\zeta, \quad k=1, 2, \dots,$$

а $F(\zeta; z) \in \tilde{H}^q[\alpha]$ относительно переменной $\zeta \in \Delta(\alpha)$ и имеет вид

$$F(\zeta, z) = [\alpha(-\zeta)^{\alpha-1}]^{1/q} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_\alpha(iy; z) B(iy)}{iy - \varphi(\zeta)} dy, \quad \zeta \in \tilde{\Delta}(\alpha), z \in \Delta(\rho).$$

Доказательство. По теореме 2.1 функция $f(z)$ представима интегралом Коши

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Delta(\rho).$$

Остается воспользоваться разложением ядра Коши (2.31), чтобы получить представление (2.35) функции $f(z)$.

Теперь рассмотрим функцию

$$\Phi(w; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda_\alpha(iy; z) B(iy)}{iy - w} dy, \quad w \in G^-,$$

которая в силу теоремы E принадлежит классу $H^q(G^-)$, так как $\lambda_\alpha(iy; z) B(iy) \in L_q(-\infty; +\infty)$. А поскольку $F(\zeta; z) = [\alpha^{\alpha-1}(-\zeta)^{\alpha-1}]^{1/q} \times \times \Phi(\varphi(\zeta); z)$, то по лемме 2.1 будем иметь $F(\zeta; z) \in \tilde{H}^q[\alpha]$.

§ Основные теоремы

3.1. Ниже $\{\lambda_k\}_1^\infty$ это последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(\alpha)$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k^\alpha}{1 + |\lambda_k|^{2\alpha}} < +\infty. \quad (3.1)$$

Обозначим через $H_p^\alpha[\lambda_k]$ ($1 < p < +\infty$) пространство функций $f(z)$, аналитических вне множества $L_\rho \cup \overline{\{-\lambda_k\}_1^\infty}$ и удовлетворяющих условиям

1. $f(z) \in H^p[\rho]$ ($1 < p < +\infty$), $z \in \Delta(\rho)$;
2. $f(z) = \tilde{f}(z) B_\alpha^{-1}(-z)$, где $\tilde{f}(z) \in \tilde{H}^p[\alpha]$, $z \in \tilde{\Delta}(\alpha)$.

3) угловые граничные значения функции $f(z)$ слева и справа от контура L_p почти всюду совпадают.

Лемма 3.1. Пространство $\lambda_p^a \{\lambda_k\}$ совпадает с множеством функций $f(z)$ из $H[\rho]$, удовлетворяющих условию

$$\int_{L_p} \frac{f(\zeta) B_a(-\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \equiv 0, \quad z \in \Delta(\rho). \quad (3.2)$$

Доказательство. Если $f(z) \in \lambda_p^a \{\lambda_k\}$, то существует функция $\tilde{f}(z) \in \tilde{H}^p[\rho]$ такая, что почти для всех $t \in L_p$

$$f(t) = \tilde{f}(t) B_a^{-1}(-t).$$

Тогда для интеграла (3.1) в силу теоремы 2.1, получаем

$$\int_{L_p} \frac{f(\zeta) B_a(-\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{L_p} \frac{\tilde{f}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \equiv 0, \quad z \in \Delta(\rho).$$

Обратно, полагая, что для функции $f(z) \in H^p[\rho]$ выполняется условие (3.2), рассмотрим интеграл

$$R(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{f(\zeta) B_a(-\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Delta(\rho). \quad (3.3)$$

Так как $f(\zeta) B_a(-\zeta) \in L^p[\rho]$, то в силу теоремы 2.3 функция $R(z) \in \tilde{H}^p[\rho]$ и ее граничные значения $R(\zeta) \in L^p[\rho]$ в силу теоремы 2.3 и условия (3.2) почти всюду на L_p совпадают со значениями $f(\zeta) B_a(-\zeta)$. Следовательно, граничные значения $f(\zeta)$ функции $f(z)$ совпадают с граничными значениями функции $R(z) B_a^{-1}(-z)$. А это значит, что $f(z) \in \lambda_p^a \{\lambda_k\}$.

Теорема 3.1. Замыкание в $L^p[\rho]$ системы $\{m_k(z; a)\}_1^\infty$ совпадает с пространством функций $\lambda_p^a \{\lambda_k\}$.

Доказательство. Покажем сначала, что любая функция $f(z)$ из $\lambda_p^a \{\lambda_k\}$ принадлежит замыканию в $L^p[\rho]$ системы $\{m_k(z; a)\}_1^\infty$. Другими словами, нам нужно показать, что если F — произвольный функционал на $L^p[\rho]$ такой, что

$$F(m_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.4)$$

то

$$F(f) = 0, \quad f \in \lambda_p^a \{\lambda_k\}. \quad (3.5)$$

Принимая во внимание общий вид функционала в $L^p[\rho]$:

$$F(f) = \int_{L_p} f(\zeta) h(\zeta) d\zeta, \quad h(\zeta) \in L^q[\rho], \quad (3.6)$$

где $q = p/p - 1$, из (3.4) будем иметь

$$\int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) h(\zeta) d\zeta = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

Но по теореме 2.3 почти для всех $\zeta \in L_p$.

$$h(\zeta) = h_-(\zeta) - h_+(\zeta),$$

где $h_+(z) \in H^q[\rho]$, а $h_-(z) \in \bar{H}^q[\alpha]$. Поэтому (3.6) принимает вид

$$F(f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) h_+(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) h_-(\zeta) d\zeta. \quad (3.8)$$

Поскольку по определению пространства $\lambda_p^{\alpha} \{\lambda_k\}$ функция $f(z) \in H^p[\rho]$ при $z \in \Delta(\rho)$, а $h_-(z) \in \bar{H}^q[\alpha]$, то в силу леммы 2.2

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) h_-(\zeta) d\zeta = 0. \quad (3.9)$$

Отсюда и из (3.7) следует, что

$$\sum_{j=1}^{s_k} \alpha_j^{(k)}(z) h_{-}^{(j-1)}(-\lambda_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

а так как $\alpha_{s_k}^{(k)}(z) \neq 0$ ($k \geq 1$), то функция $h_-(z)$ имеет нули на последовательности $\{-\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in \bar{\Delta}(\alpha)$. Следовательно, $h_-(z) B_{\alpha}^{-1}(-z) \in \bar{H}^q[\alpha]$, а из определения класса $\lambda_p^{\alpha} \{\lambda_k\}$ вытекает, что функция $f(z) B_{\alpha}(-z) \in \bar{H}^p[\alpha]$.

Поэтому опираясь на лемму 2.2, получаем равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) h_-(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) B_{\alpha}(-\zeta) h_-(\zeta) B_{\alpha}^{-1}(-\zeta) d\zeta = 0. \quad (3.10)$$

Таким образом, из (3.9) и (3.10) следует, что $F(f) = 0$ для любой функции $f \in \lambda_p^{\alpha} \{\lambda_k\}$.

Обратно, полагая, что функция $f(z)$ — из замыкания системы $\{m_k(z; \alpha)\}_{k=1}^{\infty}$, покажем принадлежность $f(z)$ классу $\lambda_p^{\alpha} \{\lambda_k\}$.

С этой целью, достаточно проверить выполнение условия (3.1) леммы 3.1 для любой функции из последовательности $\{m_k(z; \alpha)\}_{k=1}^{\infty}$. Следует заметить, что для любого $k > 1$ функция $m_k(z; \alpha)$ в точке $z = -\lambda_k$ имеет полюс порядка s_k ($s_k \leq p_k < +\infty$). Следовательно,

функция $\varphi_k(z) = m_k(z; \alpha) B_{\alpha}(-z)$ регулярна в $\bar{\Delta}(\alpha)$, порядка $O\left(\frac{1}{|z|}\right)$

при $|z| \rightarrow +\infty$, т. е. принадлежит классу $\bar{H}^p[\alpha]$. Поэтому в силу теоремы 2.1 получим

$$\int_{L_p} \frac{m_k(\zeta; \alpha) B_{\alpha}(-\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad z \in \Delta(\rho).$$

Лемма 3.2. Если $\{\lambda_k\}_1^\infty \in \Delta_2(P)$, то для любой функции $f \in \mathcal{L}_p^{\alpha}(\lambda_k)$ последовательность

$$S_n(f; z) = \sum_{k=1}^n c_k(f) m_k(z; \alpha), \quad n=1, 2, \dots, \quad (3.11)$$

где

$$c_k(f) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) p_k(\zeta; \alpha) d\zeta, \quad k=1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

сходится в метрике $L^p[\rho]$ ($1 < p < +\infty$).

Доказательство. Сначала, для любого $k \geq 1$ оценим коэффициенты $c_k(f)$. Так как $f \in \mathcal{L}_p^{\alpha}(\lambda_k)$, то существует функция $\tilde{f}(z) \in \tilde{H}^p[\alpha]$, такая, что $f(z) = \tilde{f}(z) B_{\alpha}^{-1}(-z)$, $z \in \tilde{\Delta}(\alpha)$. Поэтому, согласно (3.12), учитывая (2.28), после замены $iy = \varphi(\zeta) = -(-\zeta)^{\alpha}$ получаем

$$\begin{aligned} c_k(f) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} f(\zeta) p_k(\zeta; \alpha) d\zeta = \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \frac{\overline{a_{\nu}(\lambda_k^{\alpha})}}{(s_k-1)!} \times \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{\tilde{f}(\zeta) [\varphi'(\zeta)]^{1/q}}{[(-\zeta)^{\alpha} - \lambda_k^{\alpha}]^{p_k-s_k-\nu+1}} d\zeta = \\ &= \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} \frac{\overline{a_{\nu}(\lambda_k^{\alpha})}}{(s_k-1)!} (-1)^{p_k-s_k-\nu+1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(-(-iy)^{1/\alpha}) [(-iy)^{\frac{1}{\alpha}-1}]^{1/p}}{|iy + \lambda_k^{\alpha}|^{p_k-s_k-\nu+1}} dy. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Отсюда, используя оценки (1.14) и условие $\sup_{k=1}^{\infty} |p_k| = P < +\infty$ вво-

дя обозначение $F_{\alpha}(-w) = \tilde{F}(w) = \tilde{f}(-(-w)^{1/\alpha}) [(-w)^{\frac{1}{\alpha}-1}]^{1/p}$, $w \in G^{-}$, приходим к оценке

$$\begin{aligned} |c_k(f)| &\leq \frac{\alpha(\delta, P)^{p_k-s_k}}{(s_k-1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} (\operatorname{Re} \lambda_k^{\alpha})^{p_k-\nu} \frac{1}{(p_k-s_k-\nu)!} |F_{\alpha}^{(p_k-s_k-\nu)}(\lambda_k^{\alpha})| \leq \\ &\leq \alpha(\delta, P) \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} (\operatorname{Re} \lambda_k^{\alpha})^{s_k+\nu} |F_{\alpha}^{(\nu)}(\lambda_k^{\alpha})|. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Заметим также, что $F_{\alpha}(w) \in H^p(G^{+})$, так как $\tilde{F}(w) \in H^p(G^{-})$.

Теперь покажем, что последовательность $\{S_n(f; z)\}_1^{\infty}$ фундаментальна в метрике $L^p[\rho]$ ($1 < p < +\infty$). В самом деле, по теореме Хана-Банаха имеем

$$\|S_n(f; \zeta) - S_m(f; \zeta)\|_{L^p[\rho]} = \sup_{\substack{g \in L^q[\rho] \\ \|g\| < 1}} \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=m+1}^n c_k(f) \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g(\zeta) d\zeta \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{g \in L^q[\rho] \\ |k| < 1}} \sum_{k=m+1}^n |c_k(f)| \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g(\zeta) d\zeta \right|. \quad (3.15)$$

Теперь упростим интеграл в (3.15), пользуясь теоремой 2.3, в силу которой почти для любого $\zeta \in L$,

$$g(\zeta) = g_+(\zeta) - g_-(\zeta),$$

где $g_+(z) \in H^q[\rho]$, а $g_-(z) \in \bar{H}^q[\alpha]$, причем

$$\|g_-\|_{\bar{H}^q[\alpha]} \leq c_p \|g\|_{L^q[\rho]} \leq c_p.$$

Итак, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g(\zeta) d\zeta &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g_+(\zeta) d\zeta + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g_-(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Но поскольку $m_k(z; \alpha) \in H^p[\rho]$, а $g_+(z) \in H^q[\rho]$, то в силу леммы 2.2

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g_-(\zeta) d\zeta = 0 \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (3.17)$$

Таким образом, из (3.16), принимая во внимание (3.17) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} m_k(\zeta; \alpha) g_-(\zeta) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \psi_k(\zeta; \alpha) g_-(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} [m_k(\zeta; \alpha) - \psi_k(\zeta; \alpha)] g_-(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (3.18)$$

где $\psi_k(\zeta; \alpha)$, для любого $k \geq 1$, определяется из (2.25). Пользуясь заменой $\zeta = -(-iy)^{1/\alpha}$, упростим первый интеграл в (3.18)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \psi_k(\zeta; \alpha) g_-(\zeta) d\zeta &= \frac{(s_k-1)!}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{[\alpha(-\zeta)^{\alpha-1}]^{1/p} g_-(\zeta)}{[(-\zeta)^\alpha - \lambda_k^\alpha]^{s_k}} d\zeta = \\ &= (-1)^{s_k} \frac{(s_k-1)!}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \frac{1}{\alpha} (-iy)^{\frac{1}{\alpha}-1} \right|^{1/q} \bar{g}_-(-(-iy)^{1/\alpha})}{[iy + \lambda_k^\alpha]^{s_k}} dy = \\ &= (-1)^{s_k} \bar{g}_-^{(s_k-1)}(-\lambda_k^\alpha) = -\bar{g}_*^{(s_k-1)}(\lambda_k^\alpha), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $\bar{g}_-(w) = g_-((-w)^{1/\alpha}) \left| \frac{1}{\alpha} (-w)^{\frac{1}{\alpha}-1} \right|^{1/q}$, и принадлежит классу

$H^q(G^-)$, а функция $\bar{g}_*(-w) = g_*(w) \in H^q(G^+)$ и

Второй интеграл в (3.18) равен нулю, в силу леммы 2.2, так как для любого $k > 1$ функция $\varphi_k(z; \alpha) = m_k(z; \alpha) - \psi_k(z; \alpha)$, по определению, регулярна в области $\Delta(\alpha)$, порядка $O\left(\frac{1}{|z|^\lambda}\right)$, где $\lambda \geq 1$, т. е. из класса $\bar{H}^p[\alpha]$, $g_-(z) \in \bar{H}^q[\alpha]$.

Поэтому в силу (3.19), а также (3.17), из (3.16) следует, что

$$\left| \int_{L_\varphi} m_k(\zeta; \alpha) g(\zeta) d\zeta \right| = |g_+^{(s_k-1)}(\lambda_k^a)|. \quad (3.21)$$

Итак, из (3.15), учитывая (3.14) и (3.21), по неравенству Гельдера будем иметь

$$\begin{aligned} \|S_n(f; \zeta) - S_m(f; \zeta)\|_{L^p|\rho|} &\leq \sup_{\substack{g_+ \in H^p(G^+) \\ \|g_+\| = C_p}} \alpha(\delta, p) \sum_{k=m+1}^n \left\{ \sum_{v=0}^{p-1} (\operatorname{Re} \lambda_k^a)^{v+\frac{1}{p}} \times \right. \\ &\quad \left. \times |F_+^{(v)}(\lambda_k^a)| \right\} (\operatorname{Re} \lambda_k^a)^{s_k-1+\frac{1}{q}} |g_+^{(s_k-1)}(\lambda_k^a)| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{g_+ \in H^p(G^+) \\ \|g_+\| = C_p}} \alpha(\delta, p) \sigma_{n,m}^{1/p} \left\{ \sum_{k=1}^n (\operatorname{Re} \lambda_k^a)^{q(s_k-1)+1} |g_+^{(s_k-1)}(\lambda_k^a)| \right\}^{1/q}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $\sigma_{n,m} = \sum_{k=m+1}^n \left\{ \sum_{v=0}^{p-1} (\operatorname{Re} \lambda_k^a)^{v+\frac{1}{p}} |F_+^{(v)}(\lambda_k^a)| \right\}^p$.

В силу неравенства

$$\left[\sum_{k=1}^m a_k \right]^p \leq m^{p/q} \sum_{k=1}^m a_k^p,$$

справедливого для любого набора чисел $a_k \geq 0$ ($1 \leq k \leq m < +\infty$), имеем

$$\sigma_{n,m} < \sum_{v=0}^{p-1} P^{p/q} \sum_{k=m+1}^n (\operatorname{Re} \lambda_k^a)^{p v+1} |F_+^{(v)}(\lambda_k^a)|^p = P^{p/q} \sum_{v=0}^{p-1} S_{n,m}(v) = P^{p/q} S_{n,m}(P)$$

причем $S_{n,m}(P) \rightarrow 0$, при $n, m \rightarrow +\infty$, так как для любого v ($0 \leq v < P-1$) по теореме А $S_{n,m}(v) \rightarrow 0$, при $n, m \rightarrow +\infty$.

Отсюда и в силу теоремы В из (3.22), используя (3.20) имеем

$$\begin{aligned} \|S_n(f; \zeta) - S_m(f; \zeta)\|_{L^p|\rho|} &\leq \sup_{\substack{g_+ \in H^p(G^+) \\ \|g_+\| = C_p}} \alpha(\delta; p) P^{p/q} S_{n,m}(P) \|g_+\|_{H^p(G^+)} \leq \\ &\leq c_p P^{p/q} \alpha(\delta; P) S_{n,m}(P) \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 3.3. Если $f_-(z)$ — любая функция из $\bar{H}^p[\alpha]$ ($1 < p < +\infty$), то

$$f(z) = f_-(z) B_\alpha^{-1}(z) - f_*(z) \in \lambda_p^\alpha(|\lambda_k|), \quad (3.23)$$

где

$$f_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_p} \frac{f_-(\zeta)}{B_\alpha(-\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in \tilde{H}^p[\rho]. \quad (3.23')$$

Доказательство. Поскольку $f_-(\zeta)/B_\alpha(-\zeta) \in L^p[\rho]$, то по теореме 2.3 $f_*(z) \in \tilde{H}^p[\alpha]$. Теперь легко заметить, что функция $f(z)$ из (3.23) принадлежит классу $\lambda_p^\alpha(|\lambda_k|)$, т. е. выполняется условие 3.1, так как

$$\int_{L_p} \frac{f(\zeta) B_\alpha(-\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{L_p} \frac{f_-(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{L_p} \frac{f_*(\zeta) B_\alpha(-\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Delta(\rho)$$

и в силу теоремы 2.1 каждый из интегралов справа равен нулю.

3.2. Введем функционалы на пространстве функций $f \in \lambda_p^\alpha(|\lambda_k|)$

$$F_k(f) = \int_{L_p} f(\zeta) \rho_k(\zeta; \alpha) d\zeta, \quad k = 1, 2, \dots$$

и полагая, что $|\lambda_k|_1^\infty$ — последовательность отличных друг от друга комплексных чисел, докажем следующую лемму.

Лемма 3.4. Для любой функции $f \in \lambda_p^\alpha(|\lambda_k|)$ справедливо неравенство

$$\|F_k(f)\| \geq c_p \|\rho_k\|_{L^q(\rho)}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.24)$$

где

$$\|F_k(f)\| = \sup_{\substack{f \in \lambda_p^\alpha(|\lambda_k|) \\ \|f\|_{L^p(\rho)} < 1}} \left| \int_{L_p} f(\zeta) \rho_k(\zeta; \alpha) d\zeta \right|, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (3.25)$$

Доказательство. Если $s_k = 1$, то из (2.28) получим

$$\rho_k(z; \alpha) = \frac{B_\alpha(-z) [\alpha(-z)^{\alpha-1}]^{1/q} \overline{a_0(\bar{\lambda}_k)}}{(-z)^\alpha - \lambda_k^\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (3.26)$$

Теперь воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} \|\rho_k\|_{L^q(\rho)} &= \|\bar{\Omega}_k\|_{L^q} = \|\bar{\Omega}_k/B\|_{L^q} = \\ &= \sup_{\substack{F \in L^p \\ \|F\|_{L^p} < 1}} \left| \overline{a_0(\bar{\lambda}_k)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(iy)}{iy + \lambda_k^\alpha} dy \right|, \quad k = 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (3.27)$$

По теореме Е почти всюду на мнимой оси имеем

$$F(iy) = F_-(iy) - F_+(iy),$$

где

$$F_-(iy) \in H^p(G^-), \quad F_+(iy) \in H^p(G^+),$$

причем

$$\|F_-\|_{H^p(G^-)} \leq M_p \|F_-\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq M_p. \quad (3.28)$$

Так как $[-\lambda_k]i^\infty \in G^-$, то в силу теоремы D

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_+(iy)}{iy + \lambda_k} dy = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

и поэтому из (3.27) следует равенство

$$\|f_-\|_{L^q(\mathbb{R})} = \sup_{\substack{F_- \in H^p(G^-) \\ \|F_-\| \leq M_p}} \left| a_0(\lambda_k) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(iy)}{iy + \lambda_k} dy \right|. \quad (3.29)$$

Если $w = \varphi(z) = -(-z)^a$, то очевидно

$$f_-(z) \equiv F_-(\varphi(z)) [\varphi'(z)]^{1/p} \in \tilde{H}^p[a],$$

причем

$$\|f_-\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|F_-\|_{H^p(G^-)} \leq M_p.$$

В силу леммы 3.3, функция $f(z) = f_-(z) B_a^{-1}(-z) = f_*(z) = \lambda_p^a |\lambda_k|$, где $f_*(z)$ определяется по (3.23'). Далее, поскольку

$$\int_{L_p} \frac{f_*(\zeta) [\varphi'(\zeta)]^{1/q} B_a(-\zeta)}{(-\zeta)^a - \lambda_k^a} d\zeta = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

то интеграл в равенстве (3.29) для любого $k \geq 1$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_-(iy)}{iy + \lambda_k} dy &= i \int_{L_p} \frac{F_-(\varphi(\zeta)) [\varphi'(\zeta)]^{1/p} [\varphi'(\zeta)]^{1/q}}{(-\zeta)^a - \lambda_k^a} d\zeta = \\ &= i \int_{L_p} \frac{f_-(\zeta) [\varphi'(\zeta)]^{1/q}}{(-\zeta)^a - \lambda_k^a} d\zeta - i \int_{L_p} \frac{f_*(\zeta) B_a(-\zeta) [\varphi'(\zeta)]^{1/q}}{(-\zeta)^a - \lambda_k^a} d\zeta = \\ &= i \int_{L_p} \frac{f(\zeta) [\varphi'(\zeta)]^{1/q} B_a(-\zeta)}{(-\zeta)^a - \lambda_k^a} d\zeta. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Из (3.23'), в силу теоремы 2.3 имеем

$$\|f_*\|_{\tilde{H}^p(\mathbb{R})} \leq b_p \|f_-\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

и поэтому из (3.23) следует неравенство

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq (1 + b_p) \|f_-\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq (1 + b_p) M_p = B_p. \quad (3.31)$$

Теперь из (3.29), принимая во внимание (3.30) и (3.31), получаем

$$\|p_k\|_{L^p(\rho)} \leq \sup_{\substack{\|m\|_{L^p(\rho)} < B_p \\ f \in \lambda_k^{\circ} |\lambda_k|}} \left| \int_{L_p} \frac{f(\zeta) a_0(\bar{\lambda}_k) [\varphi'(\zeta)]^{1/q} B_a(-\zeta)}{(-\zeta)^{\alpha} - \lambda_k^{\alpha}} d\zeta \right|.$$

Отсюда окончательно, следуют оценки

$$\begin{aligned} \|p_k\|_{L^p(\rho)} &\leq B_p \sup_{\substack{f \in \lambda_k^{\circ} |\lambda_k| \\ \|m\|_{L^p(\rho)} < 1}} \left| \int_{L_p} f(\zeta) p_k(\zeta; a) d\zeta \right| = \\ &= B_p \|F_k(f)\|, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{3.32}$$

где B_p не зависит от k . Лемма доказана.

Пусть последовательность $\{|\lambda_k|\}_1^{\infty}$ удовлетворяет условию $\sup_{k>1} |p_k| = P < \infty$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. Для того чтобы система рациональных функций $\{m_k(z; a)\}_1^{\infty}$ являлась базисом в замыкании своей линейной оболочки, необходимо и достаточно, чтобы $\{|\lambda_k|\}_1^{\infty} \in \Delta_+(P)$.

Достаточность. Пусть $\{|\lambda_k|\}_1^{\infty} \in \Delta_+(P)$. Тогда в силу леммы 3.2 и теоремы 3.1 для любой функции $f(z) \in \lambda_p^{\circ} |\lambda_k|$ функция

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) m_k(z; a) \tag{3.33}$$

принадлежит классу $\lambda_p^{\circ} |\lambda_k|$ ($1 < p < +\infty$), где ряд сходится абсолютно и равномерно на множестве $\Delta(\rho) \cup \Delta(\bar{z}) / |\overline{-\lambda_k}|_1^{\infty}$ и в метрике $L^p[\rho]$ на L_p . Следовательно, остается показать, что $\Phi(z) \equiv f(z)$, или другими словами, полагая $c_k(f) = 0$ ($1 \leq k < \infty$) и $f \in \lambda_p^{\circ} |\lambda_k|$, покажем, что $f(z) \equiv 0$. Учитывая тот факт, что функция $f \in \lambda_p^{\circ} |\lambda_k|$ представима в виде $f(z) = \bar{f}(z) B_a^{-1}(-z)$, где $\bar{f}(z) \in \bar{H}^p[z]$, воспользуемся представлением (2.35) функции $f(z)$, откуда непосредственно вытекает, что $f(z) \equiv 0$, так как в силу леммы 2.2

$$\int_{L_p} f(\zeta) B_a(-\zeta) F(\zeta; z) d\zeta = \int_{L_p} \bar{f}(\zeta) F(\zeta; z) d\zeta = 0.$$

Необходимость. В предположении $\sup_{k>1} |p_k| = P < \infty$ положим, что система $\{m_k(z; a)\}_1^{\infty}$ является базисом в замыкании своей линейной оболочки, совпадающим с пространством $\lambda_p^{\circ} |\lambda_k|$ в силу теоремы 3.1. Тогда по теореме Банаха [15] для любого $k > 1$ будем иметь

$$\|F_k(f)\| \|m_k\|_{L^p(\rho)} \leq c, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{3.34}$$

где $F_k(f)$ — функционал, заданный на пространстве $\lambda_p^{\circ} |\lambda_k|$ с нормой, определенной по формуле (3.24), а c ($0 < c < +\infty$) не зависит от k .

Очевидно, доказательство достаточно провести для последовательности $\{z_j\}_1^\infty$ отличных друг от друга чисел из $\{i_k\}_1^\infty$, так как при условии $\sup_{k>1} \{p_k\} = P < +\infty$ из $\{z_j\}_1^\infty \in \Delta_2(1)$ следует, что $\{i_k\}_1^\infty \in \Delta_2(P)$.

Из неравенств (3.34), в силу леммы 3.4, имеем

$$\|p_k\|_{L^q(\rho)} \|m_k\|_{L^p(\rho)} \leq c_p^*, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.35)$$

тогда по неравенству Гельдера

$$J = \int_{L^p} |p_k(\zeta; z)| |m_k(\zeta; z)| d|\zeta| \leq c_p^*, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (3.36)$$

Пользуясь представлением (3.26) функции $p_k(z; z)$ и формулой (2.27), в силу которой для $s_k = 1$, $m_k(z; z) = \frac{1}{[2z_k^{\alpha-1}]^{1/q} (z + z_k)}$, оценим интеграл (3.36) снизу.

Тогда учитывая определение (1.10) коэффициентов $a_0(\bar{z}_k^2)$, получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{2 \operatorname{Re} z_k^2}{\sigma_k^\alpha |z_k|^{\frac{\alpha-1}{q}}} \int_{L^p} \frac{|\zeta|^{\frac{\alpha-1}{q}} d|\zeta|}{|(-\zeta)^\alpha - z_k^\alpha| |\zeta + z_k|} = \\ &= \frac{2 \operatorname{Re} z_k^2}{\sigma_k^\alpha |z_k|^{\frac{\alpha-1}{q}}} \int_{L^p} \frac{|\zeta|^{\frac{\alpha-1}{q}} d|\zeta|}{|\zeta^\alpha - z_k^\alpha| |\zeta - z_k|}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где

$$\sigma_k^\alpha = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^\infty \left| \frac{z_k^\alpha - z_j^\alpha}{z_k^\alpha + z_j^\alpha} \right|.$$

Полагая $\zeta = r e^{\pm i \frac{\pi}{2\alpha}}$, $z_k = |z_k| e^{i\varphi_k}$, после замены $r/|z_k| = t$ интеграл J в (3.37) приводится к виду

$$\begin{aligned} J &= \frac{2 \operatorname{Re} z_k^2}{\sigma_k^\alpha |z_k|^\alpha} \left[\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha-1}{q}} dt}{|t e^{i(\frac{\pi}{2\alpha} - \varphi_k)} - 1| |t^\alpha e^{i\alpha(\frac{\pi}{2\alpha} - \varphi_k)} - 1|} + \right. \\ &\left. + \int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha-1}{q}} dt}{|t e^{-i(\frac{\pi}{2\alpha} + \varphi_k)} - 1| |t^\alpha e^{-i\alpha(\frac{\pi}{2\alpha} + \varphi_k)} - 1|} \right] = \frac{2 \cos \alpha \varphi_k}{\sigma_k^\alpha} [U_1 + U_2]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Легко проверить, что интеграл J ограничен снизу, если $|\varphi_k| \leq \varphi < \frac{\pi}{2\alpha}$, $k = 1, 2, \dots$, так как ограничены интегралы U_1 и U_2 .

Поэтому, учитывая тот факт, что возможно $\varphi_k \rightarrow \pm \frac{\pi}{2\alpha}$, сначала оценим выражение $\cos \alpha \varphi_k \times U_1$. Для этого пользуясь обозначением $\Delta_k = \frac{\pi}{2\alpha} - \varphi_k$ и принимая во внимание, что $\sin x \approx x$ при $x \rightarrow 0$, получаем оценки

$$|te^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \varphi_k\right)} - 1| = \left[t^2 + 1 - 2t \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \varphi_k\right) \right]^{1/2} \leq [(t-1)^2 + t\Delta_k^2]^{1/2},$$

$$|t^\alpha e^{i\alpha\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \varphi_k\right)} - 1| = \left[t^{2\alpha} + 1 - 2t^\alpha \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \alpha\varphi_k\right) \right]^{1/2} \leq [(t^\alpha - 1)^2 + t^\alpha \Delta_k^2]^{1/2}.$$

Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ следует неравенство

$$\begin{aligned} \cos \alpha \varphi_k \times U_1 &\geq b \int_0^{+\infty} \frac{\Delta_k t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} dt}{[(t-1)^2 + t\Delta_k^2]^{1/2} \times [(t^\alpha - 1)^2 + t^\alpha \Delta_k^2]^{1/2}} > \\ &\geq b^\varepsilon \int_{1-\varepsilon\Delta_k}^{1+\varepsilon\Delta_k} \frac{\Delta_k dt}{[(t-1)^2 + t\Delta_k^2]^{1/2} \times [(t^\alpha - 1)^2 + t^\alpha \Delta_k^2]^{1/2}} > \\ &\geq c \int_{1-\varepsilon\Delta_k}^{1+\varepsilon\Delta_k} \frac{\Delta_k dt}{(t-1)^2 + \Delta_k^2} = 2c \int_0^{\varepsilon\Delta_k} \frac{\Delta_k dt}{t^2 + \Delta_k^2} = 2c \int_0^\varepsilon \frac{du}{u^2 + 1} = A_1. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Аналогично учитывая, что возможно $\varphi_k \rightarrow -\frac{\pi}{2\alpha}$, получим

$$\cos \alpha \varphi_k \times U_2 \geq A_2$$

Таким образом, из (3.36), (3.38) и (3.39) будем иметь

$$\frac{A_1 + A_2}{\sigma_k} < J \leq c_p^*$$

или

$$\sigma_k > \frac{A_1 + A_2}{c_p^*} > 0.$$

Теорема доказана.

В заключение считаю своим долгом поблагодарить профессора М. М. Джрбашяна за постановку задачи и внимание при выполнении этой работы, а также В. М. Мартиросяна за ценные замечания.

Շ. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Ինսպիրացիոն ֆունկցիաների ոչ լրիվ սխեմաների բազիսությունը անկյունային տիրույթներում (ամփոփում)

Գիտություն $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ ($0 < |\arg \lambda_k| < \frac{\pi}{2\alpha}$), $\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$ կոմպլեքս թվերի շարքականությունը բավարարում է

$$\inf_{k > 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_k + \lambda_j}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k^{\alpha} - \lambda_j^{\alpha}}{\lambda_k^{\alpha} + \bar{\lambda}_j^{\alpha}} \right| \geq \delta > 0 \quad (a)$$

պայմանին:

Օգտագործելով $\bar{D}(z) = \left\{ 0 < |\arg(-z)| < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}$ անկյունային տիրույթի կոնֆորմ արտապատկերումը $G^{-} = \{w; \operatorname{Re} w < 0\}$ կիսաարթուսյան վրա, կառուցվում է հետևյալ ֆունկցիաների սխեմանը՝

$$m_k(z; \alpha) = \sum_{j=1}^{s_k} \frac{a_j^{(k)}(z)}{(z + \lambda_k)^j}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (b)$$

(որտեղ s_k -ը λ_k -ի հանդես գալու կարգն է $(\lambda_j)_{j=1}^k$ -ում և $\sup_{k > 1} s_k < +\infty$) (ցույց է տրվում,

որ (a) պայմանը անհրաժեշտ է և բավարար. որպեսզի սխեմանը կազմի բազիս իր գծային թաղանթում):

Sh. A. GRIGORIAN. On basisness of noncomplete systems of rational functions in an angular domain (summary)

Let $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ ($0 < |\arg \lambda_k| < \frac{\pi}{2\alpha}$), $\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$ be a sequence of complex number satisfying the following condition

$$\inf_{k > 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_k + \lambda_j}}^{\infty} \left| \frac{\lambda_k^{\alpha} - \lambda_j^{\alpha}}{\lambda_k^{\alpha} + \bar{\lambda}_j^{\alpha}} \right| \geq \delta > 0. \quad (a)$$

Using the conform mapping of the angular domain $\bar{D}(z) = \left\{ 0 < |\arg(-z)| < \frac{\pi}{2\alpha} \right\}$ on the $G^{-} = \{w; \operatorname{Re} w < 0\}$ half-plane, one can construct the following system of functions

$$m_k(z; \alpha) = \sum_{j=1}^{s_k} \frac{a_j^{(k)}(z)}{(z + \lambda_k)^j}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (b)$$

(where s_k is the multiplicity of λ_k in $(\lambda_j)_{j=1}^k$ and $\sup_{k > 1} \{s_k\} = P < +\infty$).

The paper proves that (a) condition is necessary and sufficient for the system (b) to form bases in their linear hull.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—409.
2. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшие приближения ядра Коши на вещественной оси, Мат. сб., 95 (137), № 3 (11), 1974, 418—444.
3. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_p , Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974, 339—373.
4. М. М. Джрбашян. Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классе H^p , ДАН СССР, 234, № 3, 1977, 517—520.
5. Г. М. Айрапетян. О базисе рациональных функций в подпространствах классов Харди H_p ($1 < p < +\infty$), Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 429—450.
6. Г. М. Айрапетян. О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., X, № 2, 1975, 133—152.
7. Г. М. Айрапетян. Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогональных систем рациональных функций в классах H_p Харди, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XII, № 4, 1977, 262—277.
8. P. Duren. Theory of H^p Spaces, Ac. Press New-York and London, 1970.
9. Ш. А. Григорян. Об одном свойстве функций из H^p ($0 < p < +\infty$) в полуплоскости, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XII, № 5, 1977, 335—340.
10. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
11. М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958; Сиб. мат. ж., I, № 3, 1960.
12. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. «Наука», М., 1966.
13. С. А. Акопян. Теорема о двух постоянных для функций класса H_p , Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., II, № 2, 1967, 96—114.
14. А. М. Седлецкий. Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости, Мат. сб., 96 (138), I, 1975, 75—82.
15. А. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа, М., 1965.