Г. М. АЙРАПЕТЯН

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ПОДКЛАССАХ H_1 И H_∞
 И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С ИНТЕГРАЛОМ
 КОШИ

(а) Пусть $\{a_k\}_1^\infty$ — последовательность попарно различных точек из единичного круга $|z| < 1$, удовлетворяющих условию Бляшке

$$\sum_1^\infty (1 - |a_k|) < \infty, \quad (1)$$

а $B(z)$ — произведение Бляшке с нулями $\{a_k\}_1^\infty$:

$$B(z) = \prod_{k=1}^\infty \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z} \frac{|a_k|}{a_k}.$$

Пусть, далее, H_p , $(1 \leq p \leq \infty)$ — класс Харди с нормой

$$\|f\|_p = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p},$$

при $1 \leq p < \infty$ и

$$\|f\|_\infty = \sup_{|z| < 1} |f(z)|, \text{ при } p = \infty.$$

Следуя М. М. Джрбашяну [1], обозначим через $H_p\{a_k\}$ $(1 \leq p \leq \infty)$ класс функций, определенных вне точек окружности $|z| = 1$ и удовлетворяющих условиям:

1. $f(z) \in H_p$, при $|z| < 1$;

2. $f(z) = B(z) \tilde{f}\left(\frac{1}{z}\right)$, при $|z| > 1$, причем $\tilde{f}(z) \in H_p$ и $\tilde{f}(0) = 0$;

3. Угловые граничные значения функции $f(z)$ изнутри и извне окружности $|z| = 1$ почти всюду совпадают.

б) Пусть оператор T_p каждой функции $f \in H_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ сопоставляет последовательность

$$T_p(f) \rightarrow \{f(a_k)(1 - |a_k|^2)^{1/p}\}_1^\infty, \quad (2)$$

при $1 \leq p < \infty$, и

$$T_\infty(f) \rightarrow \{f(a_k)\}_1^\infty, \quad (3)$$

при $p = \infty$.

В работе [2] Л. Карлесоном было доказано, что если последовательность $\{a_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\inf_{k=1, 2, \dots} \prod_{j=1}^{j+k} \left| \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a}_j a_k} \right| = \delta > 0, \quad (4)$$

то

$$T_-(H_-) = l_-. \quad (5)$$

Позже в работе [3] Шапиро и Шилдс при условии (4) установили включение $T_p(H_p) \subset l_p$ ($0 < p < \infty$), а также доказали, что это условие необходимо и достаточно для справедливости равенства $T_p(H_p) = l_p$ ($1 \leq p < \infty$). С другой стороны, Кабайла [4] установил, что при том же условии (4) имеет место включение $l_p \subset T_p(H_p)$, $p < 1$. Таким образом, условие (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$T_p(H_p) = l_p \quad (0 < p < \infty). \quad (6)$$

Тем самым, для любой последовательности $\{w_k\}_1^\infty$, подчиненной условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^p (1 - |a_k|^2) < \infty \quad (p < \infty), \quad (7)$$

существует функция $f(z) \in H_p$ такая, что

$$f(a_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

и обратно, для любой функции $f(z) \in H_p$ ($p < \infty$) выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f(a_k)|^p (1 - |a_k|^2) < \infty. \quad (9)$$

Очевидно, что при условии (4) решение интерполяционной задачи (7)–(8) не единственно.

В работе автора [5] было доказано, что при условии (4) интерполяционная задача (7)–(8) разрешима в $h_p\{a_k\}$ ($1 < p < \infty$) однозначно и интерполирующую функцию можно представить в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \Omega_k(z), \quad (10)$$

где

$$\Omega_k(z) = \frac{B(z)}{(z - a_k) B'(a_k)}. \quad (11)$$

Тем самым, если $\{a_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (4), то будем записывать так: $\{a_k\}_1^\infty \in \Delta_1$, то при $1 < p < \infty$ выполняется соотношение

$$T_p(\lambda_p\{a_k\}) = l_p. \quad (12)$$

(в) В настоящей работе рассматриваются аналогичные вопросы для пространств $H_1\{z_k\}$ и $H_-\{z_k\}$. Полученные результаты используются также для исследования следующего вопроса: Пусть $B(z)$ — некоторое произведение Бляшке с нулями $\{z_k\}_1^\infty$. Рассмотрим функцию

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad f \in H_p \quad (1 \leq p \leq \infty). \quad (13)$$

Каким должно быть произведение Бляшке, чтобы для любой функции $f \in H_1$ (или H_-) соответствующая функция $F_f(z)$ принадлежала классу H_1 (или H_-)? Приведем краткое содержание работы.

В § 1 приводятся важные для дальнейшего леммы, в основе доказательства которых лежит формула М. М. Джрбашяна (см. [6]) о представлении ядра Коши посредством биортогональных систем.

В § 2 доказывается, что при $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta_1$ интерполяционная задача (7)–(8) при $p = 1$ неразрешима в $H_1\{z_k\}$ (теорема 1). На основании этого результата в теореме 2 доказывается, что условие конечности произведения Бляшке $B(z)$ необходимо и достаточно для того, чтобы для любой функции $f \in H_1$ соответствующая функция $F_f(z)$ принадлежала классу H_1 . По поводу этой теоремы отметим, что недавно другими методами Д. Сидженжом [7] был получен более сильный результат такого же рода, где вместо произведения Бляшке стоит любая внутренняя функция.

Ситуация иная в случае $p = \infty$. А именно, в теореме 3 доказывается следующее утверждение: для справедливости соотношения

$$T_-(\lambda_-\{z_k\}) = l_- \quad (14)$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяла равномерному условию Фростмана (см. статью С. А. Виноградова и В. П. Хавина [8]):

$$\sup_{|\zeta|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - \bar{\zeta} z_k|} < \infty. \quad (15)$$

В теореме 4 доказывается, что если произведение Бляшке $B(z)$ представимо в виде $B(z) = B_1(z) \cdots B_m(z)$, где $B_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) произведения Бляшке, нули которых удовлетворяют условиям (4) и (15), то для любой функции $f(z) \in H_-$ соответствующая функция $F_f(z)$ из (13) принадлежит классу H_- . В последней теореме (теорема 5) приводится одно условие для нулей произведения Бляшке, при котором такое утверждение не верно, т. е. не для любой функции $f \in H_-$ соответствующая функция $F_f(z)$ принадлежит H_- .

§ 1. Предварительные леммы

(а). Для любого целого $n \geq 1$ введем в рассмотрение функции

$$\Omega_{n,k}(z) = \frac{B_n(z)}{(z - a_k) B'_n(a_k)} = \frac{B_n(z) (1 - |a_k|^2)}{(z - a_k) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a}_j a_k}} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (1.1)$$

где

$$B_n(z) = \prod_{j=1}^n \frac{a_j - z}{1 - \bar{a}_j z} \frac{|a_j|}{a_j}.$$

Следующая лемма является частным случаем более общей леммы из работы М. М. Джрбашяна [6].

Лемма 1. Для произвольных значений переменных z и ζ имеет место тождество

$$\frac{1}{1 - \bar{\zeta} z} = \sum_{k=1}^n \overline{r_k(\zeta)} \Omega_{n,k}(z) + \frac{\overline{B_n(\zeta)} B_n(z)}{1 - \bar{\zeta} z}, \quad (1.2)$$

где

$$r_k(z) = \frac{1}{1 - z \bar{a}_k} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (1.3)$$

Сформулируем одну лемму, характеризующую классы $\lambda_p\{a_k\}$ ($1 \leq p \leq \infty$), которая в случае $p=2$ установлена в работе М. М. Джрбашяна [1], а в общем случае — в работе автора [5].

Лемма 2. Для того чтобы $f(z) \in H_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) принадлежала классу $\lambda_p\{a_k\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0, \quad |z| < 1. \quad (1.4)$$

Как следствие из лемм 1 и 2 получаем следующее утверждение

Лемма 3. Если $f(z) \in \lambda_p\{a_k\}$ ($1 \leq p \leq \infty$) и $f(a_k) = 0$ ($k=1, 2, \dots$), то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Применяя тождество (1.2) для любой функции $f(z) \in H_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) будем иметь

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{1 - \bar{\zeta} z} |d\zeta| = \sum_{k=1}^n f(a_k) \Omega_{n,k}(z) + \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Обозначая

$$\bar{B}_n(\zeta) = \prod_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k - \zeta}{1 - \bar{a}_k \zeta} \frac{|a_k|}{a_k},$$

для любого z ($|z| < 1$) будем иметь

$$\left| \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z} - \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z} \right| \ll$$

$$\ll \frac{1}{1-|z|} \int_{|\zeta|=1} |f(\zeta) - \tilde{B}_n(\zeta) f(\zeta)| |d\zeta| \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (1.5)$$

так как (см. [9])

$$\|\tilde{B}_n(\zeta) - 1\|_{L_1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

(6) Нам необходима также следующая

Лемма 4. Пусть $\{a_k\}_1^\infty \in \Delta_1$, тогда для любой функции $f(z) \in H_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) имеет место тождество

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f(a_k) \Omega_k(z) + \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z}, \quad (1.6)$$

где ряд сходится абсолютно и равномерно вне замыкания множества $E = \{1/\bar{a}_k\}_1^\infty$.

Доказательство. Поскольку $\{a_k\}_1^\infty \in \Delta_1$, то

$$|\delta_k| > \delta > 0 \quad (1 \leq k < \infty) \quad \text{и} \quad \sum_1^{\infty} |f(a_k)|(1-|a_k|^2) < \infty,$$

где

$$\delta_k = \prod_{\substack{j+k \\ j=1}}^{\infty} \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a}_j a_k} \frac{|a_j|}{a_j}.$$

Значит ряд в (1.6) или, что то же, ряд

$$\tilde{f}(z) = \sum_1^{\infty} \frac{f(a_k)}{(z-a_k)} \frac{B(z)(1-|a_k|^2)}{\delta_k} \quad (1.7)$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве дополнения множества E и там определяет аналитическую функцию $\tilde{f}(z)$.

Применяя формулу (1.2) леммы 1, для любой функции $f(z) \in H_p$ ($1 \leq p \leq \infty$), как и в лемме 3, будем иметь

$$f(z) = \sum_{k=1}^n f(a_k) \Omega_{n,k}(z) + \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{f(a_k) B_n(z)(1-|a_k|^2)}{(z-a_k) \delta_{n,k}} + \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z}, \quad (1.8)$$

где

$$\delta_{n,k} = \prod_{\substack{j+k \\ j=1}}^n \frac{a_j - a_k}{1 - \bar{a}_j a_k} \frac{|a_j|}{a_j}.$$

Так как согласно (1.5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv \frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z},$$

причем сходимость равномерна на любом компакте из $|z| < 1$, то для доказательства леммы надо установить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(z) \sum_{k=1}^n \frac{f(a_k)(1-|a_k|^2)}{(z-a_k)\delta_{n,k}} = \tilde{f}(z) \quad (1.9)$$

для любого z из единичного круга $|z| < 1$. С этой целью для заданных $0 < r < 1$ и $\varepsilon > 0$ возьмем $N_0 > 0$ так, чтобы при $|z| \leq r$ выполнялось неравенство

$$\sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{|f(a_k)|(1-|a_k|^2)}{|z-a_k|\delta_k} < \varepsilon.$$

Поскольку $|\delta_{N,k}| > \delta_k > \delta$, то для $|z| \leq r$ и $N > N_0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=1}^N \frac{f(a_k)(1-|a_k|^2)}{(z-a_k)\delta_{N,k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(a_k)(1-|a_k|^2)}{(z-a_k)\delta_k} \right| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{N_0} \frac{|f(a_k)|(1-|a_k|^2)}{|z-a_k|} \left| \frac{1}{\delta_{N,k}} - \frac{1}{\delta_k} \right| + \\ & + \sum_{k=N_0+1}^N \frac{|f(a_k)|(1-|a_k|^2)}{|z-a_k|\delta_{N,k}} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{|f(a_k)|(1-|a_k|^2)}{|z-a_k|\delta_k} \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{N_0} \frac{|f(a_k)|(1-|a_k|^2)}{|z-a_k|} \left| \frac{1}{\delta_{N,k}} - \frac{1}{\delta_k} \right| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Так как $\delta_{N,k} \rightarrow \delta_k$ ($N \rightarrow \infty$), то для фиксированного $N_0 > 0$ и $z \neq a_k$ ($k = 1, 2, \dots$) при $N \rightarrow \infty$ будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{N_0} \frac{|f(a_k)|(1-|a_k|^2)}{|z-a_k|} \left| \frac{1}{\delta_{N,k}} - \frac{1}{\delta_k} \right| \rightarrow 0.$$

Тем самым при $z \neq a_k$, ($k = 1, 2, \dots$) соотношение (1.9) доказано, а при $z = a_k$ ($k = 1, 2, \dots$) его справедливость очевидна.

§ 2. Основные теоремы

2.1. (а) Сначала рассмотрим случай $p = 1$.

Теорема 1. Пусть $\{a_k\}_1^{\infty} \in \Delta_1$, тогда имеет место строгое включение

$$T_1(\lambda_1 | a_k) \subset l_1. \quad (2.1)$$

Доказательство. Допустим противное

$$T_1(\lambda_1 | a_k) = l_1. \quad (2.2)$$

Тогда из леммы 3 будет следовать, что оператор T_1 взаимнооднозначно отображает пространство $\lambda_1 \{a_k\}$ на l_1 . Применяя теорему о замкнутом графике, заключаем, что оператор T_1^{-1} , обратный к оператору T_1 , есть ограниченный оператор из l_1 на $\lambda_1 \{a_k\}$.

Из лемм 2 и 4 следует, что для любой последовательности $\{w_k\}_1^\infty$, удовлетворяющей условию

$$\sum_1^\infty |w_k| (1 - |a_k|^2) < \infty, \quad (2.3)$$

существует единственная функция $f(z) \in \lambda_1 \{a_k\}$ такая, что

$$f(a_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

и эту функцию можно представить в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_1^\infty w_k \Omega_k(z) = B(z) \sum_1^\infty \frac{w_k (1 - |a_k|^2)}{(z - a_k) \delta_k}. \quad (2.5)$$

Предполагая, что $z=1$ есть предельная точка для последовательности $\{a_k\}_1^\infty$ (что не нарушает общности), возьмем некоторую последовательность $\{w_k\}_1^\infty$, удовлетворяющую условиям

$$\sum_1^\infty |w_k| (1 - |a_k|^2) < \infty,$$

$$\sum_1^\infty \frac{w_k (1 - |a_k|^2)}{\delta_k} \log \left(- \frac{1 + a_k}{1 - a_k} \right) = \infty. \quad (2.6)$$

Из ограниченности оператора T_1^{-1} следует, что существует число C ($0 < C < \infty$) такое, что

$$\sup_{n=1, 2, \dots} \left\| B(z) \sum_1^n \frac{w_k (1 - |a_k|^2)}{(z - a_k) \delta_k} \right\|_{L_1} < C. \quad (2.7)$$

Применяя теорему Хана-Банаха, получим

$$\begin{aligned} \left\| B(z) \sum_1^n \frac{w_k (1 - |a_k|^2)}{(z - a_k) \delta_k} \right\|_{L_1} &= \left\| \sum_1^n \frac{w_k (1 - |a_k|^2)}{(z - a_k) \delta_k} \right\|_{L_1} = \\ &= \sup_{\substack{g \in L_\infty \\ \|g\|_\infty < 1}} \left| \int_{|z|=1} \sum_1^n \frac{w_k (1 - |a_k|^2)}{(\zeta - a_k) \delta_k} g(\zeta) |d\zeta| \right|. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Пусть $g(\zeta) = g(e^{i\theta})$ определена так:

$$g(e^{i\theta}) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0, & \text{если } \pi < \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

Тогда из (2.8) будем иметь

$$\left| B(z) \sum_1^n \frac{w_k (1 - |a_k|^2)}{(z - a_k) \delta_k} \right| \geq \left| \sum_1^n \frac{w_k (1 - |z_k|^2)}{\delta_k} \log \left(-\frac{1 + a_k}{1 - a_k} \right) \right|.$$

Учитывая (2.6), получим противоречие с (2.7), тем самым теорема доказана.

(б) Пусть $B(z)$ — некоторое произведение Бляшке с нулями $\{z_k\}_1^\infty$. Каждой функции $f(z) \in H_p$ ($1 \leq p \leq \infty$) сопоставим функцию

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Как следствие теоремы 1 получаем следующую теорему.

Теорема 2. Для того чтобы для любой функции $f(z) \in H_1$ функция $F_f(z)$ принадлежала классу H_1 , необходимо и достаточно, чтобы $B(z)$ было конечным произведением Бляшке.

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Докажем необходимость. Легко заметить, что можно предполагать, что последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию Л. Карлесона (4). Тогда учитывая теорему Шапиро и Шилдса из лемм 4 и 2 заключаем, что для любой последовательности $\{w_k\}_1^\infty$, удовлетворяющей условию (2.3), функция

$$\tilde{f}(z) = \sum_1^\infty w_k \Omega_k(z)$$

принадлежит классу $\lambda_1\{z_k\}$, иначе говоря, интерполяционная задача (7)–(8) разрешима в $\lambda_1\{z_k\}$ для любой последовательности, удовлетворяющей условию (2.3). Но это противоречит теореме 1.

Теорема доказана.

2.2. (а) Случай $p = \infty$. Будем говорить, что последовательность $\{z_k\}$ удовлетворяет равномерному условию Фростмана, если

$$\sup_{|\zeta|=1} \sum_{k=1}^\infty \frac{1 - |a_k|^2}{|1 - \bar{\zeta} a_k|} = M < \infty. \quad (2.9)$$

Справедлива следующая

Теорема 3. Если $\{z_k\}_1^\infty \in \Delta_p$, то для справедливости соотношения

$$T_\infty(\lambda_\infty\{z_k\}) = l_\infty \quad (2.10)$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяла условию (2.9).

Доказательство. Необходимость. Из лемм 2, 3 и 4 следует, что если выполняется (2.10), то для любой последовательности $w = \{w_k\}_1^\infty \in l_\infty$ существует единственная функция $f_w(z) \in \lambda_\infty\{z_k\}$, удовлетворяющая условиям

$$f_w(a_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

и эту функцию можно представить в виде ряда

$$f_w(z) = \sum_1^{\infty} w_k \Omega_k(z) = \sum_1^{\infty} w_k \frac{B(z)(1-|a_k|^2)}{(z-a_k)\delta_k}. \quad (2.12)$$

Применяя теорему о замкнутом графике, можем утверждать, что существует некоторая постоянная C ($0 < C < \infty$) такая, что для любой последовательности $w = \{w_k\}_1^{\infty} \in l_{\infty}$, $\|w\|_{\infty} \leq 1$ и для любого целого $n > 0$ будет выполняться неравенство

$$\|f_w\|_z = \left\| \sum_1^n \frac{w_k(1-|a_k|^2)}{(z-a_k)\delta_k} \right\|_{|z|=1} = \max_{|z|=1} \left| \sum_1^n \frac{w_k(1-|a_k|^2)}{(z-a_k)\delta_k} \right| < C, \quad (2.13)$$

в частности, если для z ($|z|=1$) положить

$$w_j = \begin{cases} \exp(-i \arg(z-a_j)\delta_j), & j \leq n, \\ 0, & j > n, \end{cases}$$

то будем иметь

$$\sum_1^n \frac{1-|a_k|^2}{|z-a_k|\delta_k} < C, \quad |z|=1, \quad n > 1, \quad (2.14)$$

что эквивалентно условию (2.9).

Достаточность. Так как $|\delta_k| \geq \delta$ ($k=1, 2, \dots$), то очевидно, что для любой последовательности $\{w_k\}_1^{\infty} \in l_{\infty}$ ряд

$$f(z) = \sum_1^{\infty} w_k \Omega_k(z) \quad (2.15)$$

сходится абсолютно и равномерно вне замыкания множества $E = \{1/\bar{a}_k\}_1^{\infty}$ и там, определяет некоторую аналитическую функцию. Обозначив

$$S_n(z) = \sum_1^n w_k \Omega_k(z), \quad (2.16)$$

согласно (2.9) будем иметь

$$\begin{aligned} \|S_n(z)\|_{L_{\infty}} &= \sup_{\substack{g \in L_1 \\ \|g\|_1=1}} \left| \int_{|\zeta|=1} \sum_1^n \frac{w_k(1-|a_k|^2)}{(\zeta-a_k)\delta_k} g(\zeta) |d\zeta| \right| < \\ &\leq \sup_{\substack{g \in L_1 \\ \|g\|_1=1}} \int_{|\zeta|=1} \sum_1^n \frac{|w_k|(1-|a_k|^2)}{|1-\bar{\zeta}a_k|\delta_k} |g(\zeta)| \leq \|w\|_{\infty} \cdot M. \end{aligned}$$

Так что функция из (2.15) принадлежит классу $\lambda_{\infty}\{a_k\}$ и $f(a_k) = w_k$ ($k=1, 2, \dots$), и теорема доказана.

(6) Теорема 4. Пусть $B_1(z), \dots, B_m(z)$ ($m \geq 1$) — произведения Бляшке, нули которых удовлетворяют условиям (4) и (2.9), и $B(z) = B_1(z) \cdots B_m(z)$. Тогда для любой функции $f(z) \in H_{\infty}$ функция

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad (|z| < 1)$$

принадлежит классу H_∞ .

Доказательство. Из леммы 4 для любой функции $f(z) \in H_\infty$ при $k=1, 2, \dots, m$ имеем

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} f(z_j^{(k)}) \frac{B_k(z)}{(z - z_j^{(k)}) B_k(z_j^{(k)})} + \frac{B_k(z)}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{B_k(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad (2.17)$$

где $\{z_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$ ($k=1, 2, \dots$) — нули функции $B_k(z)$ ($k=1, 2, \dots$). Применяя здесь теорему 3, заключаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{B_k(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H_\infty \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (2.18)$$

и наша теорема при $m=1$ доказана.

Из (2.17) и (2.18) следует также, что каждую функцию $f(z) \in H_\infty$ можно представить в виде

$$f(z) = f_1(z) + B_m(z) f_2(z), \quad (2.19)$$

где $f_1(z) \in \lambda_\infty \{z_k\}$ и $f_2(z) \in H_\infty$.

Предположим теперь, что для любой функции $f(z) \in H_\infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{B_1(\zeta) \cdots B_{m-1}(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H_\infty. \quad (2.20)$$

Тогда используя (2.19), будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f_1(\zeta) + B_m(\zeta) f_2(\zeta)}{B_1(\zeta) \cdots B_m(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f_1(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f_2(\zeta)}{B_1(\zeta) \cdots B_{m-1}(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из определения класса $\lambda_\infty \{z_k^m\}$ следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f_1(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{B_m(\zeta) \bar{f}_1(1/\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\bar{f}_1(1/\zeta)}{B_1(\zeta) \cdots B_{m-1}(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \equiv 0 \quad (|z| < 1), \end{aligned}$$

так что из (2.21), учитывая (2.20), будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \in H_\infty$$

и, тем самым, теорема доказана.

(в) Предположим теперь, что последовательность нулей $\{z_k\}_1^\infty$ произведения Бляшке $B(z)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{|\zeta|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - |z_k|^2}{|1 - \bar{\zeta} z_k|} = \infty \quad (2.22)$$

(в частности, последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (2.22), если она содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке единичной окружности по некасательному пути).

Теорема 5. Если последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ содержит хотя бы одну подпоследовательность, удовлетворяющую условиям (2.22) и (4), то существует функция $f(z) \in H_\infty$ такая, что функция

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

не принадлежит классу H_∞ .

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2, только вместо теоремы Шапиро и Шилдса надо воспользоваться теоремой Карлесона.

Замечание. Отметим, что можно привести пример последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, удовлетворяющей условиям (1) и (2.22), которая не содержит ни одной подпоследовательности, одновременно удовлетворяющей условиям (2.22) и (4). Покажем, как можно построить такую последовательность. Пусть последовательность $\{a_k\}_1^\infty$ ($|a_k| < 1$) удовлетворяет условию (2.9). Пусть, далее, $K_n = \{z; |z - a_k| |1 - \bar{a}_k z|^{-1} < \rho_k\}$, $\rho_k \downarrow 0$, такая последовательность непересекающихся кругов из $|z| < 1$, что любая последовательность $\{w_j\}_1^\infty$ ($w_j \in K_j$) удовлетворяет условию (2.9) (о возможности построения таких кругов K_j см. [7]). Если ζ_0 ($|\zeta_0| = 1$) — предельная точка для последовательности $\{a_k\}_1^\infty$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} 1/|1 - \bar{\zeta}_0 a_k| = \infty$. Значит для некоторой последовательности натуральных чисел $m_j \downarrow \infty$ будем иметь

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1 - |a_j|^2) m_j < +\infty,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - |a_j|^2}{(1 - \bar{\zeta}_0 a_j)} m_j = +\infty.$$

Тогда легко видеть, что в каждом круге K_j можно выбрать m_j различных точек, так чтобы последовательность $\{z_j\}_1^\infty$ всех этих точек удовлетворяла условиям (1) и (2.22). Остается заметить, что в силу выбора кругов K_j и того факта, что $\{z_j\}_1^\infty \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$, как только некоторая подпоследовательность последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (4), то она удовлетворяет также условию (2.9).

2. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. H_1 և H_∞ դասերի ենթադասերում ինտերպոլյացիայի մասին և Կոշի ինտեգրալի հետ կապված որոշ հարցեր (ամփոփում)

Այս աշխատանքում դիտարկվում են ինտերպոլյացիայի հարցերը $\lambda_1\{z_k\} \subset H_1$ և $\lambda_\infty\{z_k\} \subset H_\infty$ ենթադասերում: Բացի այդ ստացված արդյունքները կիրառվում են հետևյալ հարցի ուսումնասիրության համար: Ինչպիսի՞ն պետք է լինի $B(z)$ Բլաշկեի արտադրյալը, որպեսզի ցանկացած $f \in H_1$ (կամ H_∞) համար

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

ֆունկցիան պատկանա H_1 -ին (կամ H_∞ -ին):

G. M. AIRAPETIAN. About interpolation for subclasses from H_1 and H_∞ and some questions connected with integral Coushe (summary)

Some interpolation problems in subspaces $\lambda_1\{z_k\} \subset H_1$ and $\lambda_\infty\{z_k\} \subset H_\infty$ are investigated. The results are applied in investigation of the following problem. Describe the Blaschke product $B(z)$ such that for every function $f \in H_1$ (or H_∞)

$$F_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

will lie in H_1 (or in H_∞).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. М. Джрбашян. Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967, 3—51.
2. L. Carleson. An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., 80, 1958, 921—930.
3. H. S. Shapiro, A. L. Shields. On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
4. В. Кабайла. Интерполяционные последовательности для классов H_p в случае $p < 1$, Liet. matem. rink., III, 1, 1963, 141—147.
5. Г. М. Айрапетян. О базисе рациональных функций в подпространствах классов H_p ($1 < p < \infty$), Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 6, 1973, 429—450.
6. М. М. Джрбашян. Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—403.
7. D. A. Stegenga. Bounded Toeplitz operators on H' and application of the duality between H' and the functions of bounded mean oscillation., Amer. J. Math., 98, № 3, 1976, 573—589.
8. С. А. Виноградов, В. П. Хавин. Свободная интерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 47, 1974, 15—44.
9. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.