ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, №№ 5—6, 1978 Математика

Ф. А. ШАМОЯН

ФАКТОРИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА М. М. ДЖРБАШЯНА И ХАРАКТЕРИСТИКА НУЛЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ С МАЖОРАНТОЙ КОНЕЧНОГО РОСТА

Введение

1. Пусть U — единичный круг на комплексной плоскости. Следуя М. М. Джрбашяну (см. [1], [2]) обозначим через A^*_α, $(\alpha > -1)$ класс аналитических в круге U функций f, для которых

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)^\alpha \ln^+ |f(re^{i\theta})| \, r dr d\theta < +\infty.$$

В работах [1], [2] была установлена каноническая факторизация классов A^*_α. А именно, была доказана следующая основная

Теорема А. *Если $f \in A^*_\alpha$, $(\alpha > -1)$, $f(0) = 1$ и $\{z_k\}_1^{+\infty}$ — множество нулей функции f, то*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty. \tag{0.1}$$

Функция f допускает следующую факторизацию:

$$f(z) = \pi^f_\alpha \exp\left\{\frac{\alpha+2}{\pi}\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \ln|f(\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\right\}, \quad z \in U, \tag{0.2}$$

где

$$\pi^f_\alpha(z) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\left\{-\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \ln\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}\right|}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}}\right\}, \tag{0.3}$$

причем при условии (0.1) *бесконечное произведение π^f_α равномерно сходится внутри U.*

Как особо было отмечено в указанных работах [1] и [2], при целых α, $\alpha = p$, произведение π^f_p принимает следующий простой вид:

$$\pi^f_p(z) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}\right)\exp\left\{\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j+1}\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}\right)^{j+1}\right\}. \tag{0.3'}$$

Нетрудно видеть, что факторы произведения (0.3) элементарно получаются из факторов Бляшке вида $\frac{z_k - z}{1-\bar{z}_k z}\bar{z}_k$ по аналогии с известными факторами Вейерштрасса. Именно таким образом произведения вида (0.3) были введены в работе Цудзи [3], десять лет спустя, после того, как М. М. Джрбашяном были открыты произведения π_α для всех α, $(-1<\alpha<+\infty)$. Несмотря на это, в ряде работ произведения π_ρ^f были приписаны Цудзи и другим авторам (см., например, [4]).

В дальнейшем для удобства введем следующие обозначения:

$$g_\alpha^f(z)=\frac{\alpha+1}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)^\alpha\ln|f(\rho e^{i\theta})|\,\rho d\rho d\theta}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}},\ z\in U,$$

$$U_\alpha(z,\zeta)=\frac{2(\alpha+1)}{\pi}\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)^\alpha\ln\left|1-\frac{\rho e^{i\theta}}{\zeta}\right|\rho d\rho d\theta}{(1-z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}},\ \zeta,\ z\in U,\ \zeta\neq 0.$$

Таким образом, согласно теореме А любая функция $f\in A_\alpha^*$, $(-1<\alpha<+\infty)$ допускает представление

$$f(z)=\pi_\alpha^f\ \exp\{g_\alpha^f(z)\}. \tag{0.2'}$$

В связи с этим, естественно, возникает следующий вопрос: Пусть $f\in A_\alpha^*$, и таким образом, f допускает представление (0.2′). Принадлежат ли сомножители π_α^f и $\exp\{g_\alpha^f\}$ классу A_α^*? Здесь мы докажем, что в общем случае π_α^f и $\exp\{g_\alpha^f\}$ могут не принадлежать классу A_α^* и найдем достаточное условие, налагаемое на нули функций f, для того, чтобы π_α^f и $\exp\{g_\alpha^f\}$ принадлежали этому классу. Указанное условие, когда нули находятся внутри угла раствора меньшего π, оказывается и необходимым. Одновременно доказывается, что если $f\in A_\alpha^*$ и $\alpha_0>\alpha$, то $\pi_{\alpha_0}^f$, $\exp\{g_{\alpha_0}^f\}$ принадлежат классу A_α^*.

Следовательно, чтобы обеспечить принадлежность факторизационных сомножителей к классу A_α^*, достаточно увеличить параметр α.

В § 2 изучается аналогичный вопрос относительно классов

$$X_\varphi^\infty=\left\{f:|f(z)|\leqslant\exp\left\{C_f\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right\}\right\},$$

где φ—неотрицательная, монотонно растущая функция на $R_+=(0,+\infty)$

Здесь же при помощи факторизации (0.2) дается полная характеристика нулей функций класса X_φ^∞, при некоторых естественных ограничениях, налагаемых на рост функции φ.

§ 1. О произведениях М. М. Джрбашяна

В этом параграфе мы получим условия на последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}\subset U$, при которых бесконечное произведение π_α с нулями $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит классу A_α^*.

Сначала докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть задана последовательность* $\{z_k\}_1^\infty \subset U$, *тогда справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty, \ (\alpha > -1),$$

то произведение π_{α_0} *с нулями* $\{z_k\}_1^\infty$ *для любого* $\alpha_0 > \alpha$ *принадлежит классу* A_α^*.

2. *Если же*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} \ln \frac{1}{1-|z_k|} < +\infty \ (\alpha > -1),$$

то π_α *принадлежит* A_α^*.

Замечание. Отметим, что утверждение 1° теоремы 1.1 вместе с теоремой А дает полную характеристику нулей функций класса A_α^*, $\alpha > -1$.

Доказательству теоремы 1.1 предпошлем следующие леммы.

Лемма 1.1. (М. М. Джрбашян [2]).

Пусть $\alpha > 0$, $z, \zeta \in U$, $\zeta \neq 0$, тогда, во-первых, имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$U_\alpha(z, \zeta) = U_{\alpha-1}(z, \zeta) - \frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta} z} \right)^{\alpha+1}, \tag{1.1}$$

и, во-вторых, при $|z| < |\zeta|$ справедливо представление

$$\left(1-\frac{z}{\zeta}\right) \exp\{-U_\alpha(z, \zeta)\} = \exp\left\{ -\int_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1-\frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}} \frac{dt}{t} \right\}. \tag{1.2}$$

Лемма 1.2. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_1^\infty \subset U$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty \ (\alpha > -1).$$

Тогда для произведения π_α *с нулями в точках* $\{z_k\}_1^\infty$ *имеет место следующая оценка:*

$$\ln |\pi_\alpha(z)| \leqslant \text{const} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(1-|z_k|)^{\alpha+2}}{|1-\bar{z}_k z|^{\alpha+2}}, \ z \in U. \tag{1.3}$$

Доказательство. Для установления оценки (1.3) достаточно получить аналогичную оценку для одного фактора, т. е. для выражения

$$I(z, \zeta) = \left(1-\frac{z}{\zeta}\right) \exp\{-U_\alpha(z, \zeta)\}, \ z, \zeta \in U, \ \zeta \neq 0.$$

С этой целью воспользуемся выше указанной леммой М. М. Джрб-
шяна, согласно которой, при $|z|<|\zeta|$

$$I(z,\zeta)=\exp\left\{-\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1-\frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}}\frac{dt}{t}\right\}.$$

Но так как последний интеграл является аналитической функцией от
вне отрезка

$$l_\zeta=\left\{z:\ \arg z=\arg\zeta,\ \ |\zeta|\leqslant|z|\leqslant\frac{1}{|\zeta|}\right\},$$

то равенство (1.2) имеет место в области $U\setminus l_\zeta$.

Легко видеть, что

$$\left|\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1-\frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}}\frac{dt}{t}\right|\leqslant\frac{1}{|\zeta|^2}\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right|^{\alpha+2}\left\{\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{\tau^{\alpha+2}\,d\tau}{\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar\zeta z}+\frac{\tau z\,(1-|\zeta|^2)}{1-\bar\zeta z}\right|^{\alpha+2}}\right\},$$

откуда при условии

$$\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right|\leqslant\frac{1}{8} \tag{1.4}$$

будем иметь

$$\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar\zeta z}\right|^2=1-\frac{(1-|\zeta|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar\zeta z|^2}\geqslant 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Следовательно, знаменатель подынтегрального выражения можно оце-
нить следующим образом:

$$\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar\zeta z}-\frac{\tau z\,(1-|\zeta|^2)}{1-\bar\zeta z}\right|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{8}=\frac{4\sqrt{3}-1}{8}.$$

Итак

$$\left|\int\limits_{|\zeta|^2}^{1}\frac{(1-t)^{\alpha+1}}{\left(1-\frac{tz}{\zeta}\right)^{\alpha+2}}\frac{dt}{t}\right|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{|\zeta|^2}\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right|^{\alpha+2}. \tag{1.5}$$

Теперь предположим, что

$$\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right|\geqslant\frac{1}{8}. \tag{1.6}$$

Обозначим через $\beta=\alpha-[\alpha]$, где $[\alpha]$ — целая часть α. Тогда снова ис-
пользуя вышеуказанную лемму М. М. Джрбашяна, получим

$$I(z, \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \{-U_{\beta-1}(z, \zeta) + O(1)\} =$$

$$= \exp \left\{ -\int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\beta+1}} \frac{dt}{t} + O(1) \right\} \cdot$$

Так как для целых α оценка (1.3) следует из известных оценок произведений такого типа (см. [5], стр. 75), то будем предполагать, что $\beta = \alpha - [\alpha] \neq 0$. Оценим интеграл

$$I_1 = \int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\beta+1}} \frac{dt}{t} \cdot$$

Сначала убедимся, что при условии (1.6)

$$I_1 = \frac{z}{\zeta} \int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\beta+1}} d\zeta + O(1).$$

Действительно, мы имеем

$$I_1 - \frac{z}{\zeta} \int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\beta+1}} dt = \int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{\left(1 - \frac{tz}{\xi}\right)^{\beta}} \frac{dt}{t} = O(1).$$

Поэтому достаточно оценить интеграл

$$I_2 = \frac{z}{\zeta} \int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-t)^\beta}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^{\beta+1}} dt .$$

Но интегрированием по частям будем иметь

$$I_2 = \frac{-1}{\beta} \left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z}\right)^\beta + \int\limits_{|\zeta|^2}^{1} \frac{(1-t)^{\beta-1}}{\left(1 - \frac{tz}{\zeta}\right)^\beta} dt.$$

Далее, положив $z \dfrac{1-t}{\zeta - z} = u$, получим

$$I_2 = \frac{-1}{\beta}\left(\frac{1 - |\zeta|^2}{1 - \bar{\zeta} z}\right)^\beta + \left(\frac{\zeta}{z}\right)^\beta \int\limits_{0}^{\frac{z(1-|\zeta|^2)}{\zeta - z}} \frac{u^{\beta-1}}{(1+u)^\beta} du,$$

откуда очевидно, что при

$$\left| \frac{z(1 - |\zeta|^2)}{\zeta - z} \right| \leqslant 3 \text{ имеем } |I_2| \leqslant \text{const}.$$

Поэтому дальше будем предполагать, что

$$\left|\frac{z(1-|\zeta|^2)}{\zeta-z}\right| \geqslant 3.$$

В таком случае

$$I_2=\left(\frac{\zeta}{z}\right)^{\beta}\int\limits_0^3\frac{u^{\beta-1}}{(1+u)^{\beta}}\,du+\frac{-1}{\beta}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar\zeta z}\right)^{\beta}+$$

$$+\left(\frac{\zeta}{z}\right)^{\beta}\int\limits_3^{\frac{z(1-|\zeta|^2)}{\zeta-z}}\frac{u^{\beta-1}}{(1+u)^{\beta}}\,du=$$

$$=\left(\frac{\zeta}{z}\right)^{\beta}\int\limits_3^{\frac{z(1-|\zeta|^2)}{\zeta-z}}\left(1+\frac{1}{1+u}\right)^{\beta}\frac{du}{u}+O(1).$$

Учитывая разложение

$$(1-v)^{\beta}=1-\beta v+\beta(\beta-1)v^2+O(v^3),\ |v|<\frac{1}{2},$$

получим, что при условии (1.6)

$$I_2=\left(\frac{\zeta}{z}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{1-|\zeta|^2}{\zeta-z}\right)z+O(1),\ z\in l_{\zeta},\ |\zeta|,\ |z|\geqslant|\zeta_1|.$$

Итак, при условии (1.6)

$$\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-U_{\alpha}(z,\zeta)\}=\exp\left\{-\left(\frac{\zeta}{z}\right)^{\beta}\ln\left(\frac{1-|\zeta|^2}{\zeta-z}\right)z+O(1)\right\},\ z\in l_{\zeta}$$

или

$$\left|\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-U_{\alpha}(z,\zeta)\}\right|\leqslant\frac{|\zeta-z|}{(1-|\zeta|^2)}\times$$

$$\times\exp\left\{\left|\frac{\zeta^{\beta}-z^{\beta}}{z^{\beta}}\right|\ln\left|\frac{1-|\zeta|^2}{\zeta-z}\right|+O(1)\right\}.$$

Однако, ввиду (1.6)

$$\left|\frac{\zeta-z}{1-|\zeta|^2}\right|\leqslant 8\left|\frac{\zeta-z}{1-\bar\zeta z}\right|\leqslant 8,$$

и мы имеем

$$\left|\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-U_{\alpha}(z,\zeta)\}\right|\leqslant\exp\left\{C_0\left(|\zeta-z|\ln\frac{1}{|\zeta-z|}+1\right)\right\}$$

при условии, что $|z|,\ |\zeta|\geqslant|\zeta_1|>0$.

Объединяя все эти оценки и учитывая (1.6), приходим к неравенству

$$\left|\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\{-U_\alpha(z,\zeta)\}\right| \leqslant e\exp\left\{\mathrm{const}\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right|^{\alpha+2}\right\},\ z\in U, \qquad (1.7)$$

которое справедливо для всех $|\zeta| \geqslant |\zeta_1| = |z_1| > 0$. ●

Доказательство теоремы 1.1.

1°) Пусть $\alpha_0 > \alpha$, тогда, учитывая оценку (1.3), получим

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(1-\rho^2)^\alpha \ln|\pi_{\alpha_0}(\rho e^{i\theta})|\,\rho d\rho d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\alpha_0+2}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)^\alpha\,\rho d\rho d\theta}{|1-z_k\rho e^{-i\theta}|^{\alpha_0+2}}.$$

Но для внутреннего интеграла легко получить следующую оценку:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{|1-z_k\rho e^{-i\theta}|^{\alpha_0+2}} \leqslant \left(\frac{\pi^{\alpha_0+1}}{\alpha_0+1}+1\right)\frac{1}{(1-\rho|z_k|)^{\alpha_0+1}}, \qquad (1.8)$$

и поэтому

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-\rho^2)^\alpha\,\rho d\rho d\theta}{|1-z_k\rho e^{-i\theta}|^{\alpha_0+2}} \leqslant \mathrm{const}\int_0^1\frac{(1-\rho^2)^\alpha\,d\rho}{(1-\rho|z_k|)^{\alpha_0+1}} \leqslant \frac{\mathrm{const}}{(1-|z_k|)^{\alpha_0-\alpha}},$$

так как $\alpha_0 > \alpha$. Пользуясь этой же оценкой, получим

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(1-\rho^2)^\alpha \ln^+|\pi_{\alpha_0}(\rho e^{i\theta})|\,\rho d\rho d\theta \leqslant \mathrm{const}\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty.$$

2°) Проверяется аналогичным образом, так как в этом случае

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(1-\rho^2)^\alpha \ln^+|\pi_\alpha(\rho e^{i\theta})|\,\rho d\rho d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\alpha+2}\int_0^1\frac{(1-\rho^2)^\alpha}{(1-\rho|z_k|)^{\alpha+1}}\,d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\alpha+2}\ln\frac{1}{1-|z_k|} < +\infty. \ ●$$

Теорема 1.2. *Пусть точки* $\{z_k\}_1^\infty \subset U$ *лежат внутри некоторого угла с вершиной на* ∂U *и раствором, меньшим, чем* π. *Если*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\alpha+2}\ln\frac{1}{1-|z_k|}=+\infty,\quad(-1<\alpha<+\infty),$$

то произведение π_α с нулями $\{z_k\}_1^{+\infty}$ не принадлежит классу $A_\alpha^\bullet$.

Доказательству теоремы предпошлем следующую элементарную лемму.

Лемма 1.3. *Пусть $-1<\alpha<+\infty$ и $|\varphi|<\dfrac{\pi}{4(\alpha+2)}$. Тогда при всех t, $\rho\in(0,1)$ справедлива оценка*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1-t}{\rho t}+e^{-i\varphi}\right)^{\alpha+2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Доказательство. Обозначая $\dfrac{1-t}{\rho t}+e^{-i\varphi}=re^{i\theta}$, легко видеть, что в условиях леммы $r\geqslant 1$. Но так как

$$|\sin\theta|=\frac{|\sin\varphi|}{r},\quad\text{то}\quad|\sin\theta|\leqslant|\sin\varphi|.$$

Ввиду того, что $|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$, можем утверждать, что $|\theta|<|\varphi|$. Поэтому

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1-t}{\rho t}+e^{-i\varphi}\right)^{\alpha+2}=\operatorname{Re}\left(r^{\alpha+2}e^{i(\alpha+2)\theta}\right)=$$

$$=r^{\alpha+2}\cos(\alpha+2)\theta\geqslant r^{\alpha+2}\cos(\alpha+2)\varphi\geqslant r^{\alpha+2}\frac{\sqrt{2}}{2}.\ \bullet$$

Доказательство теоремы 1.2. Отметим, что случай, когда $\{z_k\}_1^\infty\subset U$ находятся внутри угла, по существу не отличается от случая, когда все $\{z_k\}_1^\infty$ находятся на некотором радиусе. Нужно только изменить область интегрирования. Поэтому будем предполагать, что они находятся на одном радиусе, и не ограничивая общности, будем предполагать, что $z_k\in(0,1)$, $k=1,\cdots$. Докажем, что отношение

$$g_\alpha(z)=\frac{\pi_{\alpha+1}(z)}{\pi_\alpha(z)}$$

не принадлежит классу $A_\alpha^\bullet$, отсюда ввиду теоремы 1.2 получим, что π_α не принадлежит классу $A_\alpha^\bullet$. Действительно, согласно лемме 1.2 имеем

$$g_\alpha(z)=\exp\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar z_k z}\right)^{\alpha+2}\right\},$$

поэтому в предположениях теоремы имеет место формула

$$\ln\left|\frac{\pi_{\alpha+1}(z)}{\pi_\alpha(z)}\right| = \ln|g_\alpha(z)| = \operatorname{Re}\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+2}\,dn(t)}{(1-\bar{t}z)^{\alpha+2}}, \qquad (1.10)$$

где $n(t)$ — число точек $\{z_k\}$ в круге $|z|\leqslant t$. Введя в рассмотрение круг

$$K=\left\{z:\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}\right\},$$

будем иметь

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}(1-r^2)^\alpha \ln^+|g_\alpha(re^{i\theta})|\,rdrd\theta \geqslant$$

$$\geqslant \iint_K (1-r^2)^\alpha \ln^+|g(re^{i\theta})|\,rdrd\theta.$$

Оценим последний интеграл снизу.

Очевидно, что если $1-z=\rho e^{i\theta}$, то K будет совпадать с множеством тех $\rho e^{i\theta}$, для которых $\rho\leqslant\cos\theta$, $|\theta|<\dfrac{\pi}{2}$. Тогда очевидно

$$I=\iint_K (1-r^2)^\alpha \ln^+|g_\alpha(re^{i\theta})|\,rdrd\theta =$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos\theta}(1-|1-\rho e^{i\theta}|^2)^\alpha \ln^+|g_\alpha(1-\rho e^{i\theta})|\,\rho d\rho d\theta.$$

Далее из (1.10) вытекает, что

$$\ln|g_\alpha(z)| = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+2}\operatorname{Re}(1-re^{-i\theta}t)^{\alpha+2}}{|1-tz|^{2(\alpha+2)}}\,dn(t),\quad z=re^{i\theta}.$$

Теперь оценим $\operatorname{Re}(1-t\,re^{-i\varphi})^{\alpha+2}$ снизу.

Сначала убедимся, что $\operatorname{Re}(1-t\,re^{-i\theta})^{\alpha+2}>0$ при $|\theta|<\dfrac{\pi}{4(\alpha+2)}$.

В самом деле, при $z=1-\rho e^{i\varphi}$

$$\operatorname{Re}(1-tre^{-i\theta})^{\alpha+2}=\operatorname{Re}(1-t+t(1-\bar{z}))^{\alpha+2}=\operatorname{Re}(1-t+t\rho e^{-i\varphi})^{\alpha+2}.$$

Следовательно

$$\operatorname{Re}(1-t\,re^{-i\theta})^{\alpha+2}=(\rho t)^{\alpha+2}\operatorname{Re}\left(\frac{1-t}{\rho t}+e^{-i\varphi}\right)^{\alpha+2}$$

и в силу леммы 1.3

$$\operatorname{Re}(1-tre^{-i\theta})^{\alpha+2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(\rho t)^{\alpha+2}.$$

Поэтому при $|\varphi| < \dfrac{\pi}{4(\alpha+2)}$ имеем

$$\ln^+ |g_\alpha(re^{i\varphi})| = \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+2}\,\mathrm{Re}\,(1-rte^{-i\varphi})^{\alpha+2}}{|1-tre^{-i\varphi}|^{2(\alpha+2)}}\,dn(t) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\,\rho^{\alpha+2}\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+2}\,t^{\alpha+2}}{|1-t+t\rho e^{i\theta}|^{2(\alpha+2)}}\,dn(t);\ 1-re^{i\varphi}=\rho e^{i\theta}.$$

Итак, ввиду того, что $|\theta| < |\varphi|$ (см. лемму 1.3), имеем

$$\iint_K (1-r^2)^\alpha \ln^\alpha |g_\alpha(re^{i\varphi})|\, r\,dr\,d\varphi \geqslant$$

$$\geqslant \int_{\frac{-\pi}{4(\alpha+2)}}^{\frac{\pi}{4(\alpha+2)}} \int_0^{\cos\theta} (1-|1-\rho e^{i\theta}|^2)^\alpha \ln^+ |g_\alpha(1-\rho e^{i\theta})|\,\rho\,d\rho\,d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 (1-t)^{\alpha+2}\,t^{\alpha+2}\left\{\int_{\frac{-\pi}{4(\alpha+2)}}^{\frac{\pi}{4(\alpha+2)}}\int_0^{\cos\theta}\frac{(1-|1-\rho e^{i\theta}|^2)^\alpha\,\rho^{\alpha+3}}{|1-t+t\rho e^{i\theta}|^{2(\alpha+2)}}\right\}dn(t),$$

а, как легко видеть, интеграл в скобках равен

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4(\alpha+2)}}\int_0^{\cos\theta}\frac{(1-|1-\rho e^{i\theta}|^2)^\alpha\,\rho^{\alpha+3}}{|1-t+\rho\,te^{i\theta}|^{2(\alpha+2)}}\,d\rho\,d\theta.$$

Наконец, оценим подынтегральное выражение, имея ввиду, что

$$1-|1-\rho^{i\theta}|^2 = \rho\,(2\cos\theta-\rho) \geqslant \rho\cos\theta$$

и что

$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4(\alpha+2)},\ \cos\theta \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2},\ 1-|1-\rho e^{i\theta}|^2 \geqslant \frac{\rho\sqrt{2}}{2}.$$

Учитывая эти неравенства и то, что под интегралом стоят неотрицательные функции, получим

$$I \geqslant \sqrt{2}\int_0^1 (1-t)^{\alpha+2}\,t^{\alpha+2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4(\alpha+2)}}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\rho^{2\alpha+3}\,d\rho\,d\theta}{[(1-t)^2+2t\rho\cos\theta+t^2]^{\alpha+2}}\right\}dn(t).$$

Последний интеграл, в свою очередь, больше, чем

$$\sqrt{2}\int_0^1 (1-t)^{\alpha+2}\,t^{\alpha+2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4(\alpha+2)}}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\rho^{2\alpha+3}\,d\rho\,d\theta}{[(1-t)^2+2t\rho+\rho^2t^2]^{\alpha+2}}\right\}dn(t).$$

Но имея ввиду, что

$$(1-t)^2+2t\rho+t^2\rho^2 \geqslant (1-t+t\rho)^2,$$

приходим к неравенству

$$I \geqslant \frac{\sqrt{2}}{4(\alpha+2)}\int\limits_0^1 (1-t)^{\alpha+2}\, t^{\alpha+2}\left\{\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\rho^{2\alpha+3}}{[(1-t)+\rho t]^{2(\alpha+2)}}\right\} dn(t).$$

Снова используя неотрицательность подынтегральных функций, получим

$$I > \frac{\pi\sqrt{2}}{4(\alpha+2)\,2^{\alpha+2}}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\alpha+2}\left\{\int\limits_{1-t}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\rho^{2\alpha+3}\,d\rho}{[\rho(1+t)]^{2(\alpha+2)}}\right\} dn(t)$$

или

$$I \geqslant \frac{\pi\sqrt{2}}{4^{2(\alpha+2)}(\alpha+2)}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\alpha+2}\left\{\int\limits_{1-t}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{d\rho}{\rho}\right\} dn(t) =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{(\alpha+2)(16)^{\alpha+2}}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t)^{\alpha+2}\left\{\ln\frac{1}{1-t}-\ln 2\right\} dn(t),$$

т. е.

$$\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-r^2)^{\alpha}\ln^+|g_\alpha(re^{i\varphi})|\,rdrd\varphi \geqslant C(\alpha)\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\alpha+2}\ln\frac{1}{1-|z_k|},$$

где $C(\alpha)$ — положительное число, зависящее только от α. ∎

Замечание 1.2. Из доказательства теоремы 1.2 следует, что в ее предположениях имеет место неравенство

$$\int\limits_0^1\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-r^2)^{\alpha}\ln^+|\pi_\alpha(re^{i\theta})|\,rdrd\theta \geqslant$$

$$\geqslant C(\alpha)\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\alpha+2}\ln\frac{1}{1-|z_k|},$$

где $C(\alpha)$ — некоторая постоянная.

§ 2. Характеристика нулей и некоторые свойства факторизации функций класса X_φ^∞

Сначала напомним определение класса X_φ^∞. Обозначим через $H(U)$ множество всех аналитических в U функций. Тогда

$$X_\varphi^\infty = \left\{ f \in H(U) : |f(z)| \leqslant \exp C_f \varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right\}.$$

В этом параграфе мы получим характеристику нулей функций класса X_φ^∞ при условии, что 1° $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая неотрицательная функция на $R_+ = (0, +\infty)$ и

2°. Для чисел

$$\beta_\varphi = \underline{\lim}\, \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \alpha_\varphi = \overline{\lim}\, \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$$

выполняются неравенства

$$1 < \beta_\varphi,\ \alpha_\varphi < +\infty. \tag{2.1}$$

Пусть

$$\Delta_{k,l} = \left\{z : 1 - \frac{1}{2^k} < |z| \leqslant 1 - \frac{1}{2^{k+1}},\ \frac{\pi l}{2^k} < \arg z \leqslant \frac{\pi(l+1)}{2^k}\right\},$$

$$-2^k \leqslant l \leqslant 2^k - 1,\ k = 1, 2, \cdots. \tag{2.2}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 2.2. *Пусть φ удовлетворяет вышеуказанным условиям, тогда справедливы следующие утверждения:*

1°. *Если $f \in X_\varphi^\infty$, $f(0) = 1$, то число нулей функции f в каждом прямоугольнике* (2.2) *не превосходит* const $\varphi(2^k)$;

2°. *Обратно, пусть $0 < \beta_\varphi$, $\alpha_\varphi < +\infty$ и $\{z_k\}_1^\infty \subset U$ — любая последовательность точек, число которых в каждом прямоугольнике $\Delta_{k,l}$ не превосходит* const $\varphi(2^k)$. *Тогда произведение π_α с нулями $\{z_k\}_1^\infty$ принадлежит классу X_φ^∞ для всех $\alpha > \alpha_\varphi + 1$.*

Доказательству теоремы предпошлем следующую лемму, которая установлена в [6], но для полноты изложения приведем основные этапы ее доказательства.

Лемма 2.1. *Пусть $\varphi(x) > 0$ — монотонно растущая функция на R_+ и*

$$\alpha_\varphi = \overline{\lim}\, \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} < +\infty.$$

Тогда для любого $\alpha > \alpha_\varphi$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{z \in \Delta_{k,l}} \left[\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right) \frac{(1-|z|)^{\alpha+2}}{|1-\overline{w}z|^{\alpha+2}} \right] \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \frac{(1-\rho^2)^\alpha \rho\, d\rho\, d\theta}{|1 - w\rho e^{-i\theta}|^{\alpha+2}}.$$

Доказательство. Пусть $0<\eta<1$ и $z\in U$. Введем в рассмотрение круг

$$K_\eta(z)=\{\zeta: |\zeta-z|<\eta(1-|z|)\}.$$

Легко заметить справедливость следующего неравенства:

$$\frac{(1-|z|)^{\alpha+2}}{|1-\overline{w}\,z|^{\alpha+2}}\leqslant\frac{(1+\eta)^{\alpha+2}}{(1-\eta)^2}\iint\limits_{K_\eta(z)}\frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{|1-\overline{\zeta}\,z|^{\alpha+2}}\,d\sigma(\zeta),$$

где $d\sigma$ — плоская мера Лебега. Учитывая, что при $\zeta\in K_\eta(z)$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{1-|z|}\leqslant\frac{1}{1-\eta}\,\frac{1}{1-|\zeta|}$$

и используя тот факт, что

$$\varphi(cu)\leqslant c^{\alpha_\varphi}\varphi(u),\ u\geqslant 1,$$

мы приходим к неравенствам:

$$\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\leqslant\varphi\left(\frac{1}{(1-\eta)(1-|\zeta|)}\right)\leqslant\frac{1}{(1-\eta)^{\alpha_\varphi}}\,\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right),\ \zeta\in K_\eta(z).$$

Отсюда вытекает, что

$$\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\frac{(1-|z|)^{\alpha+2}}{|1-\overline{w}\,z|^{\alpha+2}}\leqslant\frac{(1+\eta)^{\alpha+2}}{(1-\eta)^2}\,\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\int\limits_{K_\eta(z)}\frac{(1-|\zeta|)^\alpha\,d\sigma(\zeta)}{|1-\overline{w}\,\zeta|^{\alpha+2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(1+\eta)^{\alpha+2}}{(1-\eta)^{\alpha_\varphi+2}}\int\limits_{K_\eta(z)}\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\frac{(1-|\zeta|)^\alpha}{|1-\overline{w}\,\zeta|^{\alpha+2}}\,d\sigma(\zeta).$$

Чтобы завершить доказательство леммы, остается покрыть прямоугольники (2.2) кружками $K_\eta(z)$ (подробнее см. [6]). ●

Доказательство теоремы 2.1.

1°. Пусть $f\in X_\varphi^\alpha$, обозначим через $n_f(z_0)$ число нулей функции f в круге $K_{\frac{1}{2}}(z_0)$. Для доказательства первого пункта теоремы используем следующую формулу Хеймана-Линдена (см. [4]):

$$n_f(z_0)\leqslant\frac{C(\beta)}{(1-R)^\beta}\left\{\int\limits_0^R(1-t)^{\beta-1}\left(\max_{|z|=t}|f(z)|+1\right)dt\right\},$$

$$1<\beta<2,\ |z_0|<R<1. \tag{2.3}$$

Положим $R=\dfrac{1+r_0}{2}$, $r_0=|z_0|$ и учтем тот факт, что

$$\beta_\varphi=\underline{\lim}\,\frac{x\,\varphi'(x)}{\varphi(x)}>1.$$

Тогда подбирая β и $\varepsilon > 0$ таким образом, чтобы

$$\beta_\varphi > \beta + \varepsilon > 1,$$

мы получим

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} > \frac{\beta+\varepsilon}{x}, \quad x \geqslant x_0. \tag{2.4}$$

Но так как при $x \leqslant x_0$ можно задать функцию φ произвольно, то можно предположить, что неравенство (2.4) выполняется всюду в R_+. Проинтегрировав неравенство (2.4) по интервалу (x_0, x), получим

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)} \geqslant \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\beta+\varepsilon} \tag{2.5}$$

для произвольных x_0, x $(x \geqslant x_0)$.

Теперь займемся упрощением неравенства (2.3). Во-первых, отметим, что

$$n_f(z_0) \leqslant \frac{C(\beta)2^\beta}{(1-r_0)^\beta}\left\{\int\limits_0^{\frac{1+r_0}{2}} (1-t)^{\beta-1}\varphi\left(\frac{1}{1-t}\right)dt + 1\right\},$$

откуда заменой переменной $\frac{1-r_0}{1-t} = u$ получим

$$n_f(z_0) \leqslant C_1(\beta)\left\{\int\limits_{1-r_0}^{2}\varphi\left(\frac{u}{1-r_0}\right)\frac{du}{u^{1+\beta}} + \frac{1}{(1-r_0)^\beta}\right\}.$$

Пусть

$$I = \int\limits_{1-r_0}^{2}\varphi\left(\frac{u}{1-r_0}\right)\frac{du}{u^{1+\beta}}.$$

Тогда, положив в (2.5) $x = \frac{1}{1-r_0}$; и $x_0 = \frac{u}{1-r_0}$ при $0 < u \leqslant 1$ приходим к неравенствам

$$I \leqslant \varphi\left(\frac{1}{1-r_0}\right)\int\limits_{1-r_0}^{1} u^{\varepsilon-1}\,du + 2^{\alpha_\varphi}\varphi\left(\frac{1}{1-r_0}\right)$$

или

$$I \leqslant \varphi\left(\frac{1}{1-r_0}\right)\left\{\frac{1}{\varepsilon} + 2^{\alpha_\varphi} - 1\right\}.$$

Вновь пользуясь неравенством (2.5), получим

$$n_f(z_0) \leqslant C(\varepsilon, \beta\alpha_\varphi)\,\varphi\left(\frac{1}{1-|z_0|}\right).$$

Отсюда следует первый пункт теоремы, так как каждый прямоугольник $\Delta_{k,l}$ можно покрыть конечным числом кружков вида $K_{\frac{1}{2}}(z_0)$.

2°. Пусть $\alpha > \alpha_0 + 1$, тогда очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty.$$

Докажем, что бесконечное произведение π_α с нулями $\{z_k\}_1^\infty$ принадлежит классу X_φ^∞. Используем лемму 1.2, согласно которой

$$\ln|\pi_\alpha(z)| \leqslant \mathrm{const} \sum_{k=1}^{+\infty} \left|\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}\right|^{\alpha+2} =$$

$$= \mathrm{const} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \sum_{z_j \in \Delta_{k,l}} \frac{(1-|z_j|^2)^{\alpha+2}}{|1-\bar{z}_j z|^{\alpha+2}}.$$

Однако, по условию теоремы

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \sum_{z_j \in \Delta_{k,l}} \left|\frac{1-|z_j|^2}{1-\bar{z}_j z}\right|^{\alpha+2} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \max_{t \in \Delta_{k,l}} \left\{ \varphi\left(\frac{1}{1-|t|}\right) \frac{(1-|t|^2)^{\alpha+2}}{|1-\bar{t} z|^{\alpha+2}} \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \frac{(1-\rho^2)^{\alpha}}{|1-z\rho e^{-i\theta}|^{\alpha+2}}. \tag{2.6}$$

Чтобы завершить доказательство теоремы нужно оценить последний интеграл. Учитывая (1.8), имеем

$$I \leqslant \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \frac{(1-\rho^2)^{(\alpha)}\rho\, d\rho\, d\theta}{|1-z\rho e^{-i\theta}|^{\alpha+2}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const} \int_0^1 \varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \frac{(1-\rho^2)^{\alpha}}{(1-\rho|z|)^{\alpha+1}}\, d\rho$$

или

$$I \leqslant \left\{ \int_0^{|z|} \varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \frac{(1-\rho^2)^{\alpha}}{(1-|z|\rho)^{\alpha+1}}\, d\rho + \right.$$

$$\left. + \int_{|z|}^1 \varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \frac{(1-\rho^2)^{\alpha}\, d\rho}{(1-|z|\rho)^{\alpha+1}} \right\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{const}\ \{I_1 + I_2\}.$$

Очевидно, что

$$I_1 \leqslant \text{const} \int\limits_0^{|z|} \varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\frac{d\rho}{\rho}\,.$$

Далее, положив $\dfrac{1-|z|}{1-\rho} = u$, получим

$$I_1 \leqslant \text{const} \int\limits_{1-|z|}^{1} \varphi\left(\frac{u}{1-|z|}\right)\frac{du}{u}\,.$$

Заметим теперь, что ввиду условия

$$\underline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} > \varepsilon > 0$$

имеем

$$\varphi\left(\frac{u}{1-r}\right) \leqslant u^{\varepsilon}\,\varphi\left(\frac{1}{1-r}\right),\quad r,\ u\in[0,1].$$

Поэтому

$$\int\limits_{1-|z|}^{1} \varphi\left(\frac{u}{1-|z|}\right)\frac{du}{u} \leqslant \varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\int\limits_{1-|z|}^{1}\frac{du}{u^{1-\varepsilon}} <$$

$$< \frac{1}{\varepsilon}\,\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right). \tag{2.7}$$

Чтобы оценить I_2 снова произведем замену переменной $\dfrac{1-|z|}{1-\rho} = u$. В результате получим

$$I_2 \leqslant \int\limits_1^{+\infty} \varphi\left(\frac{u}{1-|z|}\right)\frac{du}{u^{\alpha+2}}$$

и так как

$$\varphi\left(\frac{u}{1-|z|}\right) \leqslant u^{\alpha_\varphi}\,\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right),\quad u>1,$$

то

$$I_2 \leqslant \frac{1}{1+\alpha-\alpha_\varphi}\,\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right),\quad z\in U. \tag{2.8}$$

Объединяя оценки (2.6)—(2.8), получаем утверждение теоремы. ●

З а м е ч а н и е 2.1. Отметим, что при $\varphi(x) = x^{\gamma}$, $1<\gamma<+\infty$ и целых α утверждение теоремы было доказано другим методом Линденом [4].

Из теоремы 2.1 и из результатов И. Ф. Красичкова-Терновского [6] вытекает такое

Следствие 2.1. Пусть φ — монотонно растущая неотрицательная функция на $(0, +\infty)$, для которой $1 < \beta_\varphi, \alpha_\varphi < +\infty$. Предположим, что $\alpha > \alpha_\varphi + 1$ и $f \in X^-_\varphi$, тогда, если

$$f(z) = \pi^f_\alpha(z) \exp\{g^f_\alpha(z)\}, \; z \in U,$$

то функции π^f_α и $\exp\{\pm g^f_\alpha\}$ принадлежат классу X^-_φ.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23.X.1978

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. *Մ. Մ. Ջրբաշյանի ֆակտորիզացիոն թեորեմը և շրջանում անալիտիկ. վերջավոր կարգի մաժորանտա ունեցող անալիտիկ ֆունկցիաների զերոների խարակտերիստիկան (ամփոփում)*

Մ. Մ. Ջրբաշյանի թեորեմի համաձայն [2] A^*_α $(\alpha > -1)$ *դասին պատկանող յուրաքանչյուր f ֆունկցիա թույլ է տալիս կանոնական ֆակտորիզացիա*

$$f(z) = \pi^f_\alpha(z) \exp\{g^f_\alpha(z)\}, \; |z| < 1:$$

Հոդվածում քննարկվում է ֆակտորիզացիոն արտադրիչների՝ π^f_α*-ի և* $\exp\{g^f_\alpha\}$ *-ի A դասին պատկանելության հարցը։ Բացի այդ* $\varphi(x) \geq 0$ *մոնոտոն աճող ֆունկցիայի վրա որոշ բնական սահմանափակումների դեպքում, տրվում է շրջանում անալիտիկ, այն ֆունկցիաների զերոների լրիվ խարակտերիստիկան, որոնց համար*

$$\sup_{|z|<1} \left\{ |f(z)| \exp\left(-C f \varphi \left(\frac{1}{1-|z|} \right) \right) \right\} < +\infty:$$

F. A. SHAMOJAN. *M. M. Jrbashian's factorization theorem and characterization of zeros of analytical in a disc functions with a bounded srowth rate* (summary)

According to M. M. Jrbashian's theorem every holomorphic in the unite circle function f from the class

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)^\alpha \ln^+ |f(re^{i\varphi})| \, r dr d\varphi \quad (\alpha > -1) \tag{1}$$

permits the canonical factorization

$$f(z) = \pi^f_\alpha(z) \exp\{g^f_\alpha(z)\}, \; |z| < 1.$$

The articale considers the question of class (1) membership of the factors π^f_α and $\exp\{g^f_\alpha\}$. This yields a result on zeros of holomorphic with in the unite circle functions for which

$$\sup_{|z|<1} \left\{ |f(z)| \exp\left(-C f \varphi \left(\frac{1}{1-|z|} \right) \right) \right\} < +\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. ин-та математики и механики АН Арм.ССР, вып. 2, 1948, 3—55.
3. *M. Tsuji.* Canonical product of meromorphic function in the unit disc, Journ. of Math. Soc. of Japan, 8, № 1, 1956, 7—19.
4. *C. N. Linden.* The representation of regular functions, Journ. Lond. Math. Soc., 39, № 153, 1964, 19—30.
5. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, Изд. „Наука", М., 1970.
6. *Ф. А. Шамоян.* Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n)$, $0 < p < +\infty$, Мат. сб., 107 (149), № 3 (11), 1978, 446—462.
7. *И. Ф. Красичков-Терновский.* Оценки субгармонических разностей субгармонических функций I, Мат. сб., 102 (144), 1977, 216—247, II т., 103 (145), 1977, 69—111.