ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № № 5—6, 1978 Математика

ДЖРБАШЯН МХИТАР МКРТИЧЕВИЧ

(к шестидесятилетию со дня рождения)

Исполнилось 60 лет со дня рождения выдающегося советского математика, крупного аналитика, академика АН Армянской ССР, заслуженного деятеля науки, директора Института математики Академии наук Армении Мхитара Мкртичевича Джрбашяна. Велики заслуги М. М. Джрбашяна, одного из самых признанных в нашей стране специалистов по теории функций, в деле развития математической науки в Армении.

Семья М. М. Джрбашяна, спасаясь от геноцида 1915 года, перебралась из города Вана в Ереван. Мхитар Мкртичевич Джрбашян родился в Ереване 11 сентября 1918 года.

По окончании средней школы в 1936 году М. М. Джрбашян поступил на физико-математический факультет Ереванского государственного университета. В студенческие годы быстро проявились его незаурядные математические способности. Он стал самым активным участником первого научного семинара по теории функций, руководимого А. Л. Шагиняном.

Наиболее значительным событием студенческих лет М. М. Джрбашяна явились превосходные лекции, прочитанные в 1940 году гостившим в Ереване выдающимся математиком М. В. Келдышем. Эти лекции, посвященные новейшим разделам теории аналитических функций, были насыщены самыми свежими для того времени идеями и четкими постановками ряда нерешенных проблем. М. В. Келдыш увлекательно рассказывал также о своих собственных блестящих научных достижениях.

Лекции М. В. Келдыша и его последующие научные контакты с армянскими математиками, оказали определяющее влияние на формирование научных интересов М. М. Джрбашяна и сыграли решающую роль в деле становления и развития армянской математической школы теории функций комплексного переменного.

После блестящего окончания Университета М. М. Джрбашян с 1942 по 1945 г.г. работал ассистентом и одновременно учился в аспирантуре Ереванского университета под руководством А. Л. Шагиняна.

В 1945 году им была успешно защищена кандидатская диссертация на тему «Некоторые вопросы представимости аналитических функций». Это была первая защита диссертации по математике в Ереванском университете.

В своей диссертационной работе М. М. Джрбашян решил поставленную перед ним экстремальную задачу, связанную с многочленами, ортогональными по площади [1]. В той же работе М. М. Джрбашян положил начало весьма важной и перспективной проблематики в области классической теории функций [2]. Это явилось первым существенным продвижением в указанном направлении после, ставших уже тогда классическими, результатов выдающегося финского математика Р. Неванлинны, полученных им еще в двадцатые годы. Речь идет о развитой М. М. Джрбашяном самой общей и совершенной теории факторизации мероморфных функций. Результаты, полученные в диссертации, послужили основой для последующих глубоких исследований М. М. Джрбашяна и его учеников, интенсивно продолжающихся и по сей день.

С этого времени начинается плодотворная научно-педагогическая деятельность М. М. Джрбашяна в Ереванском университете и в Секторе математики АН Армянской ССР (1945—1955 г.г.), который впоследствии стал основой Института математики и механики (1955—1971 г.г.).

Всего лишь 4 года спустя, в 1949 году, он с большим успехом защитил в Московском университете докторскую диссертацию — «Метрические теоремы о полноте и представимости аналитических функций». Официальные оппоненты М. В. Келдыш, А. О. Гельфонд и А. И. Маркушевич, оценив результаты М. М. Джрбашяна как крупный вклад в теорию приближений функций комплексного переменного, отмечали, что автор в совершенстве владеет современными методами анализа и теории функций.

Став одним из ведущих математиков Армении, М. М. Джрбашян в 1953 году избирается членом-корреспондентом, а в 1956 году — действительным членом Академии наук Армянской ССР.

В конце сороковых в начале пятидесятых годов формируется получившая впоследствии всеобщее признание армянская математическая школа, в деле образования и дальнейшего развития которой существенный вклад внесла научная, педагогическая и организационная деятельность М. М. Джрбашяна.

С 1964 г. по 1978 г. он — член Президиума Академии наук, академик-секретарь Отделения физико-математических наук (до конца 1973 г.).

М. М. Джрбашян является главным редактором журнала «Математика» (Известия АН Армянской ССР) со дня его основания.

Все это время Мхитар Мкртичевич поддерживает теснейшие контакты с Ереванским университетом. Он с энтузиазмом и увлеченностью работает со студентами и научной молодежью, привлекая их к исследовательской работе либо под своим руководством, либо направляя их на дальнейшую учебу к крупным советским специалистам, заботливо следя за их дальнейшей судьбой и своевременно оказывая им энергичную поддержку и помощь.

К 1970 году уже сложилась и достаточно окрепла армянская математическая школа в целом, с ее основными научными интересами и традициями. Она получила признание в нашей стране и за рубежом. Естественно встал вопрос о создании в Армении отдельного математического института.

Директором организованного в 1971 году Института математики АН Армянской ССР, выделившегося из бывшего Института математики и механики, стал М. М. Джрбашян. На этом посту его научно-организационная деятельность поднялась на новую, более высокую и ответственную ступень. Высококвалифицированные ученики Мхитара Мкртичевича, доктора и кандидаты наук, заведующие кафедрами работают сегодня в вузах и отраслевых институтах республики. Он — автор множества научных публикаций, докладов, учебных пособий, ряда больших статей, содержащих основополагающие результаты, и фундаментальной монографии, получившей широкую известность, — «Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области» [83].

Очень обширна сфера научных интересов М. М. Джрбашяна. Наряду с вопросами теории приближений, которыми ученый занимался в самый ранний период своей деятельности, он — автор глубоких и фундаментальных исследований в ряде областей современного анализа. Теория приближений и гармонический анализ в комплексной области, теория целых и мероморфных функций, теория интегральных преобразований и представлений, граничные свойства аналитических функций, вопросы единственности бесконечно дифференцируемых функций — вот далеко не полный перечень направлений, в которых М. М. Джрбашян получил основополагающие результаты. Исследованиям М. М. Джрбашяна характерны, с одной стороны, далеко идущие обобщения известных результатов классического анализа, а, с другой, — постановки и блестящие решения ряда трудных и оригинальных проблем, что потребовало создания собственных оригинальных методов исследования.

Многие из результатов М. М. Джрбашяна послужили основой для появления большого числа новых важных исследований других авторов у нас в Ереване, а также в других научных центрах. Эти результаты значительно развили и углубили ставшие уже классическими результаты таких знаменитых математиков, как Миттаг-Леффлер, Планшерель, Данжуа, Карлеман, Винер, Неванлинна и Келдыш.

Как уже отмечалось, основные научные интересы М. М. Джрбашяна связаны с современным анализом. Отнюдь не претендуя на полноту, перечислим некоторые из циклов его исследований.

1. Первым в хронологическом порядке является *цикл исследований по теории приближений*. Этот цикл охватывает вопросы теории взвешенно-равномерных, средних, а также наилучших приближений полиномами и целыми функциями в комплексной области.

Развитый М. М. Джрбашяном оригинальный метод исследования позволил установить точные интегральные критерии полноты для широкого класса аппроксимационных задач с весом или без веса. В частности, были получены окончательные решения задач полноты полиномов в угловых областях, на бесконечных кривых, в области типа круговой луночки, в круге с радиальным вырезом и т. д.

Далее, в работах [21], [22], [29], наряду с исследованиями проблем полноты впервые в теории приближений были поставлены и решены важные и трудные задачи *взвешенно-наилучшей* аппроксимации полиномами. Здесь, в связи с классическим неравенством Чебышева-Маркова, была поставлена задача: оценить скорость роста при $n \to +\infty$ последовательности $\{P_n'(x)\}_1^\infty$ производных полиномов $P_n(x)$ степени $n \geqslant 1$, подчиненных условиям

$$|P_n(x)| \leqslant \exp\{p(|x|)\}, \; -\infty < x < +\infty \quad (n=1, 2,) \cdots,$$

где $p(x)$ — произвольная непрерывная, монотонно возрастающая на $[0, +\infty)$ функция. Своеобразным методом и с помощью тонких оценок здесь же был открыт качественно новый факт, состоящий в том, что в случае расходимости интеграла $\int\limits_1^{\infty} p(x)\, x^{-2}\, dx$ производные $P_n'(x)$ растут существенно медленнее, чем в случае конечного отрезка, а именно, со скоростью $\int\limits_1^{n} q^{-1}(y)\, dy$, где q — обратная к p функция. В случае же, когда $\int\limits_1^{\infty} p(x)\, x^{-2}\, dx < +\infty$, семейство полиномов $\{p_n(x)\}_1^{\infty}$ образует нормальное семейство на всей комплексной плоскости. Оказалось, что в этом случае дифференциальные свойства аппроксимируемых функций характеризуются не шкалой $n^{-p-\alpha}$, как это имеет место в теоремах Джексона-Бернштейна, а шкалой $\left[\int\limits_1^{n} q^{-1}(y)\, dy\right]^{-p-\alpha}$.

К этому же кругу задач относится и исследование [34], где с помощью специальных интегральных операторов, в которых в качестве ядра фигурируют линейные комбинации функций Миттаг-Леффлера, были установлены оценки наилучших приближений функций, аналитических в различных канонических областях, целыми функциями произвольного порядка $\rho > \frac{1}{2}$.

Несомненно, исследования Мхитара Мкртичевича по теории весовых приближений полиномами и наилучших приближений целыми функциями явились значительным вкладом в конструктивную теорию функций. В них были продолжены и существенно продвинуты вперед достижения его предшественников — Валле-Пуссена, С. Н. Бернштейна, М. В. Келдыша, А. Л. Шагиняна и других.

2. Большой цикл работ, выполненных М. М. Джрбашяном в 1952—1966 г. г., охватывает исследования *по гармоническому анализу в комплексной области*.

Эти исследования, по сути, опираются на открытые им замечательные свойства двух семейств функций — функций типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z;\, \mu) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \Gamma^{-1}\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right) z^k$ и их континуального аналога — функций типа Вольтерра $\nu_\rho(z;\, \mu) = \int\limits_0^{\infty} \Gamma^{-1}\left(\mu + \frac{t}{\rho}\right) z^t\, dt$.

Важным моментом для всей развитой здесь теории являются установленные Мхитаром Мкртичевичем тождества, которым удовлетворяют преобразования Меллина функций $E_\rho(e^{i\varphi} x^{1/\rho};\, \mu+1)$ $\left(\frac{\pi}{2\rho} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right)$ и $[e^{\pm ix} - 1] / \pm ix$.

Эти тождества позволили открыть замечательные, качественно новые факты, лежащие в основе всей развитой им теории.

Первый из них заключается в том, что преобразования Фурье функций из $L_2(0, +\infty)$ имеют *целое семейство* формул обращения с ядрами типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z;\mu)\left(\rho \geqslant \frac{1}{2}\right)$. В этом общем результате при $\rho = \mu = 1$ содержатся хорошо известные формулы обращения теории Фурье-Планшереля. А второй — в том, что при любом $\rho \geqslant 1$ множество формул обращения с ядрами типа $E_\rho(z;\mu)$ одновременно с заданной функцией $f(x) \in L_2(0, +\infty)$ представляют нулевую функцию в области угла $|\pi - \arg z| < \pi\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$ комплексной плоскости.

Эти принципиально новые свойства интегральных преобразований и обращений с ядрами $E_\rho(z;\mu)$ позволили Мхитару Мкртичевичу построить изящный аппарат преобразований типа Фурье-Планшереля для произвольной конечной системы лучей комплексной плоскости, исходящих из одной точки.

Замечательно, что эти результаты одновременно являются также новыми и очень тонкими результатами теории приближений целыми функциями, поскольку в них содержится явное построение аппроксимирующих функций, рост которых определяется в зависимости от метрических свойств множеств, на которых происходит аппроксимация.

Упомянутый глубокий и оригинальный цикл исследований Мхитара Мкртичевича, содержащий ряд новых конструктивных идей и потребовавший от него преодоления огромных аналитических трудностей, является значительным вкладом в гармонический анализ. Созданный Мхитаром Мкртичевичем мощный аппарат интегральных преобразований в дальнейшем нашел в его руках фундаментальные применения в теории аналитических и бесконечно-дифференцируемых функций.

3. В другом цикле исследований, выполненных в те же годы и подытоженных в его упомянутой монографии, были установлены также принципиально новые результаты о параметрическом представлении классов целых функций произвольного порядка $\rho > \frac{1}{2}$, подчиненных дополнительным условиям интегрируемости.

Этот цикл завершается установлением общей теоремы, формулировку которой мы лишь опишем.

Пусть E — некоторая конечная система лучей, исходящих из начала координат, $\mathfrak{M}_\rho$ — класс целых функций порядка $\rho > \frac{1}{2}$ и типа $\leqslant \sigma$, подчиненных условию

$$\int_E |f(z)|^2 |z|^\omega |dz| < +\infty, \quad \omega \in (-1, 1).$$

С множествами $\mathfrak{M}_\rho$ и E однозначно ассоциируется некоторая конечная система отрезков e, также исходящих из начала координат. Утверждается, что класс $\mathfrak{M}_\rho$ совпадает с множеством функций f, представимых в виде

$$f(z) = \int_{e} E_\rho\,(\xi^{1/\rho} z;\ \mu)\,\varphi(\xi)\,\xi^{\mu-1}\,d\xi,$$

где $\mu = \dfrac{1+\omega+\rho}{2\rho}$ и $\varphi(\xi) \in L_2(e)$.

В этом общем результате при $\rho = \mu = 1$ содержится знаменитая теорема Винера-Пэли о представлении целых функций экспоненциального типа, суммируемых с квадратом модуля на вещественной оси.

В этом же цикле работ Мхитару Мкртичевичу удалось построить стройный аппарат интегральных операторов типа Фурье-Планшереля-Лапласа для множеств, состоящих из конечного числа лучей и угловых областей с общей вершиной в начале координат. Основой для этого послужили его же результаты по гармоническому анализу и установленная им замечательная теорема, содержащая, в частности, вторую известную теорему Винера-Пэли о представлении аналитических в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z > 0$ функций, входящих в класс H_2 Харди-Тамаркина. Этот результат состоит в следующем:

1) Класс $H_2[\alpha;\ \omega]\left(\dfrac{1}{2} < \alpha < +\infty,\ -1 < \omega < 1\right)$ аналитических в области угла $\Delta(\alpha) = \left\{z\colon |\arg z| < \dfrac{\pi}{2\alpha}\right\}$ функций $F(z)$, подчиненных условию

$$\sup_{|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2\, r^{\omega}\, dr \right\} < +\infty,$$

совпадает с множеством функций $F(z)$, допускающих представление вида

$$F(z) = \int_0^{+\infty} E_\rho\left(e^{i\frac{\pi}{2\gamma}} z\tau^{1/\rho};\mu\right) v_{(-)}(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau\ + \tag{*}$$
$$+ \int_0^{+\infty} E_\rho\left(e^{-i\frac{\pi}{2\gamma}} z\tau^{1/\rho};\ \mu\right) v_{(+)}(\tau)\,\tau^{\mu-1}\,d\tau,\quad z \in \Delta(\alpha),$$

где

$$v_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, +\infty),\ \rho > \frac{\alpha}{2\alpha-1},\ \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\alpha},\ \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

2) Правая часть (*) при $\rho > \dfrac{2\alpha}{2\alpha-1}$ представляет нулевую функцию в области угла

$$\Delta^*(\alpha) = \left\{ z\colon |\pi - \arg z| < \frac{\pi}{2\alpha} \right\},$$

где

$$\varkappa = \frac{\alpha\rho}{(2\alpha - 1)\rho - 2\alpha}.$$

Наконец, результаты этого цикла были распространены на значительно более общие классы функций, определенных уже на римановой поверхности логарифма G_∞. Здесь соответствующие представления строятся уже посредством «квазицелой» функции $\nu_\rho(z;\mu)$ типа Вольтерра, аналитической на всей поверхности G_∞ и имеющей там конечный порядок роста $\rho > 0$. В этом обширном цикле исследований принимали участие и его ученики.

Результаты М. М. Джрбашяна о представлении целых, квазицелых и аналитических функций обладают большой общностью и имеют законченный характер. Они представляют собой фундаментальный вклад в теорию функций вообще и в теорию целых функций в частности.

4. Следующее важное направление научных изысканий Мхитара Мкртичевича охватывает проблематику единственности.

Здесь прежде всего следует выделить его исследование [93], *посвященное вопросам квазианалитичности классов* $C\{M_n\} = \{f \in C^\infty[0, +\infty): |f^{(n)}(x)| \leq A_f B_f^n M_n\}$ *бесконечно-дифференцируемых функций.*

После фундаментальных результатов А. Данжуа, Т. Карлемана—А. Островского и других казалось, что все основные и наиболее важные проблемы здесь уже решены. Однако в указанном исследовании Мхитар Мкртичевич предложил значительно более общую постановку проблемы единственности классов бесконечно-дифференцируемых функций и получил ее изящное решение, существенно расширив само классическое понятие квазианалитичности.

Как известно, квазианалитические классы $C\{M_n\}$, с точки зрения скорости роста последовательных производных функций этого класса, представляют собой сравнительно умеренное расширение класса аналитических функций. Так, например, $C\{n^n\}$ — это класс аналитических функций, а $C\{(n \log n)^n\}$ — уже квазианалитический класс, в то время, как классы $C\{n^{\gamma n}\}$ $(1 < \gamma < +\infty)$ заведомо не квазианалитичны.

В упрощенном варианте постановка вопроса, предложенная Мхитаром Мкртичевичем, может быть сформулирована таким образом: значениями каких функционалов $\{L_n(\varphi)\}_{n=0}^{\infty}$ (вместо $\{\varphi^{(n)}(0)\}_0^\infty$) могут быть единственным образом определены функции $\varphi(x)$, принадлежащие классам $C\{n^{\gamma n}\}$ при $\gamma > 1$. Как непосредственно следует из основного результата М. М. Джрбашяна, в качестве таковых могут служить функционалы

$$D_\infty^{n(1-\alpha)} \varphi(0) = \frac{1}{\Gamma(n\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha n - 1} \varphi^{(n)}(x)\, dx \quad (n = 0, 1, \cdots),$$

где $\alpha = \dfrac{1-\gamma}{1+\gamma}$, а $D_\infty^{n(1-\alpha)}$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Вейля порядка $n(1-\alpha)$.

В общем же случае, при рассмотрении классов $C_\alpha\{M_n; [0, l)$ $(0<l\leq+\infty)$, единственность по тем же начальным данным $D_-^{n(1-\alpha)}\varphi(0)$ $(n=0, 1, \cdots)$ имеет место лишь в том случае, когда выполняется условие

$$\int\limits_0^{+\infty} r^{-1-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \log T(r)\,dr = +\infty,\quad T(r)=\sup_{n\geq1}\frac{r^n}{M_n}\cdot$$

В этом исчерпывающем решении проблемы, данном Мхитаром Мкртичевичем, при значении параметра $\alpha=0$ содержится классическая теорема Данжуа-Карлемана-Островского.

Примечательно, что ее решение оказалось возможным благодаря систематическому применению развитой им теории гармонического анализа в комплексной области с ядрами типа Миттаг-Леффлера.

Вместе с тем эти результаты значительно расширили и обновили проблематику квазианалитичности и открыли новые пути изучения классов бесконечно-дифференцируемых функций.

5. Другой важный цикл исследований Мхитара Мкртичевича охватывает его работы *по теории факторизации и граничных свойств мероморфных функций*.

Известно, какую большую роль в теории функций и в ее приложениях играет введенный Р. Неванлинной класс N функций ограниченного вида и их параметрическое представление. Еще под влиянием лекций М. В. Келдыша Мхитар Мкртичевич задался целью получить параметрическое представление и факторизацию мероморфных в круге функций произвольного роста. Этой цели он достигал постепенно, но неуклонно. Рациональное зерно будущей теории, по существу, содержалось уже в его ранней работе [2], вошедшей в его кандидатскую диссертацию. Там было получено каноническое представление функций, характеристика $T(r)$ которых подчинена условию

$$\int\limits_0^1 (1-r)^\alpha\, T(r)\,dr<+\infty\ (-1<\alpha<+\infty).$$

Но к этой проблематике Мхитар Мкртичевич вернулся значительно позже (1964—1966), когда посредством остроумных и оригинальных построений ему удалось создать стройную теорию классов N_α, $\alpha\in(-1, +\infty)$. Классы N_α монотонно расширяются с возрастанием α, совпадая при $\alpha=0$ с классом N Р. Неванлинны. При $0<\alpha<+\infty$ классы N_α охватывают мероморфные в круге функции любого конечного порядка. Если же $-1<\alpha<0$, то получаются подклассы N, обладающие очень тонкими граничными свойствами, для описания которых линейная мера оказалась недостаточной и пришлось привлекать меры Хаусдорфа и емкости Фростмана.

Результаты эти были подробно изложены в его монографии [83] и в работах [87], [91], [94]. Затем М. М. Джрбашян существенно расширил и обобщил теорию классов N_α. В фундаментальном исследовании «Теория факторизации функций, мероморфных в круге» [98], им была создана в определенном смысле завершенная теория факторизации произвольных мероморфных в круге функций и их граничных свойств.

Здесь, во-первых, взамен дробных интегро-дифференциальных операторов $D^{-\alpha}$ в смысле Римана-Лиувилля, лежащих в основе теории классов N_{α}, М. М. Джрбашян открыл их существенно общие, глубокие аналоги—операторы $L^{(\omega)}$, ассоциированные с произвольной непрерывной в интервале $[0,1)$ функцией $\omega(x) > 0$, подчиненной некоторым естественным условиям [95].

Основополагающую роль в исследованиях Мхитара Мкртичевича играет открытый им оригинальный класс формул типа Иенсена-Неванлинны, ассоциированных с оператором $L^{(\omega)}$, в которых роль ядра Шварца играет функция

$$S(z;\ \omega) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta_k};\quad \Delta_k = k\int_0^1 \omega(x)\, x^{k-1}\, dx,$$

обладающая замечательным свойством $\operatorname{Re} S(z;\ \omega) \geqslant 0\ (|z| < 1)$, когда $\omega(x)$ — неубывающая функция.

Эти существенно новые формулы, сводящиеся к классической формуле Иенсена-Неванлинны лишь в случае $\omega(x) \equiv 1$, позволили Мхитару Мкртичевичу ввести в рассмотрение новое понятие ω-характеристики $T_{\omega}(r;\ f)$ мероморфной функции $f(z)$ и определить класс $N\{\omega\}$ функций с ограниченной ω-характеристикой.

Указанные формулы позволили ему открыть также новые бесконечные произведения $B_{\omega}(z;\ z_k)$ с нулями $\{z_k\}_1^{\infty}$, сходящиеся при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{1} \omega(x)\, dx < +\infty.$$

Будучи глубокими и замечательными аналогами классического произведения Бляшке и совпадая с ним при $\omega(x) \equiv 1$, они могут иметь нули $\{z_k\}_1^{\infty}$, стремящиеся к границе единичного круга произвольным образом, в зависимости от поведения порождающей их функции $\omega(x)$ в окрестности точки $x = 1$.

Основная факторизационная теорема Мхитара Мкртичевича гласит:

Класс $N\{\omega\}$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = C_{\omega}\, z^{\lambda}\, \frac{B_{\omega}(z;\ a_{\nu})}{B_{\omega}(z;\ b_{\nu})} \exp\left\{ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S(e^{-i\vartheta} z;\ \omega)\, d\psi(\vartheta) \right\},$$

где ψ — вещественная функция ограниченной вариации на $[0,\ 2\pi]$, C_{ω} — комплексное, а λ — целое число.

Этот фундаментальный результат и тот важный факт, что *объединение всевозможных классов $N\{\omega\}$ совпадает с множеством всех мероморфных* *в круге функций*, привели Мхитара Мкртичевича к полному решению проблемы факторизации всего семейства функций, мероморфных в круге.

Привлекая, как и прежде, своих учеников, Мхитар Мкртичевич успешно завершил также исследование граничных свойств функций классов $N\{\omega\}$ ([101], [102]).

Как для классов $N\{\omega\} \supset N$, так и для классов $N\{\omega\} \subset N$ им были получены тонкие результаты о граничных свойствах, продвинувшие вперед ставшие классическими результаты Фату, Г. Сегё, Т. Карлемана, а также Л. Карлесона и других.

Исследования Мхитара Мкртичевича по теории факторизации, о которых он рассказывал в своем докладе на Международном конгрессе математиков в Ванкувере (Канада, 1974 г.), явились фундаментальным вкладом в классическую теорию однозначных аналитических функций. Они неоднократно получали высокую оценку и признание ведущих специалистов, в том числе Р. Неванлинны и Л. Альфорса.

В этой статье мы не коснулись важных исследований М. М. Джрбашяна по другим направлениям современного анализа.

Среди них следует отметить исследования по функциональному анализу ([58], [63], [64], [66], [67] [69]), по краевым задачам для дифференциальных операторов дробного порядка ([50], [59], [62], [68], [92], [99]), по теории единственности асимптотических рядов типа Дирихле-Тейлора ([103], [106], [121]) и, наконец, особенно интенсивно развиваемого за последние годы М. М. Джрбашяном и его учениками цикла исследований по теории интерполяции и базисности неполных биортогональных систем аналитических функций в комплексной области ([108], [110], [111], [127]).

Свое шестидесятилетие Мхитар Мкртичевич встречает в расцвете творческой и научно-организационной деятельности.

Коллеги и ученики Мхитара Мкртичевича от всей души желают ему доброго здоровья, счастья и новых научных достижений.

А. Е. Аветисян, С. А. Акопян, Н. У. Аракелян, В. С. Захарян, А. Б. Нерсисян, И. С. Саргсян, И. О. Хачатрян