

А. Е. АВЕТИСЯН, С. А. АКОПЯН, И. О. ХАЧАТРЯН

О ЗАМКНУТОСТИ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ЛУЧЕЙ

1°. Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из области $\operatorname{Re} \lambda > 0$, а $s_k \geq 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $[\lambda_j]_{j=1}^k$. Известна следующая теорема Мюнца-Сасса в обобщенной формулировке [1, 2].

Теорема А. Для замкнутости системы функций $|e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}|_1^2$ в $L_2(0, +\infty)$ необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} = +\infty.$$

М. М. Джрбашьяном [2] исследован вопрос о замкнутости системы функций, порожденных целой функцией Миттаг-Леффлера

$$E_p(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})} \quad (\mu > 0, \rho > 0)$$

и установлен критерий замкнутости этих систем. Чтобы сформулировать результат М. М. Джрбашьяна, введем обозначения: через $\Delta(\alpha)$

$\left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty\right)$ обозначим угловую область $\left\{\lambda: |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2\alpha}, 0 < |\lambda| < +\infty\right\}$, и пусть $\lambda_k \in \Delta(\alpha)$ ($k = 1, 2, \dots$), а s_k имеет вышеприведен-

ный смысл. Далее, для данного ω ($-1 < \omega < 1$) обозначим через $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ множество измеримых на $(0, +\infty)$ функций f , для которых

$$\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 x^\omega dx < +\infty.$$

Полагая $\rho = \frac{\alpha}{2\alpha-1}$, $\mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}$, рассмотрим систему функций

$$\{E_p^{(s_k-1)}(-\lambda_k x; \mu) x^{s_k-1}\}_1^\infty. \quad (1)$$

Следующая теорема является обобщением вышеприведенной теоремы А Мюнца-Сасса.

Теорема Б. (М. М. Джрбашян). Для замкнутости системы (1) в метрике $L_{2,\alpha}(0, +\infty)$ необходимо и достаточно, чтобы расходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k^\alpha}{1 + |\lambda_k|^{2\alpha}}. \quad (2)$$

М. М. Джрбашяном и В. М. Мартиросяном исследованы вопросы замкнутости систем $\{e^{-\lambda_k z} z^{\lambda_k-1}\}$ и $\{E_p^{(\lambda_k-1)}(-\lambda_k \zeta; \mu) \zeta^{\lambda_k-1}\}$ в различных пространствах функций, определенных на двух лучах [3, 4].

В настоящей работе установлен критерий замкнутости системы функций

$$\{E_p^{(\lambda_k-1)}(\lambda_k \zeta; \mu) \zeta^{\lambda_k-1}\}_1^\infty \quad (3)$$

на произвольной конечной системе лучей, исходящих из начала координат. При этом мы пользуемся классическим методом сведения задачи к теореме единственности в определенном классе голоморфных функций, что, в свою очередь, сводит задачу к обращению интегрального преобразования М. М. Джрбашяна на системе лучей.

2°. Приведем, предварительно, некоторые результаты, на которые будем опираться в дальнейшем.

а) Пусть $v_k(\tau) \in L_2(0, +\infty)$ ($k=1, 2, \dots, n$).

Предположим, что

$$0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi, \quad \varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi, \\ \rho > \alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\pi}{\varphi_{k+1} - \varphi_k} \right\}, \quad \mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}, \quad -1 < \omega < 1. \quad (4)$$

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty E_p(z e^{-i\varphi_k} \tau^{\frac{1}{\rho}}; \mu) \tau^{\mu-1} v_k(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Формула (5) определяет, вообще говоря, разные аналитические функции в угловых областях Δ_k ($k=1, 2, \dots, n$)

$$\Delta_k = \left\{ z: \varphi_k + \frac{\pi}{2\rho} < \arg z < \varphi_{k+1} - \frac{\pi}{2\rho}, \quad 0 < |z| < +\infty \right\}.$$

При этом $F(z)$ в каждой области Δ_k удовлетворяет условиям

$$\sup \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr < +\infty, \quad (6)$$

где $\sup$ берется по $\varphi: \varphi_k + \frac{\pi}{2\rho} < \varphi < \varphi_{k+1} - \frac{\pi}{2\rho}$.

Обозначим через $H_{2,\omega}(\Delta_k)$ класс функций, голоморфных в угловой области Δ_k и удовлетворяющих условию (6). По сказанному

$$F(z) \in H_{2,\omega}(\Delta_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (L)$$

В работе [5] доказана следующая теорема, дающая формулы обращения для (5).

Теорема В. Если для произвольных $v_k(\tau) \in L_2(0, +\infty)$, $k = 1, 2, \dots, n$ составить функцию (5), где ρ, μ, ω имеют вышеуказанный смысл, то почти всюду на $(0, +\infty)$ справедливы следующие формулы обращения: ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} v_k(\tau) = & \frac{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\tau t} - 1}{it} F\left(t^{\frac{1}{\rho}} e^{i\left(\varphi_k + \frac{\pi}{2\rho}\right)}\right) t^{\mu-1} dt + \\ & + \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{2\pi\rho} \frac{d}{d\tau} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-i\tau t} - 1}{-it} F\left(t^{\frac{1}{\rho}} e^{i\left(\varphi_k - \frac{\pi}{2\rho}\right)}\right) t^{\mu-1} dt. \end{aligned} \quad (8)$$

б) В упомянутой работе [2] М. М. Джрбашяна содержится теорема единственности для класса $H_2[\alpha, \omega]$. Приведем формулировку теоремы для области Δ_k .

Теорема Г. Если функция $\Phi(z) \in H_{2,\omega}(\Delta_k)$ обращается в нуль в точках $\lambda_j \in \Delta_k$ (с кратностью s_j) и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\lambda_j e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{\alpha_k}}{1 + |\lambda_j|^{2\alpha_k}} = +\infty, \quad (9)$$

где $\alpha_k = \frac{\pi\rho}{\rho(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - \pi}$, то $\Phi(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_k$.

Если же ряд (9) сходится, то бесконечное произведение

$$B_{\alpha_k}(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{\alpha_k} - (\lambda_j e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{\alpha_k}}{(\lambda e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{\alpha_k} + (\lambda_j e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{\alpha_k}} \chi_j, \quad (10)$$

где

$$\chi_j = \frac{|1 - (\lambda_j e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{2\alpha_k}|}{1 - (\lambda_j e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})^{2\alpha_k}}, \quad \alpha_k = \frac{\pi\rho}{\rho(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - \pi},$$

сходится в области Δ_k , причем

$$B_{\alpha_k}(\lambda) \neq 0, \quad |B_{\alpha_k}(\lambda)| \leq 1, \quad \lambda \in \Delta_k.$$

3°. Перейдем теперь к изложению нашего результата.

Пусть теперь Γ означает совокупность лучей

$$\arg z = -\varphi_k, \quad 0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n = 2\pi.$$

Обозначим через $L_{2,\omega}(\Gamma)$ множество функций f , определенных на Γ и удовлетворяющих условию

$$\int_{\Gamma} |f(z)|^2 |z|^\omega d|z| < +\infty.$$

Обозначим через Δ объединение всех областей Δ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) $\Delta = \bigcup_{k=1}^n \Delta_k$. Пусть в каждой области Δ_k задана последовательность комплексных чисел $\{\lambda_j^{(k)}\}$. Обозначим через $s_i^{(k)}$ кратность числа $\lambda_i^{(k)}$ среди совокупности $\{\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \dots, \lambda_l^{(k)}\}$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Рассмотрим, наконец, систему функций

$$\{E_p^{(s_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)} \zeta; \mu) \zeta^{s_i^{(k)}-1}\}_{i=1}^{\infty}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad \zeta \in \Gamma, \quad (11)$$

где p и μ определяются из условий (4).

Из асимптотических свойств функции $E_p(z; \mu)$ [6, стр. 136] легко следует, что каждая функция системы (11) принадлежит классу $L_{2,\omega}(\Gamma)$.

Имеет место следующая

Теорема. Для замкнутости системы

$$\{E_p^{(s_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)} \zeta; \mu) \zeta^{s_i^{(k)}-1}\}_{i=1}^{\infty}, \quad k = 1, 2, \dots, n \text{ в } L_{2,\omega}(\Gamma)$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\lambda_j^{(k)}) e^{-i \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}}}{1 + |\lambda_j^{(k)}|^{2\alpha_k}} = +\infty, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

где

$$\alpha_k = \frac{\pi\rho}{\rho(\varphi_{k+1} - \varphi_k) - \pi}.$$

Доказательство. Пусть для некоторой функции $f_0 \in L_{2,\omega}(\Gamma)$ выполняются равенства

$$\int_{\Gamma} E_p^{(s_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)} \zeta; \mu) \zeta^{s_i^{(k)}-1} \overline{f_0(\zeta)} |\zeta|^\omega d|\zeta| = 0 \quad (13)$$

$$(i = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n).$$

Равенство (13) можно записать в форме

$$\sum_{k'=1}^n \int_0^{+\infty} E_p^{(s_j^{(k)}-1)} (\lambda_j^{(k)} \tau^{\frac{1}{p}} e^{-l\varphi_{k'}}; \mu) \tau^{\mu-1+\frac{s_j^{(k)}-1}{p}} v_{k'}(\tau) d\tau = 0 \quad (14)$$

$$(j=1, 2, \dots; k=1, 2, \dots, n),$$

где

$$v_{k'}(\tau) = \frac{1}{p} e^{-\varphi_{k'}(s_j^{(k)}-1)} \overline{f_0(\tau^{\frac{1}{p}} e^{-l\varphi_{k'}}) \tau^{\mu-1}}, \quad k'=1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Из $f_0 \in L_{2,\omega}(\Gamma)$ следует, что $v_{k'} \in L_2(0, +\infty)$, $k'=1, 2, \dots, n$. Составим функцию

$$F(\lambda) = \sum_{k=1}^n \int_0^{+\infty} E_p(\lambda \tau^{\frac{1}{p}} e^{-l\varphi_k}; \mu) \tau^{\mu-1} v_k(\tau) d\tau, \quad (16)$$

она голоморфна в каждой области Δ_k и при этом $F(\lambda) \in H_{2,\omega}(\Delta_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$).

Из (14) следует, что

$$F^{(s_j^{(k)}-1)}(\lambda_j^{(k)}) = 0 \quad (j=1, 2, \dots; k=1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

Из условия (12) на основании теоремы единственности (Γ) заключаем, что

$$F(\lambda) \equiv 0, \quad \lambda \in \Delta. \quad (18)$$

Теперь применяя формулу обращения (8) теоремы В, получим, что функции $v_k(\tau)$ ($k=1, 2, \dots, n$) равны нулю почти всюду на $(0, +\infty)$. А это в силу (15) означает, что $f_0(\zeta) = 0$ почти всюду на Γ и достаточность условий (12) доказана.

Для доказательства необходимости допустим, что хотя бы одно из условий (12) нарушено. Пусть для некоторого k ($1 \leq k \leq n$) ряд (12) сходится. Тогда существует произведение Бляшке $B_{\alpha_k}(\lambda) \neq 0$ для области Δ_k (см. (10)).

Функция

$$\Phi(\lambda) = \frac{B_{\alpha_k}(\lambda)}{1 + \lambda e^{-l \frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}}} \quad (19)$$

принадлежит классу $H_{2,\omega}(\Delta_k)$, и, следовательно, имеет представление [7]

$$\Phi(\lambda) = \int_0^{+\infty} E_p(\lambda \tau^{\frac{1}{p}} e^{-l\varphi_k}; \mu) \tau^{\mu-1} v_k(\tau e^{-l\varphi_k}) d\tau +$$

$$+ \int_0^{+\infty} E_p(\lambda \tau^{\frac{1}{p}} e^{-l\varphi_{k+1}}; \mu) \tau^{\mu-1} v_{k+1}(\tau e^{-l\varphi_{k+1}}) d\tau \quad (v_{n+1} = v_1), \quad (20)$$

где v_k и v_{k+1} принадлежат $L_2(0, +\infty)$.

Формулу (20) можно записать в виде

$$\Phi(\lambda) = \int_{\Gamma_k} E_p(\lambda; \mu) |\zeta|^\mu \overline{\varphi(\zeta)} d|\zeta|, \quad (21)$$

где Γ_k — пара лучей $\arg z = -\varphi_k$ и $\arg z = -\varphi_{k+1}$, а

$$\varphi(\zeta) = \begin{cases} \rho v_k (\tau^p e^{-i\varphi_k})^{-1} \tau^{p(1-\lambda)}, & \text{если } \zeta = \tau e^{-i\varphi_k} \\ \tau v_{k+1} (\tau^p e^{-i\varphi_{k+1}})^{-1} \tau^{p(1-\lambda)}, & \text{если } \zeta = \tau e^{-i\varphi_{k+1}} \end{cases}$$

Легко видеть, что $\varphi(\zeta) \in L_{2,\omega}(\Gamma_k)$ и $\varphi(\zeta) \neq 0$. Функция $\Phi(\lambda)$, опреде-

ленная равенством (20) (или (21)) равна $B_{\tau_k}(\lambda)/(1 + \lambda e^{-i\frac{\varphi_k + \varphi_{k+1}}{2}})$ в области Δ_k и равна нулю в других областях $\Delta_j, j \neq k$ (см. [6]). Имеем

$$B_{\tau_k}^{(j)}(\lambda_i^{(k)}) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, s_i^{(k)} - 1; 1 \leq i < +\infty),$$

из (21) $s_i^{(k)} - 1$ — кратным дифференцированием получим

$$\int_{\Gamma_k} E_p^{(s_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)}; \mu) \zeta^{s_i^{(k)}-1} \overline{\varphi(\zeta)} |\zeta|^\mu d|\zeta| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (22)$$

Теперь рассмотрим на Γ функцию

$$\psi(\zeta) = \begin{cases} \varphi(\zeta), & \text{когда } \zeta \in \Gamma_k \\ 0, & \text{когда } \zeta \in \Gamma \setminus \Gamma_k. \end{cases} \quad (23)$$

Ясно, что $\psi(\zeta) \neq 0$ на Γ и $\psi(\zeta) \in L_{2,\omega}(\Gamma)$. Из (22), (23) имеем

$$\int_{\Gamma} E_p^{(s_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)}; \mu) \zeta^{s_i^{(k)}-1} \overline{\psi(\zeta)} |\zeta|^\mu d|\zeta| = 0, \quad i = 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots, n.$$

Это и доказывает необходимость условий (12). Теорема доказана.

Ереванский институт народного хозяйства,

Ереванский государственный университет,

Армянский гос. пед. институт им. Х. Абовяна

Поступила 28.IX.1978

Ա. Ե. ԱՎԵՏԻՍԻԱՆ, Ս. Ա. ՀԱԿՈՐՅԱՆ, Ի. Ն. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Ճառագայթների կամայական վերջավոր սխտեմի վրա Միտտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների սխտեմի փակության մասին (ամփոփում)

Ներկա աշխատանքում ուսումնասիրվում է

$$\{E_p^{(s_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)}; \mu) \zeta^{s_i^{(k)}-1}\}_{i=1}^{s_i^{(k)}-1} \quad k=1, 2, \dots, n.$$

Ֆունկցիաների սխտեմի փակության հարցը մի կետից ելնող ճառագայթների վերջավոր սխտեմի վրա, նրկու ճառագայթների վրա նշված սխտեմի փակության հարցը ուրիշ մեթոդով ուսումնասիրված է Վ. Մ. Մարտիրոսյանի [4] աշխատանքում: Մենք առաջնորդվում ենք դասական այն մեթոդով, որը խնդիրը բերում է հոյամորֆ ֆունկցիաների որոշակի դասի միակության թեորեմի, իսկ սա իր հերթին խնդիրը հանգեցնում է ճառագայթների սխտեմի վրա Մ. Մ. Ջորաշյանի ինտեգրալ ձևափոխության շրջմանը:

A. E. AVETISIAN, S. A. AKOPIAN, J. O. KHATCHATURIAN. *On the closure of Mittag Leffler type systems on arbitrary finite set of rays (summary)*

In this paper we investigate the closure problem for functions system

$$\{E_p^{(\lambda_i^{(k)}-1)}(\lambda_i^{(k)}\zeta; \mu)\zeta^{\lambda_i^{(k)}-1}\}_{i=1}^n, k=1, 2, \dots, n$$

on a finite set of rays starting from one point. The two rays case has been studied by a different method in the work [4] of V. M. Martirosian. We are guided by the classical method, which reduces the problem to the uniqueness theorem for a class analytic functions and further to the inversion of M. M. Djrbashian's integral transformation.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. М. Джрбашян. О пополнении и замкнутости неполной системы функций $\{e^{-\lambda_k x^{\lambda_k-1}}\}_1^n$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
2. М. М. Джрбашян. О замкнутости систем функций типа Миттаг-Леффлера. ДАН СССР, 219, № 6, 1974, 1302—1305.
3. М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян. Теоремы типа Винера-Пэли и Мюнца-Сасса, ДАН СССР, 225, № 5, 1975, 1001—1004.
4. В. М. Мартиросян. О замкнутости систем функций типа Миттаг-Леффлера и систем простейших рациональных дробей, ДАН Арм.ССР. LXII, № 5, 1976, 269—273.
5. А. Е. Аветисян. К теории интегральных преобразований М. М. Джрбашяна, ДАН Арм.ССР, LXV, № 5, 1977, 266—270.
6. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука“, 1966.
7. М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сиб. мат. ж., I, № 3, 1960, 383—426.