ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIII, №№ 5—6, 1978 Математика

А. И. ПЕТРОСЯН, Г. М. ХЕНКИН

РЕШЕНИЕ С РАВНОМЕРНОЙ ОЦЕНКОЙ $\bar{\partial}$-УРАВНЕНИЯ В ВЕЩЕСТВЕННО НЕВЫРОЖДЕННОМ ПОЛИЭДРЕ ВЕЙЛЯ

Введение

Настоящая статья посвящена исследованию разрешимости уравнения

$$\bar{\partial} u = f \tag{1}$$

в полиэдре Вейля пространства $\mathbf{C}^2$. Здесь u—неизвестная функция, $f = f_1\, d\bar{z}_1 + f_2\, d\bar{z}_2$—заданная форма типа (0,1),

$$\bar{\partial} u = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_1} d\bar{z}_1 + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_2} d\bar{z}_2.$$

Полиэдром Вейля называют ограниченную область в $\mathbf{C}^2$ вида

$$D = \{z \in \mathbf{C}^2 \colon |\chi_i(z)| < 1,\ i = 1, 2, \cdots, N\}, \tag{2}$$

где $\chi_1, \chi_2, \cdots, \chi_N$—некоторые голоморфные полиномы.

Множества $\sigma_k = \{z \in \bar{D} \colon |\chi_k(z)| = 1\}$, $k = 1, 2, \cdots, N$, называются гранями полиэдра D, а множества $\sigma_k \cap \sigma_j$ $(k, j = 1, 2, \cdots, N)$ образуют его остов.

Для разрешимости уравенения (1) необходимо, конечно, чтобы форма f была $\bar{\partial}$-замкнутой ($\bar{\partial} f = 0$), т. е. чтобы $\frac{\partial f_1}{\partial \bar{z}_2} = \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}_1}$. Из теоремы Ока о разрешимости в полиэдрах Вейля первой проблемы Кузена и из леммы Гротендика-Дольбо (см., например, [1]) следует, что условие $\bar{\partial} f = 0$ является также и достаточным для существования решения уравнения (1). В приложениях важно иметь решение уравнения (1) в D с подходящими оценками около границы ∂D. Из результатов Л. Хёрмандера [1] вытекает существование решения u уравнения (1) с L^2-оценкой

$$\|u\|_{L^2(D)} \leqslant \gamma \|f\|_{L^2(D)}.$$

Нахождение решений уравнения (1) с оценками в равномерной метрике оказалось более трудной задачей. В [2] найдена формула для решения $\bar{\partial}$-уравнения в полиэдре Вейля. Эта формула, в случае, когда грани и остов полиэдра комплексно невырожденны, т. е. когда $d\chi_k \neq 0$ на σ_k и $d\chi_k \wedge d\chi_j \neq 0$ на $\sigma_{kj} = \sigma_k \cap \sigma_j$, $k \neq j$ $(k, j = 1, 2, \cdots, N)$, дает решение u уравнения (1) с равномерной оценкой

$$\|u\|_{C(D)} \leqslant \gamma \|f\|_{C(D)}. \tag{3}$$

Условие комплексной невырожденности остова полиэдра D не является, однако, даже условием „общего положения“, поскольку произвольный полиэдр, вообще говоря, нельзя превратить в комплексно невырожденный полиэдр малым шевелением коэффициентов полиномов $\{\chi_l(z)\}$.

В настоящей работе отыскивается решение (1) с оценкой (3) в полиэдре Вейля „общего положения“ в $\mathbf{C}^2$, т. е. когда $d|\chi_k|^2 \neq 0$ на σ_k и $d|\chi_k|^2 \wedge d|\chi_j|^2 \neq 0$ на σ_{kj}, $(k, j = 1, 2, \cdots, N)$. Такие полиэдры мы называем здесь вещественно невырожденными полиэдрами Вейля. Рассматриваемые нами полиэдры удовлетворяют следующему дополнительному условию: остов $(U\sigma_{kj})$ совпадает с границей Бергмана-Шилова.

Формула решения, указанная в [2], здесь уже непосредственно задачу не решает. Решение $\bar\partial$-уравнения с оценкой (3) мы получаем далее по следующей схеме. Сначала с помощью формулы Мартинелли—Бохнера—Коппельмана [3] форма f специальным образом разбивается в сумму N форм, $\bar\partial$-замкнутых в значительно больших областях (теорема 1), затем к области D „пристраиваются“ комплексно невырожденные полиэдры $D_i (D \subset D_i)$, $i = 1, 2, \cdots, N$ (лемма 3), и, наконец, $\bar\partial$-уравнение решается (с помощью формул из [2]) „по-своему“ для каждой области D_i (теоремы 2, 3).

К сожалению, пока не удалось реализовать подобную схему рассуждений для получения решений (1) с равномерными оценками в вещественно невырожденных полиэдрах Вейля в пространствах любого числа переменных. Именно поэтому (а не „ради простоты изложения“) мы ограничились в этой работе полиэдрами в $\mathbf{C}^2$.

Анализ проводимых далее рассуждений в $\mathbf{C}^2$ показывает, что основной результат (решение (1) с оценкой (3)) справедлив уже при условии, что на любой грани σ_k полином χ_k либо вообще не имеет критических точек, либо имеет лишь невырожденные критические точки.

Было бы очень интересно выяснить, имеет ли (1) решение с оценкой (3) в произвольном аналитическом полиэдре (без каких бы то ни было условий невырожденности граней).

§ 1. Разложение формы

Пусть всюду в дальнейшем D — вещественно невырожденный полиэдр Вейля (2) в пространстве $\mathbf{C}^2$, остов которого совпадает с границей Бергмана-Шилова. Будем пользоваться следующими обозначениями: для формы $f = f_1 d\bar z_1 + f_2 d\bar z_2$

$$\|f\|_{C(D)} = \|f_1\|_{C(D)} + \|f_2\|_{C(D)}; \quad \|f\|_{L^p(D)} = \|f_1\|_{L^p(D)} + \|f_2\|_{L^p(D)};$$

$$\omega(\zeta) = d\zeta_1 \wedge d\zeta_2; \ \omega'(\eta) = \eta_1 d\eta_2 - \eta_2 d\eta_1,$$

где $\eta_k = \eta_k(\zeta; z)$, $k = 1, 2$, причем дифференциалы здесь берутся по ζ; в случае, если дифференциалы будем брать по z, полученную форму обозначим через $\omega_1'(\eta)$. Далее, через $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$ будем обозначать константы, не зависящие от f.

Теорема 1. *Для любой формы f типа $(0,1)$, $\bar\partial$-замкнутой и непрерывной в замыкании $\bar D$ полиэдра D, имеет место разложение*

$$\sum_{l=1}^{N} f_l(z) + (1-N) F(z) = \begin{cases} 4\pi^2 f(z), & z \in D, \\ 0, & z \bar{\in} \bar D, \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$F(z) = \bar\partial_z \int_D f(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta), \tag{1.2}$$

а формы f_l удовлетворяют следующим условиям:

(а) *f_l бесконечно дифференцируема в $\mathbf{C}^2 \setminus \partial D$ и непрерывна на $D \cup \{\sigma_l \setminus \bigcup_{j \neq l} \sigma_j\}$;*

(б) *f_l $\bar\partial$-замкнута;*

(в) *для любой ограниченной области B и числа $p > 0$ существует $\gamma = \gamma(B; p)$ так, что*

$$\|f_l\|_{L^p(B)} \leqslant \gamma \|f\|_{C(\bar D)}; \tag{1.3}$$

(г) *коэффициенты формы f_l интегрируемы на σ_l.*

Доказательство. Формула Мартинелли—Бохнера—Коппельмана, указанная Коппельманом в [3], имеет вид

$$\bar\partial_z \int_D f(\zeta) \wedge \omega' \left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) + \int_{\partial D} f(\zeta)\, \omega_1' \left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta) =$$

$$= \begin{cases} 4\pi^2 f(z), & z \in D, \\ 0, & z \bar{\in} \bar D. \end{cases} \tag{1.4}$$

Учитывая, что $\partial D = \bigcup_{l=1}^{N} \sigma_l$ и обозначив

$$\tilde f_l(z) = \int_{\sigma_l} f(\zeta)\, \omega_1' \left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2} \right) \wedge \omega(\zeta), \tag{1.5}$$

перепишем формулу (1.4) в виде

$$F(z) + \sum_{j=1}^{N} \tilde f_j(z) = \begin{cases} 4\pi^2 f(z), & z \in D, \\ 0, & z \bar{\in} \bar D. \end{cases} \tag{1.6}$$

Разложение (1.1) получается из (1.6), если форму f_l определить следующим образом:

$$f_i(z) = \tilde{f}_i(z) + F(z). \tag{1.7}$$

Из (1.6) и (1.7) имеем

$$f_i(z) + \sum_{j \neq i} \tilde{f}_j(z) = \begin{cases} 4\pi^2 f(z), & z \in D, \\ 0, & z \overline{\in} \overline{D}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Свойство (а) следует из (1.8), если заметить, что форма $\tilde{f}_j(z)$ бесконечно дифференцируема в $\mathbf{C}^2 \setminus \sigma_j$.

Продифференцировав (1.7) с учетом, что $\bar\partial^2 = 0$, получим

$$\bar\partial f_i(z) = \int\limits_{\sigma_i} f(\zeta) \wedge \bar\partial_z\, \omega_1'\left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}\right) \wedge \omega(\zeta) =$$

$$= \left\{ \int\limits_{\sigma_i} f(\zeta) \left(\frac{\partial}{\partial \bar z_1} \frac{\bar\zeta_1 - \bar z_1}{|\zeta - z|^4} + \frac{\partial}{\partial \bar z_2} \frac{\bar\zeta_2 - \bar z_2}{|\zeta - z|^4} \right) \wedge \omega(\zeta) \right\} dz_1 \wedge dz_2 = 0,$$

что и доказывает (б).

Оценим L^p-норму $\tilde{f}_i$ в ограниченной области B

$$\|\tilde f_i\|_{L^p(B)} = \left\{ \int\limits_B \left| \int\limits_{\sigma_i} f(\zeta) \wedge \frac{\bar\zeta_2 - \bar z_2}{|\zeta - z|^4}\, d\bar\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \right|^p dv_z \right\}^{1/p} +$$

$$+ \left\{ \int\limits_B \left| \int\limits_{\sigma_i} f(\zeta) \wedge \frac{\bar\zeta_1 - \bar z_1}{|\zeta - z|^4}\, d\zeta_1 \wedge d\bar\zeta_2 \right|^p dv_z \right\}^{1/p} \leqslant \gamma_1 \|f\|_{C(D)} \left\{ \int\limits_B \left(\int\limits_{\sigma_i} \frac{ds_\zeta}{|\zeta - z|^3} \right)^p dv_z \right\}^{1/p}.$$

Внутренний интеграл, согласно доказываемой ниже лемме 1, имеет рост порядка логарифма, поэтому повторный интеграл сходится, т. е.

$$\|\tilde f_i\|_{L^p(B)} \leqslant \gamma_2 \|f\|_{C(D)}; \tag{1.9}$$

отсюда и из (1.6) следует, что аналогичная оценка верна и для $F(z)$

$$\|F\|_{L^p(B)} \leqslant \gamma_3 \|f\|_{C(D)}. \tag{1.10}$$

Утверждение (в) следует из (1.7), (1.9) и (1.10).

Далее, из (1.8) видно, что особенности формы f_i находятся на гранях σ_j $(j \neq i)$, причем, в силу той же леммы 1, при подходе к σ_i коэффициенты этой формы имеют логарифмический рост. Отсюда и из того, что грани σ_i и σ_j в силу вещественной невырожденности полиэдра D пересекаются трансверсально, следует утверждение (г).

Лемма 1. *Пусть σ — ограниченная гладкая гиперповерхность в $\mathbf{C}^2$; $\rho(z, \sigma)$ — расстояние между z и σ. Тогда функция*

$$\Phi(z) = \int\limits_\sigma \frac{ds_\zeta}{|\zeta - z|^3},$$

где ds_ζ — элемент объема на σ, удовлетворяет неравенству

$$\Phi(z) \leqslant \gamma_4 \ln |\rho(z, \sigma)|.$$

Доказательство. В силу условий на σ с помощью диффеоморфизма вопрос можно свести к случаю, когда σ — компакт, лежащий „на цилиндре". Достаточно ограничиться случаем, когда σ, к примеру, имеет вид

$$\sigma = \{\operatorname{Im} \zeta_1 = \eta_1 = 0;\ |\operatorname{Re} \zeta_1| = |\xi_1| < 1\},$$

а точка $z = (x_1 + iy_1, z_2)$ удовлетворяет условию $|x_1| \leqslant 2$, $|z_2| \leqslant 2$. Тогда $\rho(z, \sigma) = |y_1|$. Обозначив $\zeta_2 - z_2 = re^{i\varphi}$, $x_1 - \xi_1 = t$, будем иметь

$$\Phi(z) \leqslant \int_{-3}^{3}\int_{0}^{3}\int_{0}^{2\pi} \frac{r\,d\varphi\,dr\,dt}{(r^2 + t^2 + y_1^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{2}\int_{-3}^{3} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + y_1^2}} -$$

$$- \frac{\pi}{2}\int_{-3}^{3} \frac{dt}{\sqrt{9 + t^2 + y_1^2}} < \frac{\pi}{2}\int_{-3}^{3} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + y_1^2}} \leqslant \gamma_4 \ln |y_1|.$$

§ 2. Формулы решения

В работе [2] для произвольного полиэдра в пространстве C^n получена формула решения уравнения (1), которая в случае $n = 2$ имеет вид

$$u(z) = \frac{1}{4\pi^2}\left\{\int_D f(\zeta) \wedge \omega'\left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}\right) \wedge \omega(\zeta) - \sum_{k=1}^{N} \int_{\sigma_k} f(\zeta) \times\right.$$

$$\left. \times \frac{\begin{vmatrix} \bar\zeta_1 - \bar z_1 & P_{k1} \\ \bar\zeta_2 - \bar z_2 & P_{k2} \end{vmatrix}}{|\zeta - z|^2 [\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)]} \wedge \omega(\zeta)\right\}. \tag{2.1}$$

Здесь P_{k1} и P_{k2} — коэффициенты Гефера функции χ_k, т. е.

$$\chi_k(\zeta) - \chi_k(z) = (\zeta_1 - z_1) P_{k1}(\zeta, z) + (\zeta_2 - z_2) P_{k2}(\zeta, z).$$

Интегралы в правой части формулы (2.1) имеют смысл и при менее ограничительных условиях на f, чем непрерывность. Оказывается, что и в этом случае (2.1) дает решение уравнения (1), если последнее понимать в смысле обобщенных функций. Точнее, имеет место

Лемма 2. *Пусть $\bar\partial$-замкнутая форма f типа $(0,1)$ с коэффициентами из $L^p(D)$, $p > 4$, такова, что ее сужения на грани σ_i интегрируемы. Тогда функция u, определяемая формулой (2.1), является решением уравнения (1) в полиэдре D в смысле обобщенных функций.*

Доказательство. Ограничение $p > 4$ в условиях леммы необходимо для того, чтобы объемный интеграл в (2.1) сходился. Нужно показать, что для любой финитной в D и бесконечно дифференцируемой формы $g(z)$ типа (2.1) имеет место равенство

$$(u, \bar\partial g) = (f, g). \tag{2.2}$$

Применяя теорему Фубини, имеем

$$(u, \bar\partial g) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_D \left\{ \int\limits_D f(\zeta) \wedge \omega'\left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}\right) \wedge \omega(\zeta) - \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\sigma_k} f(\zeta) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\begin{vmatrix} \bar\zeta_1 - \bar z_1 & P_{k1} \\ \bar\zeta_2 - \bar z_2 & P_{k2} \end{vmatrix}}{|\zeta - z|^2 [\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)]} \wedge \omega(\zeta) \right\} \bar\partial g(z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_D \left\{ \int\limits_D f(\zeta) \wedge \omega'\left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}\right) \wedge \omega(\zeta) \right\} \bar\partial g(z) -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\sigma_k} f(\zeta) \left\{ \int\limits_D \frac{\begin{vmatrix} \bar\zeta_1 - \bar z_1 & P_{k1} \\ \bar\zeta_2 - \bar z_2 & P_{k2} \end{vmatrix}}{|\zeta - z|^2 [\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)]} \bar\partial g(z) \right\} \wedge \omega(\zeta). \tag{2.3}$$

Применяя формулу Стокса и учитывая, что

$$\bar\partial_z \frac{\begin{vmatrix} \bar\zeta_1 - \bar z_1 & P_{k1} \\ \bar\zeta_2 - \bar z_2 & P_{k2} \end{vmatrix}}{|\zeta - z|^2 [\chi_k(\zeta) - \chi_k(z)]} = \omega_1'\left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}\right),$$

преобразуем второе слагаемое в правой части (2.3) к виду

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_D \left\{ \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\sigma_k} f(\zeta)\, \omega_1'\left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}\right) \wedge \omega(\zeta) \right\} \wedge g(z) =$$

$$= \int\limits_D \left\{ f(z) - \frac{1}{4\pi^2}\, \bar\partial_z \int\limits_D f(\zeta) \wedge \omega'\left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}\right) \wedge \omega(\zeta) \right\} \wedge g(z). \tag{2.4}$$

В последнем равенстве была использована формула Мартинелли — Бохнера — Коппельмана (1.4). Подставляя (2.4) в (2.3) и используя еще раз формулу Стокса, окончательно получим

$$(u, \bar\partial g) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_D \left\{ \int\limits_D f(\zeta) \wedge \omega'\left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}\right) \wedge \omega(\zeta) \right\} \bar\partial g(z) +$$

$$+ \int\limits_D f(z) \wedge g(z) - \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_D \left\{ \bar\partial_z \int\limits_D f(\zeta) \wedge \omega'\left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}\right) \wedge \omega(\zeta) \right\} \wedge g(z) = (f, g).$$

Лемма доказана.

Пусть

$$S_l = \{\zeta \in \mathbf{C}^2 \colon |\chi_l(\zeta)| = 1\}.$$

Лемма 3. *Для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant N$, существует полиэдр D_i, $D \subset D_i$, у которого одна грань σ_i^* лежит на S_i, а остальные грани пересекаются с σ_i^* комплексно трансверсально.*

Доказательство. Аналитическое множество

$$M = \{z: \operatorname{grad} \chi_i(z) = 0\}$$

состоит из конечного числа компонент, так как χ_i — полином. Очевидно, на каждой такой связной компоненте m $\chi_i|_m = \text{const}$. Отсюда следует, что m либо не пересекается с S_i, либо целиком лежит на S_i, т. е. особые точки гиперповерхности S_i являются особыми и для M. С другой стороны, M может иметь лишь конечное число особых точек, так что все они находятся внутри некоторого шара $\{|z| < R\}$. Для каждой точки $z_0 \in S_i$, $|z_0| > R$ построим гиперповерхность $\lambda = \{\zeta: |l_{z_0}(\zeta)| = 1\}$, где $l_{z_0}(\zeta)$—линейная функция, так что $\lambda \cap D = \varnothing$ и λ пересекается с S_i комплексно трансверсально в точке z_0, а, следовательно, и в некоторой окрестности этой точки. Выбрав конечное число таких функций $l_i^k(\zeta)$, $(1 \leqslant k \leqslant N_i,\ N_i > n-1)$, мы тем самым „пристроим" к грани S_i искомый полиэдр

$$D_i = \{\zeta: |\chi_i(\zeta)| < 1,\ |l_i^k(\zeta)| < 1,\ k = 1, 2, \cdots, N_i\}.$$

Обозначим через σ_i^* грань этого полиэдра, содержащую σ_i:

$$\sigma_i^* = \{\zeta: |\chi_i(\zeta)| = 1,\ |l_i^k(\zeta)| < 1,\ k = 1, 2, \cdots, N_i\},$$

а через λ_i^k— грань, на которой $|l_i^k(\zeta)| = 1$.

Пусть f—непрерывная в $\overline{D}$, $\overline{\partial}$-замкнутая форма типа $(0,1)$; f_i —то же, что и в теореме 1.

Теорема 2. *Существует решение уравнения*

$$\overline{\partial} u = f_i \tag{2.5}$$

понимаемого в смысле обобщенных функций в области D_i, допускающее равномерную оценку

$$\|u_i\|_{C(D)} \leqslant \gamma \|f\|_{C(D)}. \tag{2.6}$$

Доказательство. Согласно утверждениям (в) и (г) теоремы 1 форма f_i в области D_i удовлетворяет условиям леммы 2. По этой лемме функция

$$u_i(z) = \frac{1}{4\pi^2} [v_0(z) - v_i(z) - \overline{v}_i(z)], \tag{2.7}$$

где

$$v_0(z) = \int\limits_{D_i} f_i(\zeta) \wedge \omega'\left(\frac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{|\zeta - z|^2}\right) \wedge \omega(\zeta), \tag{2.8}$$

$$v_l(z) = \int\limits_{\sigma_l^*} f_l(\zeta) \frac{\begin{vmatrix} \bar\zeta_1 - \bar z_1 & P_{l1} \\ \bar\zeta_2 - \bar z_2 & P_{l2} \end{vmatrix}}{|\zeta - z|^2 [\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)]} \wedge \omega(\zeta), \tag{2.9}$$

$$\tilde v_l(z) = \sum_{j=1}^{N_l} \int\limits_{\lambda_l^j} f_l(\zeta) \frac{\begin{vmatrix} \bar\zeta_1 - \bar z_1 & P_{j1}^l \\ \bar\zeta_2 - \bar z_2 & P_{l2}^j \end{vmatrix}}{|\zeta - z|^2 [l_l^j(\zeta) - l_l^j(z)]} \wedge \omega(\zeta), \tag{2.10}$$

является решением уравнения (2.5). Здесь P_{l1}^j и P_{l2}^j—коэффициенты Гефера функции $l_l^{(j)}$. Оценка, аналогичная (2.6) для интегралов $v_0(z)$, и $\tilde v_l(z)$, дана в § 3. Оценка интеграла $v_l(z)$ существенно использует замкнутость формы f_l и непосредственно из вида (2.9) не получается. Поэтому преобразуем $v_l(z)$ к более удобной для оценок форме.

Пусть $\{g_k(z)\}$— разбиение единицы на компакте σ_l^*, причем носители m_k функций $g_k(z)$ удовлетворяют условию $\operatorname{diam} m_k \leqslant \delta$, $\delta > 0$. В дальнейшем будут накладываться ограничения на величину δ, а пока выберем $\delta < \rho(\sigma_l, \lambda_l^j)$, $1 \leqslant j \leqslant N_l$. Обозначив, для краткости,

$$\psi_l(\zeta; z) = \frac{\begin{vmatrix} \bar\zeta_1 - \bar z_1 & P_{l1} \\ \bar\zeta_2 - \bar z_2 & P_{l2} \end{vmatrix}}{|\zeta - z|^2 [\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)]} \omega(\zeta)$$

и внося тождество $\sum\limits_k g_k(\zeta) \equiv 1$ под знак интеграла в (2.9), будем иметь

$$v_l(z) = \sum_k \int\limits_{\sigma_l^*} g_k(\zeta) f_l(\zeta) \wedge \psi_l(\zeta; z) = \sum_k{}' + \sum_k{}''. \tag{2.11}$$

Под знаком $\sum\limits_k{}'$ здесь собраны те слагаемые, для которых выполняется хотя бы одно из условий

1) $m_k \cap \sigma_l \neq \varnothing$;

2) $m_k \cap \left(\bigcup\limits_{j=1}^{N} \lambda_l^j \right) \neq \varnothing$.

Число δ предполагаем настолько малым, чтобы

$$\frac{\partial \chi_l(\zeta)}{\partial \zeta_{\nu(k)}} \neq 0, \quad \zeta \in m_k, \tag{2.12}$$

а в случае 2) чтобы отображение

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= l_l^j(\zeta) \\ w_2 &= \chi_l(\zeta) \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

на m_k было бы диффеоморфным. Условиям (2.11) и (2.12) удовлетворить можно в силу вещественной невырожденности D и комплексной невырожденности D_l.

Зафиксируем $z \in D$ и для $\varepsilon > 0$ введем обозначения

$$T_z = \{\zeta \in \bar{D}_l : \chi_l(\zeta) - \chi_l(z) = 0\},\tag{2.14}$$

$$T_z^\varepsilon = \{\zeta \in \bar{D}_l : |\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)| \leqslant \varepsilon\},$$

$$\tilde{T}_z^\varepsilon = \{\zeta \in \bar{D}_l : |\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)| = \varepsilon\}.$$

Пусть k таково, что выполнено 1) или 2). Применяя формулу Стокса к форме $g_k f_l \wedge \psi_l$ в области $D_l \setminus T_z^\varepsilon$, с учетом, что

$$\partial (D_l \setminus T_z^\varepsilon) = \sigma_l^* \cup (\bigcup_j \lambda_l^j \setminus T_z^\varepsilon) \cup (-\tilde{T}_z^\varepsilon),$$

получим

$$\int_{\sigma_l^*} g_k f_l \wedge \psi_l + \sum_{j=1}^{N_l} \int_{\lambda_l^j \setminus T_z^\varepsilon} g_k f_l \wedge \psi_l - \int_{\tilde{T}_z^\varepsilon} g_k f_l \wedge \psi_l = \int_{D_l \setminus T_z^\varepsilon} d_\zeta (g_k f_l \wedge \psi_l).\tag{2.15}$$

Используя (2.12), имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\tilde{T}_z^\varepsilon} g_k f_l \wedge \psi_l = \lim_{\varepsilon \to 0} (-1)^{\nu(k)} \int_{|\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)| = \varepsilon} g_k f_l \times$$

$$\times \frac{\begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1 & P_{l1} \\ \bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2 & P_{l2} \end{vmatrix} d\zeta_{3-\nu(k)} \wedge d\chi_l}{|\zeta - z|^2 [\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)] \dfrac{\partial \chi_l}{\partial \zeta_{\nu(k)}}} =$$

$$= 2\pi i (-1)^{\nu(k)} \int_{T_z} g_k f_l \frac{\begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1 & P_{l1} \\ \bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2 & P_{l2} \end{vmatrix}}{|\zeta - z|^2 \dfrac{\partial \chi_l}{\partial \zeta_{\nu(k)}}} d\zeta_{3-\nu(k)}.\tag{2.16}$$

Далее, при подсчете $d_\zeta (g_k f_l \wedge \psi_l$ учтем, что $\bar{\partial} f_l = 0$ (теорема 1, пункт (б)), а прямое вычисление показывает, что

$$\bar{\partial}_\zeta \frac{\begin{vmatrix} \bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1 & P_{l1} \\ \bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2 & P_{l2} \end{vmatrix}}{|\zeta - z|^2 [\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)]} = \omega' \left(\frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{|\zeta - z|^2} \right).$$

Следовательно

$$d_\zeta (g_k f_l \wedge \psi_l) = \bar{\partial}_\zeta (g_k f_l \wedge \psi_l) = g_k f_l \wedge \omega' \wedge \omega + \bar{\partial} g_k \wedge f_l \wedge \psi_l.\tag{2.17}$$

Устремив ε к нулю, с учетом (2.16) и (2.17) из (2.15) получим

$$\int\limits_{\sigma_l} g_k(\zeta) f_l(\zeta) \wedge \psi_l(\zeta; z) = \sum_{\mu=1}^{4} J_\mu(z), \tag{2.18}$$

где

$$J_1(z) = \int\limits_{D_l} g_k(\zeta) f_l(\zeta) \wedge \omega'\left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}\right) \wedge \omega(\zeta), \tag{2.19}$$

$$J_2(z) = \int\limits_{D_l} \bar\partial g_k(\zeta) \wedge f_l(\zeta) \wedge \psi_l(\zeta; z), \tag{2.20}$$

$$J_3(z) = -\sum_{j=1}^{N_l} \int\limits_{\lambda_l^j} g_k(\zeta) f_l(\zeta) \wedge \psi_l(\zeta; z), \tag{2.21}$$

$$J_4(z) = 2\pi i(-1)^{\nu(k)} \int\limits_{T_z} g_k(\zeta) f_l(\zeta) \frac{\begin{vmatrix} \bar\zeta_1 - \bar z_1 & P_{l1} \\ \bar\zeta_2 - \bar z_2 & P_{l2} \end{vmatrix}}{|\zeta - z|^2 \dfrac{\partial \chi_l}{\partial \zeta_{\nu(k)}}} d\zeta_{3-\nu(k)}. \tag{2.22}$$

Итак, каждое слагаемое под знаком $\sum\limits_k{}'$ в (2.11) представляется в виде (2.18). Аналогичным образом, применяя на этот раз формулу Стокса в области $CD_l = \mathbf{C}^2 \setminus D_l$, получим формулу для оставшихся слагаемых в (2.11)

$$\int\limits_{\sigma_l} g_k(\zeta) f_l(\zeta) \wedge \psi_l(\zeta; z) = J_5(z) + J_6(z),$$

где

$$J_5(z) = \int\limits_{CD_l} g_k(\zeta) f_l(\zeta) \wedge \omega'\left(\frac{\bar\zeta - \bar z}{|\zeta - z|^2}\right) \wedge \omega(\zeta), \tag{2.23}$$

$$J_6(z) = \int\limits_{CD_l} \bar\partial g_k(\zeta) \wedge f_l(\zeta) \wedge \psi_l(\zeta; z). \tag{2.24}$$

Таким образом, для завершения доказательства теоремы осталось получить оценку для $J_1(z) - J_6(z)$, что сделано в § 3.

Теорема 3. *Пусть D — вещественно невырожденный полиномиальный полиэдр в пространстве $\mathbf{C}^2$, остов которого совпадает с границей Бергмана—Шилова; f — непрерывная в D, $\bar\partial$-замкнутая форма типа $(0,1)$. Тогда уравнение*

$$\bar\partial u = f \tag{2.25}$$

имеет решение $u(z)$, допускающее равномерную оценку

$$\|u\|_{C(D)} \leqslant \gamma \|f\|_{C(D)}, \tag{2.26}$$

где γ — константа от f не зависящая.

Доказательство. Согласно теореме 1 форму f в области D разложим в сумму

$$f(z)=\frac{1}{4\pi^2}\left[\sum_{i=1}^{N} f_i(z)+(1-N)\,F(z)\right].$$

Построим комплексно невырожденные полиэдры D_i (лемма 3). Функции $u_i(z)$ из теоремы 2 служат решением с оценкой (2.26) уравнения $\bar\partial u=f_i$ в области D_i, а, следовательно, и в D, так как $D\subset D_i$. Из определения (1.2) формы F следует, что функция

$$u_0(z)=\int_D f(\zeta)\wedge\omega'\left(\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}\right)\wedge\omega(\zeta) \tag{2.27}$$

является решением уравнения $\bar\partial u=F$, удовлетворяющее, как показано ниже в § 3, неравенству (2.26). Итак, функция

$$u(z)=\frac{1}{4\pi^2}\left[\sum_{i=1}^{N} u_i(z)+(1-N)\,u_0(z)\right]$$

является искомой.

§ 3. Оценки интегралов

Оценка $v_0(z)$, (2.8).

Пусть $f_i(\zeta)=f_{i1}(\zeta)\,d\bar\zeta_1+f_{i2}(\zeta)\,d\bar\zeta_2$; d — диаметр области D_i; p и q — сопряженные числа, т. е. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; dv_ζ — элемент объема. Вводя сферические координаты и используя неравенство Гёльдера, будем иметь

$$|v_0(z)|=\left|\int_{D_i}(f_{i1}\,d\bar\zeta_1+f_{i2}\,d\bar\zeta_2)\,\frac{(\bar\zeta_1-\bar z_1)\,d\bar\zeta_2-(\bar\zeta_2-\bar z_2)\,d\bar\zeta_1}{|\zeta-z|^4}\wedge\omega(\zeta)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{D_i}(|f_{i1}|+|f_{i2}|)\,\frac{dv_\zeta}{|\zeta-z|^3}\leqslant\|f_i\|_{L^p(D)}\left\{\int_{D_i}\frac{dv_\zeta}{|\zeta-z|^{3q}}\right\}^{1/q}\leqslant$$

$$\leqslant\gamma_5\|f_i\|_{L^p(D)}\int_0^d\frac{dr}{r^{3(q-1)}}.$$

Последний интеграл сходится при $q<\frac{4}{3}$, т. е. при $p>4$. Отсюда и из (1.3) следует

$$\|v_0\|_{C(D)}\leqslant\gamma_6\|f\|_{C(D)}.$$

Оценка $u_0(z)$, (2.25) проводится аналогично, с очевидными упрощениями.

Оценка $\tilde{v}_l(z)$, (2.10). По построению полиэдра D_l (лемма 3) его грани λ_l^j находятся на положительном расстоянии от D, поэтому знаменатель подынтегрального выражения в (2.10) при $z \in D$ отграничен от нуля, т. е.

$$|\tilde{v}_l(z)| \leqslant \gamma_7 \|f\|_{L^1(D_l)}.$$

Это неравенство вместе с (1.4) дает

$$\|\tilde{v}_l\|_{C(D)} \leqslant \gamma_8 \|f\|_{C(D)}.$$

Оценка $J_3(z)$, (2.21). Оценим в отдельности каждое слагаемое в (2.21)

$$\left| \int\limits_{\lambda_l^j} g_k f_l \wedge \psi_l \right| \leqslant \int\limits_{\lambda_l^j} g_k (|f_{l1}| + |f_{l2}|) \frac{|(\bar\zeta_1 - \bar z_1) P_{l2} - (\bar\zeta_2 - \bar z_2) P_{l1}|}{|\zeta - z|^2 |\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)|} ds_\zeta \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_9 \|f_l\|_{C(\lambda_l^j)} \int\limits_{\lambda_l^j} g_k(\zeta) \frac{ds_\zeta}{|\zeta - z| \cdot |\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)|}. \tag{3.1}$$

Интегрирование здесь ведется фактически по множеству $\lambda_l^j \cap m_k$, на котором, по условию, отображение (2.13) диффеоморфно. Обозначив через t образ точки z при этом отображении, будем иметь

$$|\zeta - z| \geqslant \gamma_{10} |w - t|; \; ds_\zeta = \left| \frac{\partial(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial(w_1, w_2)} \right| ds_w \leqslant \gamma_{11} ds_w.$$

Положим

$$w_2 - t_2 = re^{i\varphi}; \; \arg w_1 - \arg t_1 = \tau.$$

Тогда

$$\int\limits_{\lambda_l^j} g_k(\zeta) \frac{ds_\zeta}{|\zeta - z| \cdot |\chi_l(\zeta) - \chi_l(z)|} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_{12} \int\limits_{|w_1| = 1} \frac{ds_w}{|w - t| \cdot |w_2 - t_2|} \leqslant \gamma_{12} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^2 \frac{r dr d\varphi d\tau}{r \sqrt{|w_1 - t_1|^2 + \tau^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_{13} \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^2 \frac{dr\, d\tau}{\sqrt{r^2 + \tau^2}} = \gamma_{14}. \tag{3.2}$$

Далее, согласно (1.8), при $z \in \lambda_l^j$

$$f_l(z) = \sum_{k \neq l} \tilde{f}_k(z) = -\sum_{k \neq l} \int\limits_{\sigma_k} f(\zeta) \frac{(\bar\zeta_1 - \bar z_1) d\bar z_2 - (\bar\zeta_2 - \bar z_2) d\bar z_1}{|\zeta - z|^4} \wedge \omega(\zeta).$$

Отсюда, с учетом, что расстояние между множествами σ_k и λ_l^j положительно, получается очевидное неравенство

$$\|f_l\|_{C(\lambda_l^j)} \leqslant \gamma_{15} \|f\|_{C(D)}. \tag{3.3}$$

Нужная нам оценка вытекает из (3.1)—(3.3).

Оценка $J_4(z)$, (2.22). Положим, для определенности, $\nu(k)=1$ и преобразуем $J_4(z)$ к удобной форме. По определению (2.14) на T_z имеем

$$\chi_l(\zeta) - \chi_l(z) = (\zeta_1 - z_1) P_{l1} + (\zeta_2 - z_2) P_{l2} = 0,$$

или

$$P_{l2} = -\frac{\zeta_1 - z_1}{\zeta_2 - z_2} P_{l1}.$$

Далее

$$\begin{vmatrix} \bar\zeta_1 - \bar z_1 & P_{l1} \\ \bar\zeta_2 - \bar z_2 & P_{l2} \end{vmatrix} = -(\bar\zeta_1 - \bar z_1)\frac{\zeta_1 - z_1}{\zeta_2 - z_2} P_{l1} - (\bar\zeta_2 - \bar z_2) P_{l1} = -\frac{|\zeta - z|^2}{\zeta_2 - z_2} P_{l1}. \tag{3.4}$$

Подставив (3.4) в (2.22), получим выражение

$$J_4(z) = 2\pi i \int\limits_{T_z} g_k f_l \wedge \frac{P_{l1}\, d\zeta_2}{(\zeta_2 - z_2)\dfrac{\partial \chi_l}{\partial \zeta_1}}. \tag{3.5}$$

В силу вещественной невырожденности полиэдра D существует окрестность U грани σ_l такая, что для $z \in U$ поверхность T_z пересекается с остальными гранями σ_j $(j \neq i)$ трансверсально. Отсюда и из того, что особенности формы f_l лежат на σ_j и имеют логарифмический порядок роста (лемма 1), следует, что для $z \in U$

$$\|f_l\|_{L^p(T_z)} \leqslant \gamma_{16} \|f_l\|_{L^p(D_l)}, \tag{3.6}$$

где $\|f_l\|_{L^p(T_z)}$ — это L^p-норма сужения формы на поверхность T_z. Применяя к интегралу (3.5) неравенство Гёльдера (при $p > 2$) и переходя к локальной координате ζ_2, получим

$$|J_4(z)| \leqslant \gamma_{17} \|f_l\|_{L^p(T_z)} \int\limits_C \frac{|d\bar\zeta_2 \wedge d\zeta_2|}{|\zeta_2 - z_2|^q} \leqslant \gamma_{18} \|f_l\|_{L^p(T_z)}. \tag{3.7}$$

Здесь мы воспользовались тем, что полученный интеграл, как в этом нетрудно убедиться, ограничен для всех z_2, так как $q < 2$. Далее диаметр m_k предполагаем столь малым, чтобы при $z \bar\in U$ множества T_z и m_k не пересекались. Тогда $J_4(z) = 0$ при $z \bar\in U$. Требуемое неравенство следует из (3.7), (3.6) и (1.3). $J_1(z)$, (2.19) и $J_5(z)$, (2.23)—интегралы такого же типа, что $v_0(z)$. Интегралы $J_2(z)$, (2.20) и $J_6(z)$, (2.24) имеют то же ядро, что и $J_3(z)$ и их оценка проводится, по существу, так же, как и $J_3(z)$, с незначительными изменениями.

Ереванский государственный университет,
Центральный экономико-математический институт

Поступила 27.III.1978

Ա. Ի. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Գ. Մ. ԽԵՆԿԻՆ. Իրական իմաստով ոչ էափոխված Վեյլի բազմանիստում $\bar{\partial}$-հավասարման լուծումը հավասարաչափ գնահատականով *(ամփոփում)*

Դիցուք D-ն C^2 երկչափ կոմպլեքս տարածության մեջ իրական իմաստով ոչ էափոխված Վեյլի բազմանիստ է, f-ը $(0,1)$ տիպի դիֆերենցիալ ձև է, որը անընդհատ է $\bar{D}$-ում և $\bar{\partial} f=0$.

Հոդվածում ապացուցվում է, որ $\bar{\partial} u=f$ հավասարումը ունի լուծում, որը բավարարում է $\|u\| < \gamma \|f\|$ հավասարաչափ գնահատականին։

A. I. PETROSYAN, G. M. HENKIN. *The solution with the uniform estimate of the $\bar{\partial}$-equation in the real nondegenerate Weil polyhedron* (summary)

Let D be a real nondegenerate Weil polyhedron in two-dimensional complex space; f be a $\bar{\partial}$-closed differential form of the (0,1) type, which is continuous in $\bar{D}$. It is proved, that the $\bar{\partial} u = f$ equation has the solution which satisfies the $\|u\| \leq \gamma \|f\|$ uniform estimate.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. Хёрмандер.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М., Изд. „Мир", 1968.
2. *Г. М. Хенкин.* Равномерная оценка решения $\bar{\partial}$-задачи в областях Вейля, УМН 26: 3, 1971, 211—212.
3. *W. Koppelman.* The Cauchy integral for differential forms, Bull. Amer. Math. Soc., 73, № 4, 1967, 554—556.