ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, №№ 5—6, 1978 Математика

А. А. ВАГАРШАКЯН

О НУЛЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

1°. Пусть $H_2(\alpha)$, $-1<\alpha<\infty$, пространство аналитических в единичном круге, $|z|<1$, функций $f(z)$, для которых

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|^2(1-r)^\alpha\,dr\,dt<\infty.$$

Эти классы были введены и исследованы М. М. Джрбашяном (см. [3], [5]). Им, в частности, было установлено, что функции из $H_2(\alpha)$ допускают параметрическое представление

$$f(z)=\int_0^{2\pi}\frac{g(t)}{(e^{it}-z)^{\frac{3+\alpha}{2}}}\,dt, \tag{1}$$

где $g(t)$ — произвольная функция из $L_2(0,2\pi)$.

В работах Л. Карлесона [1] и Г. Шапиро, А. Шилдса [2] был дан исчерпывающий ответ на вопрос о распределении модулей нулей функции, производная которых принадлежит $H_2(\alpha)$, $0\leqslant\alpha<1$. В настоящей заметке, опираясь на интегральное представление (1), устанавливается критерий для распределения нулей нетривиальных функций $f(z)$, для которых $f'(z)\in H_2(\alpha)$, $0\leqslant\alpha<1$, которые учитывают не только модули, но и аргументы этих нулей.

2°. С этой целью введем функцию $\rho_\alpha(\xi,\Lambda)$, с помощью которой будут сформулированы наши критерии. Пусть $\Lambda=\{z_k\}_{k=1}^\infty$ — некоторая последовательность точек из единичного круга и α, $0\leqslant\alpha\leqslant1$ — некоторый параметр. Обозначим

$$\rho_\alpha(\xi,\Lambda)=\inf_k\frac{|\xi-z_k|}{(1-|z_k|)^\alpha}\quad(|\xi|=1). \tag{2}$$

Заметим, что в случае, когда $\alpha=0$, $\rho_0(\xi,\Lambda)$ просто означает расстояние точек ξ от множества Λ, а в случае $\alpha=1$ имеет место неравенство

$$\rho_1(\xi,\Lambda)\geqslant1,\quad|\xi|=1.$$

Основным результатом настоящей заметки является следующая

Теорема. *Пусть $f'(z)\in H_2(\alpha)$, $0\leqslant\alpha<1$, и $\Lambda=\{z_k\}_{k=1}^\infty$ — множество нулей функции $f(z)\not\equiv0$. Тогда*

$$\int_0^{2\pi} \log \rho_{\frac{1+\alpha}{2}}(e^{it}, \Lambda)\, dt > -\infty.$$

Доказательство. Как отмечалось выше, функция $f'(z) \in H_2(\alpha)$ допускает представление

$$f'(z) = \int_0^{2\pi} \frac{g(t)}{(e^{it} - z)^{\frac{3+\alpha}{2}}}\, dt,$$

где $g(t) \in L_2(0, 2\pi)$. Имеет место неравенство

$$|f'(z)|(1-|z|)^{\frac{1+\alpha}{2}} \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{(1-|z|)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{|e^{it} - z|^{\frac{3+\alpha}{2}}} |g(t)|\, dt. \tag{3}$$

Заметим, что при $0 < |z| < 1$ имеют место оценки $1 - |z| \leqslant |e^{it} - z|$ и $\left|e^{it} - \frac{z}{|z|}\right| \leqslant 2|e^{it} - z|$. Поэтому для любого $0 < \delta < 2$ имеем

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-|z|)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{|e^{it} - z|^{\frac{3+\alpha}{2}}} |g(t)|\, dt \leqslant \frac{1}{1-|z|} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |g(t)|\, dt + 2^{\frac{3+\alpha}{2}} (1-|z|)^{\frac{1+\alpha}{2}} \int_\delta^2 t^{-\frac{3+\alpha}{2}} d \times$$

$$\times \int_{x-t}^{x+t} |g(\tau)|\, d\tau \leqslant \frac{1}{1-|z|} \int_{x-\delta}^{x+\delta} |g(t)|\, dt + \int_0^{2\pi} |g(\tau)|\, d\tau + \frac{3+\alpha}{2} 2^{\frac{3+\alpha}{2}} (1-|z|)^{\frac{1+\alpha}{2}} \times$$

$$\times \int_\delta^2 t^{-\frac{5+\alpha}{2}} \int_{x-t}^{x+t} |g(\tau)|\, d\tau\, dt,$$

где $\arg z = x$. Подставляя в полученное неравенство $\delta = 1 - |z|$, имеем

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-|z|)^{\frac{1+\alpha}{2}}}{|e^{it} - z|^{\frac{3+\alpha}{2}}} |g(t)|\, dt \leqslant \int_0^{2\pi} |g(\tau)|\, d\tau + \left(1 + \frac{3+\alpha}{2} 2^{\frac{3+\alpha}{2}}\right) \times$$

$$\times \sup_{t > 1-|z|} \left(\frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |g(\tau)|\, d\tau \right). \tag{4}$$

В силу известной теоремы Харди и Литтлвуда (см. [4], стр. 15) правая часть неравенства, которую мы обозначим $\psi(x)$, принадлежит пространству $L_2(0, 2\pi)$. Из (3) и (4) окончательно получим неравенство

$$\sup_{0<r<1} |f'(re^{ix})|^2 (1-r)^{1+\alpha} \leqslant \psi^2(x).$$

Пусть $0<p<1$ — некоторое число. В силу упомянутой выше теоремы Харди и Литтлвуда имеем

$$\int_0^{2\pi}\left(\sup_{-\pi<\delta<2\pi}\frac{1}{|\delta|}\int_x^{x+\delta}\left(\sup_{0<r<1}|f'(re^{it})|^2(1-r)^{1+\alpha}\right)dt\right)^p dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}\left(\sup_{-\pi<\delta<\pi}\frac{1}{|\delta|}\int_x^{x+\delta}\psi^2(t)\,dt\right)^p dx<\infty.$$

Далее

$$\int_0^{2\pi}\left(\sup_{\substack{-\pi<\delta<\pi\\0<r<1}}\frac{(1-r)^{1+\alpha}}{|\delta|}\int_x^{x+\delta}|f'(re^{it})|^2\,dt\right)^p dx\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^{2\pi}\left(\sup_{-\pi<\delta<\pi}\frac{1}{|\delta|}\int_x^{x+\delta}\left(\sup_{0<r<1}f'(re^{it})|^2(1-r)^{1+\alpha}\right)dt\right)^p dx<\infty.$$

Эта оценка означает, что существует функция $\varphi(x)\in L_p(0,2\pi)$, $0<p<1$, такая, что

$$\sup_{\substack{-\pi<\delta<\pi\\0<r<1}}\frac{(1-r)^{1+\alpha}}{|\delta|}\int_x^{x+\delta}|f'(re^{it})|^2\,dt\leqslant\varphi(x),\ x\in(0,2\pi).$$

Следовательно

$$|f(re^{ix})-f(re^{i(x+\delta)})|\leqslant\int_x^{x+\delta}|f'(re^{it})|\,dt\leqslant\sqrt{|\delta|}\left(\int_x^{x+\delta}|f'(re^{it})|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\delta|}{(1-r)^{\frac{1+\alpha}{2}}}\left(\frac{(1-r)^{1+\alpha}}{|\delta|}\int_x^{x+\delta}|f'(re^{it})|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{|\delta|}{(1-r)^{\frac{1+\alpha}{2}}}\varphi^{\frac{1}{2}}(x). \tag{5}$$

Далее для любых $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, $0<\rho<1$ и $0\leqslant\alpha<1$ имеем

$$\int_\rho^1|f'(re^{ix})|\,dr\leqslant\left(\int_\rho^1|f'(re^{ix})|^2(1-r)^\alpha\,dr\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\rho^1\frac{dr}{(1-r)^\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}\left(\int_0^1|f'(re^{ix})^2(1-r)^\alpha\,dr\right)^{\frac{1}{2}}(1-\rho)^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

Из полученной оценки следует, что существует функция $\lambda(x)\in L_2(0,2\pi)$ такая, что

$$|f(e^{ix})-f(re^{ix})|\leqslant\lambda(x)\,(1-r)^{\frac{1-\alpha}{2}}. \tag{6}$$

Следовательно, в силу (5) и (6) имеем

$$|f(e^{ix})-f(z)|\leqslant(1-|z|)^{\frac{1-\alpha}{2}}\lambda(x)+\frac{|e^{ix}-z|}{(1-|z|)^{\frac{1+\alpha}{2}}}\varphi^{\frac{1}{2}}(x)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|e^{ix}-z|}{(1-|z|)^{\frac{1+\alpha}{2}}}\left(\lambda(x)+\varphi^{\frac{1}{2}}(x)\right). \tag{7}$$

Отсюда получаем

$$|f(e^{ix})|=|f(e^{ix})-f(z_k)|\leqslant\frac{|e^{ix}-z_k|}{(1-|z_k|)^{\frac{1+\alpha}{2}}}\left(\lambda(x)+\varphi^{\frac{1}{2}}(x)\right)$$

или

$$|f(e^{ix})|\leqslant\rho_{\frac{1+\alpha}{2}}(e^{ix},\ \Lambda)\ \left(\lambda(x)+\varphi^{\frac{1}{2}}(x)\right).$$

Поэтому

$$-\infty<\int_0^{2\pi}\log|f(e^{ix})|\,dx<\int_0^{2\pi}\log\rho_{\frac{1+\alpha}{2}}(e^{ix},\ \Lambda)\,dx+\int_0^{2\pi}\log\left(\lambda(x)+\varphi^{\frac{1}{2}}(x)\right)dx.$$

Так как последний интеграл сходится, то

$$\int_0^{2\pi}\log\rho_{\frac{1+\alpha}{2}}(e^{ix},\ \Lambda)\,dx>-\infty.$$

Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15.IX.1978

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Անալիտիկ ֆունկցիաների որոշ դասերի զերոների մասին *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում բերվում են պայմաններ այնպիսի $f(z)$ ֆունկցիաների զերոների բաշխման վրա, որոնց համար $f'(z)\in H_2(\alpha)$, $0<\alpha<1$:

A. A. VAGARSHAKIAN. *On the zeros of some classes of analytic functions* (summary)

The paper considers distributions of zeros of functions $f(z)$ with $f'(z)\in H_2(\alpha)$, $0\leqslant\alpha<1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Carleson.* On the zeros of functions with bounned Dirichlet integrals, Math. Zeitschrift, 56, № 3, 1952, 289—295.

2. *H. Shapiro* and *A. Shields*. On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces, Math. Zeitschrift, v. 80, 1962, 217—229.
3. *М. М. Джрбашян*. О представимости некоторых классов голоморфных функций в единичном круге, ДАН Арм.ССР, VI, 1947.
4. *И. Стейн*. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, Изд. „Мир", 1973.
5. *М. М. Джрбашян*. К проблеме представимости аналитических функций, Сооб. Инст. мат. и мех. АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—40.