ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 4, 1978 Математика

Р. И. ОВСЕПЯН

О ПУСТОМ МНОЖЕСТВЕ КАК *M*-МНОЖЕСТВЕ В КЛАССЕ ОБЩИХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Напомним, что множество $E\subset[a, b]$ называется M-множеством для ортонормированной (на $[a, b]$) системы $(\varphi_n)_1^\infty$, если существует ряд

$$\sum_1^\infty d_n\cdot\varphi_n(x), \tag{1}$$

сходящийся к нулю на $[a, b]\setminus E$, причем $\sum_1^\infty |d_n|>0$*. В противном случае E называется U-множеством.

Известно, что пустое множество является U-множестом для тригонометрической системы [1], системы Хаара [2] и системы Уолша [2]. В связи с этим возник вопрос, сформулированный в работах [3—5]: существует ли такая ограниченная в совокупности, ортонормированная, полная в $L^2[0,1]$ система (кратко ООНПС) непрерывных функций $(\varphi_n)_1^\infty$, что пустое множество является для нее M-множеством? Положительный ответ на этот вопрос был дан в работе [6]. Здесь продолжается исследование в этом направлении.

Выясняется как влияют на рассматриваемый вопрос скорость стремления к нулю коэффициентов ряда (1) и перестановки системы $(\varphi_n)_1^\infty$.

Теорема 1. *Для любой последовательности* $(b_n)_1^\infty$,

$$b_n^2\downarrow 0,\ \sum_1^\infty b_n^2=\infty \tag{2}$$

существует последовательность $(d_n)_1^\infty$

$$d_n^2\leqslant b_n^2,\ \sum_1^\infty d_n^2=\infty \tag{3}$$

и ООНПС $(\varphi_n)_1^\infty$ *непрерывных на* $[0,1]$ *функций такие, что ряд* (1) *сходится всюду на* $[0, 1]$ *к нулю.*

В связи с этой теоремой отметим, что В. А. Скворцов при таких же условиях на коэффициенты (a_n) построил [7] нуль-ряд (сходимость к нулю почти всюду) $\sum a_n\cdot\chi_n(t)$ по системе Хаара. Вопрос о

* Такие ряды называются нуль-рядами.

существовании такого (в смысле скорости коэффициентов) тригонометрического ряда был поставлен П. Л. Ульяновым [5] и пока не решен.

Теорема 2. *Для любого $p > 2$ существует ОНПС $(\varphi_n)_1^\infty$, $\varphi_n \in C[0,1]$ такая, что в классе коэффициентов из l^p пустое множество является M-множеством и для любого $r < p$ в классе l^r — U-множеством.*

Теорема 3. *Существуют ОНПС $(\varphi_n)_1^\infty$, $\varphi_n \in C[0,1]$ такие, что пустое множество является*

а) *M-множеством при любой перестановке системы (φ_n),*

б) *U-множеством при любой перестановке системы (φ_n),*

в) *U-множеством при одном порядке и M-множеством при другом порядке системы (φ_n).*

В связи с пунктом б) отметим результат Г. М. Мушегяна [8], который в частности утверждает, что при некотором ограничении на коэффициенты рядов по системе Хаара, пустое множество является U-множеством (в классе этих рядов) при любых перестановках по системе Хаара.

Доказательство теоремы 1

Лемма 1. *Для любой числовой последовательности $(a_n)_0^\infty$, удовлетворяющей условиям*

$$a_n > 0 \ \forall n \geqslant 0, \ a_n \to 0, \ \sum_0^\infty a_n^2 = \infty, \tag{4}$$

существует на $[0,1]$ ортонормированная система $(\psi_n)_0^\infty$ непрерывных функций с условием

$$\sum_0^\infty a_n \cdot \psi_n(x) = 0 \text{ всюду на } [0,1]. \tag{5}$$

Некоторые элементы рассуждения заимствованы из работ [3—4].

Доказательство леммы 1. Положим

$$B_n^2 = \frac{a_0^2}{\sum_0^n a_i^2}, \ n \geqslant 0, \tag{6}$$

$$A_n^2 = B_{n-1}^2 - B_n^2 = \frac{a_0^2 \cdot a_n^2}{\left(\sum_0^{n-1} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_0^n a_i^2\right)}, \ n \geqslant 1. \tag{7}$$

Очевидно, что

$$B_0^2 = 1, \ B_n^2 \to 0, \ \sum_1^\infty A_n^2 = 1. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что существует последовательность $(\alpha_n)_1^\infty$ с условиями

$$\alpha_n \to 0,\ \sum_1^\infty \frac{2\cdot A_i^2}{\alpha_i^2} = 1. \tag{9}$$

Пусть

$$\beta_k = \frac{2\cdot A_k^2}{\alpha_k^2}. \tag{10}$$

Из (9) следует

$$\beta_i > 0,\ \sum_1^\infty \beta_i = 1. \tag{11}$$

Пусть $(\Delta_i)_1^\infty$ — занумерованные слева направо непересекающиеся интервалы отрезка $[0,1]$, удовлетворяющие условию

$$\operatorname{mes} \Delta_i = \beta_i. \tag{12}$$

Пусть $(x_{i-1},\ x_i) \equiv \Delta_i,\ i \geqslant 1$.

Рассмотрим функцию

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \alpha_i \cdot \sin \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \pi, & x \in \overline{\Delta}_i,\ i \geqslant 1 \\ 0 & x = 1. \end{cases} \tag{13}$$

Из (8)—(12) следует нормированность (в L^2) и непрерывность функции $\psi_0(x)$ на $[0,1]$.

Пусть

$$p_n = \frac{B_n}{A_n \cdot B_{n-1}} = \frac{\sum\limits_0^{n-1} a_i^2}{a_0 \cdot a_n},\quad q_n = \frac{A_n}{B_n \cdot B_{n-1}} = \frac{a_n}{a_0} \tag{14}$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} -p_n \cdot \psi_0(x) & x \in \overline{\Delta}_n \\ q_n \cdot \psi_0(x) & x \in [x_n,\ 1] \quad n \geqslant 1 \\ 0 & x \in [0,\ x_{n-1}]. \end{cases} \tag{15}$$

Непрерывность и, следовательно, ограниченность функций ψ_n, $n \geqslant 0$ очевидна. В силу (10)—(13) имеем

$$\int_{\Delta_n} \psi_0^2(x)\ dx = A_n^2,\ n \geqslant 1, \tag{16}$$

откуда в силу (7) получаем

$$\int_{x_n}^1 \psi_0^2\, dx = B_n^2,\ n \geqslant 0. \tag{17}$$

Из условий (7)—(17) следует ортонормированность системы $(\psi_n)_0^\infty$. Из (6)—(8) и (14) вытекает

$$a_1\cdot p_1=a_0,\cdots,\ a_n\cdot p_n=a_0+a_1\cdot q_1+\cdots+a_{n-1}\cdot q_{n-1},\ n\geqslant 2, \tag{18}$$

откуда следует

$$\sum_0^n a_i\cdot\psi_i(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,\ x_n]\\ \psi_0\cdot(a_0+a_1\cdot q_1+\cdots+a_{n-1}\cdot q_{n-1}), & x\in(x_n,\ 1],\end{cases}$$

а это равносильно условию (5).

Замечание 1. Числа α_n из (9) можно подчинить дополнительному требованию

$$p_n\cdot\alpha_n^2\leqslant M\cdot 2^n,\ n\geqslant 1, \tag{19}$$

где M — постоянная (в дальнейшем также).

Пусть $S_n=\sum_0^n a_i^2$, тогда

$$\sum_1^\infty\frac{2\cdot A_n^2}{\alpha_n^2}=2\cdot a_0^2\cdot\sum_1^\infty\frac{a_n^2}{S_{n-1}\cdot S_n\cdot\alpha_n^2}\leqslant 2\cdot a_0^2\cdot\sum_1^\infty\frac{a_n^2}{S_{n-1}^2}\cdot\frac{1}{\alpha_n^2}.$$

Положим $a_n^2/S_{n-1}^2=\gamma_n^2\ (\downarrow 0)$. В силу (4) имеем

$$\sum_1^\infty\gamma_n^2<\infty.$$

Пусть $\bar\beta_n\to\infty$ и такова, что $\sum_1^\infty\gamma_n^2\cdot\bar\beta_n<\infty$. Если n_i таково, что $\gamma_{n_i}^2\times\times\bar\beta_{n_i}<2^{-n_i}$, то положим $\beta_{n_i}=2^{-n_i}\cdot\gamma_{n_i}^{-2}$, а в остальных случаях полагаем $\beta_n=\bar\beta_n$. Ясно, что $\beta_n\geqslant\bar\beta_n\ \forall n\geqslant 1$ и потому $\beta_n\to\infty$ и $\gamma_n^2\cdot\beta_n\geqslant\geqslant 2^{-n}$. Ясно также, что $\sum\gamma_n^2\cdot\beta_n<\infty$. Если положить $\alpha_n=\beta_n^{-1/2}$, то из вышеизложенного получим

$$\alpha_n\to 0,\ \sum_1^\infty\frac{2\cdot A_n^2}{\alpha_n^2}<\infty,\ \alpha_n^2\cdot p_n^2=\alpha_n^2\cdot\frac{S_{n-1}^2}{(a_0\cdot a_n)^2}\leqslant\frac{2^n}{a_0^2}. \tag{20}$$

В случае необходимости, заменяя α_n на $\mathrm{const}\cdot\alpha_n$, получим для α_n условия (9), (19).

Замечание 2. Если наряду с (4) $a_n\to 0$, то $q_n=\dfrac{a_n}{a_0}\to 0$, а $p_n=\dfrac{1}{a_0}\cdot\dfrac{S_{n-1}}{a_n}\to\infty$ и потому в силу (13), (15) и замечания 1 имеем

$$\|\psi_n\|_\infty\leqslant\mathrm{const}\cdot p_n\cdot\alpha_n\leqslant M\cdot 2^{n/2}. \tag{21}$$

Обозначим

$$\psi_m^i(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{2}{x_i-x_{i-1}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\sin m\cdot\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\pi, & x\in\bar{\Delta}_i\\ 0 & x\bar{\in}\bar{\Delta}_i.\end{cases}\tag{22}$$

Ясно, что система $(\Phi_n)_1^\infty\equiv(\psi_n)_0^\infty\cup(\psi_m^i)_{m\geq 2;\, i\geq 1}$ ортонормирована и состоит из непрерывных на $[0,1]$ функций. Кроме того она полна в $L[0,1]$, ибо конечными линейными комбинациями функций ψ_n мы можем получить любую из функций ψ_1^i, а при любом фиксированном i система $(\psi_m^i)_{m=1}^\infty$ полна в $L(\Delta_i)$, ибо система $(\sin nx)_1^\infty$ полна в $L[0,\pi]$.

Замечание 3. Поскольку система $(\psi_m^i;\ m\geq 2,\ i\geq 1)$ состоит из непрерывных на $[0,1]$ (следовательно ограниченных) функций и содержит равномерно ограниченную подсистему (например, $(\psi_m^1)_{m=2}^\infty$), то, как известно [9] в L^2-замыкании линейной оболочки системы $(\psi_m^i;\ m\geq 2,\ i\geq 1)$ существует полная равномерно ограниченная ортонормированная система $(t_n)_1^\infty$ непрерывных функций.

Таким образом, система $(\psi_n)_0^\infty\cup(t_n)_1^\infty$ ортонормирована и полна в $L^2[0,1]$, и состоит из непрерывных функций.

Напомним свойства матриц А. М. Олевского [10]

$$A_n=\|a_{ij}^n\|,\ 1\leq i,\ j\leq 2^n;\ n\geq 1.$$

1°. A_n имеет порядок 2^n и при любом n ортонормирована,

2°. Элементы первого столбика $a_{i1}^n=2^{-n/2}$, $1\leq i\leq 2^n$,

3°. $\sum\limits_{i=1}^{2^n} a_{ij}^n=0\ \ \forall j\geq 2$,

4°. $\sum\limits_{j=1}^{2^n}|a_{ij}^n|<M,\ \sum\limits_{i=1}^{2^n}|a_{ij}^n|\leq 2^{n/2}\ \ \forall j\geq 1$,

5°. $\sum\limits_{j=1}^{2^n}\left|\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}^n\right|<M\cdot 2^{n/2}$.

Пусть теперь (b_n) удовлетворяет условиям (2). Выберем числа d_n так, что

$$d_n=d_{2^i}>0,\ \ 2^{i-1}<n\leq 2^i;\ d_{2^i}\leq|b_{2^i}|;\ d_{2^i}^2\,2^i\to 0;\ \sum_1^\infty d_{2^i}^2\,2^i=\infty.\tag{23}$$

Ясно, что для d_n выполняются условия (3).

Подставляя в лемме 1 вместо $(a_n)_0^\infty$ последовательность $(d_{2^n}\cdot 2^{n/2})_1^\infty$, получим

$$\sum_1^\infty d_{2^n}\cdot 2^{n/2}\cdot\psi_{n-1}(x)\equiv 0.\tag{24}$$

Теперь введем обозначения для векторов (в виде столбцов)

$$F_0=(\psi_0,\ t_1);\ F_1=(\psi_1,\ t_2);\ F_2=(\psi_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5),$$
$$F_3=(\psi_3,\ t_6,\ t_7,\cdots,\ t_{12})\ \text{и т. д.} \tag{25}$$
$$(\varphi_1,\ \varphi_2)=A_1\cdot F_0;\ (\varphi_3,\ \varphi_4)=A_1\cdot F_1,$$
$$(\varphi_5,\cdots,\ \varphi_8)=A_2\cdot F_2;\ (\varphi_9,\cdots,\ \varphi_{16})=A_3\cdot F_3\ \text{и т. д.} \tag{26}$$

В силу свойства 1° и того, что $(\psi_n)_0^\infty \cup (t_n)_1^\infty$ — ОНПС система $(\varphi_i)_1^\infty$ также будет ОНПС. Ясно, что непрерывность функций сохраняется. Равномерная ограниченность системы (φ_n) следует из замечания 3, (21), 2° и первого неравенства в 4°. Ряд $\sum d_n\cdot\varphi_n$ является искомым.

Действительно, в силу (23), (26) имеем

$$\sum_1^\infty d_n\cdot\varphi_n=d_2\cdot(\varphi_1+\varphi_2)+d_4\cdot(\varphi_3+\varphi_4)+d_8\cdot(\varphi_5+\cdots+\varphi_8)+\cdots.$$

Из (25), (26), 2°, 3° следует

$$\sum_{2^{n-1}+1}^{2^n}\varphi_i=2^{n/2}\cdot\psi_{n-1},$$

откуда в силу (24) вытекает

$$d_2\cdot(\varphi_1+\varphi_2)+\sum_{n=2}^\infty d_{2^n}\cdot\left(\sum_{2^{n-1}+1}^{2^n}\varphi_i\right)=\sum_1^\infty d_{2^n}\cdot 2^{n/2}\cdot\psi_{n-1}=0.$$

Обозначим

$$\delta_n(x)=\max_{2^{n-1}\leq m\leq 2^n}\left|d_{2^n}\cdot\sum_{2^{n-1}+1}^m\varphi_i(x)\right|.$$

Так как

$$\left|\sum_{2^{n-1}+1}^m\varphi_i\right|=\left|\sum_{i=1}^m\left(a_{i1}^n\cdot\psi_n+\sum_{j=2}^{2^n}a_{ij}^n\cdot t_{r(n)+j}\right)\right|\leq$$
$$\leq\|\psi_n\|_\infty\cdot\sum_1^m|a_{i1}|+\sup_n\|t_n\|_\infty\cdot\sum_{j=2}^{2^n}\left|\sum_{i=1}^m a_{ij}^n\right|,$$

то в силу 5° и равномерной ограниченности системы (t_n) получим

$$\delta_n(x)\leq|d_{2^n}|\cdot\|\psi_n\|_\infty\cdot\sum_1^m|a_{i1}|+M\cdot|d_{2^n}|\cdot 2^{n/2}.$$

Второе слагаемое сходится к нулю в силу (23), а первое — поскольку $\psi_n=0$, если $x\leq x_{n-1}$ и $x_n\uparrow 1$. Таким образом, $\delta_n(x)\to 0$ всюду на [0,1] и, следовательно, ряд $\sum d_n\cdot\varphi_n$ сходится к нулю на [0,1] и в силу (23) является требуемым.

Замечание 4. Рассмотрим матрицу $\|d_{ij}\|$

$$d_{1j} = a_j \ (j \geqslant 1), \ d_{i+1,i} = -p_i (i \geqslant 1), \ d_{ij} = q_{i-1} \ (j \geqslant i \geqslant 2),$$

остальные $d_{ij} = 0$.

Утверждение леммы 1 означает, что последонательность $(a_n)_0^\infty$ ортогональна ко всем столбцам матрицы $\|d_{ij}\|$, а из конструкции этой матрицы следует единственность (с точностью до постоянного множителя, отличного от нуля) такой последовательности (при условии (4)) и, следовательно, единственность ряда (5).

Замечание 5. Поскольку в любой точке отрезка $[0,1]$ только конечное число членов ряда (5) отлично от нуля, то он сходится к нулю при любых перестановках членов.

Доказательство теоремы 2

Лемма 2. *На* $[0,\pi]$ *существует ОНПС* $(\Phi_n)_1^\infty$ *непрерывных функций такая, что* $\Phi_1(x) \equiv \sin x$, $\Phi_n(0) = \Phi_n(\pi) = 0$, $\forall n \geqslant 2$ *существуют точки* $y_i \in (0, \pi)$ $(i \geqslant 1)$ *такие, что*

$$\Phi_n(y_i) = 0 \ \forall n > i, \ \Phi_i(y_i) \neq 0. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $\delta_n > 0$, $(y_n)_1^\infty$ — различные точки из $(0,\pi)$ и $(f_n)_1^\infty$ — произвольная ОНПС на $[0,\pi]$. Выберем настолько большое N_1, что

$$\|f_1 - S_{N_1}(f_1; \sin nx)\| < \delta_1/2. \tag{27}$$

Здесь $\|\cdot\|$ — L^2-норма, S_{N_1} — N_1-я частная сумма ряда Фурье f_1 по $(\sin nx)_1^\infty$ на $[0,\pi]$.

Возьмем достаточно малые (точнее ниже) числа $\varepsilon_{mn} > 0$, $m, n \geqslant 2$. Для каждого ε_{2n} берем произвольную непрерывную на $[0,\pi]$ функцию l_n^2 с условиями

$$l_n^2(0) = l_n^2(y_1) = l_n^2(\pi) = 0, \ n \geqslant 2, \tag{28}$$

$$l_2^2(y_2) \neq 0, \ l_n^2(y_2) = 0, \ n > 2, \tag{29}$$

$$\int_0^\pi l_n^2 \cdot \sin x dx = 0 \ \ n \geqslant 2; \int_0^\pi l_n^2 \cdot l_2^2 \, dx = 0, \ n > 2. \tag{30}$$

$$\|l_2^2\| = 1; \ \|l_n^2 - \sin nx\| \leqslant \varepsilon_{2n}, \ n \geqslant 2. \tag{31}$$

При подходящем выборе чисел ε_{2n} получим [11] (в силу (30)), что система $\sin x \cup (l_n^2)_{n=2}^\infty$ — базис в $L^2[0,\pi]$. Ортогонализуем систему $(l_n^2)_{n=3}^\infty$ методом Шмидта и полученную систему $S(l_n^2; n \geqslant 3)$ обозначим через $(\Phi_n^2)_3^\infty$. Положим еще $\Phi_2^2 \equiv l_2^2$.

Поскольку $\bigvee_3^\infty l_n^2 = \bigvee_3^\infty \Phi_n^3$ $\left(\bigvee_3^\infty l_n^2 - L^2\text{-замыкание}\right.$ линейной оболочки системы $\left.(l_n^2)_3^\infty\right)$, то, учитывая вышесказанное получим, что $\sin x \cup \cup (\Phi_n^2)_2^\infty$ — ОНПС.

Ясно также, что все Φ_n^2 непрерывны на $[0,\pi]$ и что за счет малости чисел ε_{2n} (в силу (31)) можно обеспечить наперед заданную малость величин $\|\Phi_n^2 - \sin nx\|$, $2 \leqslant n < N_1$. Кроме того имеем

$$\Phi_n^2(0) = \Phi_n^2(\pi) = 0, \; n \geqslant 2; \; \Phi_2^2(y_2) \neq 0, \; \Phi_2^2(y_1) = 0. \tag{32}$$

Опишем еще один шаг.

Для каждого ε_{3n} $(n \geqslant 3)$ берем произвольную непрерывную на $[0,\pi]$ функцию l_n^3 с условиями

$$l_n^3(0) = l_n^3(\pi) = l_n^3(y_1) = l_n^3(y_2) = 0, \; n \geqslant 3; \; l_3^3(y_3) \neq 0, \; l_n^3(y_3) = 0, \quad n > 3, \tag{33}$$

$$\int_0^\pi l_n^3 \cdot \sin x dx = \int_0^\pi l_n^3 \cdot \Phi_2^2 \, dx = 0, \; n \geqslant 3; \; \int_0^\pi l_n^3 \cdot l_3^3 \, dx = 0, \; n > 3, \tag{34}$$

$$\|l_3^3\| = 1, \; \|l_n^3 - \Phi_n^2\| < \varepsilon_{3n}, \; n \geqslant 3. \tag{35}$$

Систему $S(l_n^4; \, n \geqslant 4)$ обозначим через $(\Phi_n^3)_4^\infty$. Положим еще $\Phi_3^3 \equiv l_3^3$. Рассуждая как выше, получим, что при достаточно малых ε_{mn} система $\sin x \cup \Phi_2^2 \cup (\Phi_n^3)_3^\infty$ — ОНПС и состоит из непрерывных функций. Из предыдущего шага и (35) следует, что величины $\|\Phi_n^3 - \sin nx\|$ $(3 \leqslant n < N_1)$ можно считать сколь угодно малыми.

Далее имеем

$$\Phi_n^3(0) = \Phi_n^3(\pi) = 0, \; n \geqslant 3; \quad \Phi_3^3(y_3) \neq 0, \; \Phi_3^3(y_1) = \Phi_3^3(y_2) = 0. \tag{36}$$

Продолжим этот процесс до шага N_1. Получим полную ортонормированную систему $\sin x \cup (\Phi_n^n)_2^{N_1} \cup (\Phi_n^{N_1})_{N_1+1}^\infty$ непрерывных функций со свойствами

$$\Phi_n^n(0) = \Phi_n^n(\pi) = 0, \quad \Phi_n^n(y_n) \neq 0 \; \forall n \leqslant N_1,$$

$$\Phi_n^{N_1}(0) = \Phi_n^{N_1}(\pi) = 0, \quad n > N_1; \; \Phi_n^n(y_i) = 0 \;\; n > i. \tag{37}$$

Обозначим $\Phi_1 = \sin x$, $\Phi_n = \Phi_n^n(x)$, $2 \leqslant n \leqslant N_1$. Нетрудно видеть, что выбирая числа ε_{mn} достаточно малыми можно гарантировать такую малость величин $\|\Phi_n - \sin nx\|$, $2 \leqslant n \leqslant N_1$, что в силу (27) будем иметь

$$\|f_1 - Pf_1\| < \delta_1, \tag{38}$$

где Pf_1 — ортогональная проекция f_1 на $\bigvee_1^{N_1} \Phi_n$. Первые N_1 функций искомой системы найдены.

Теперь надо брать N_2 настолько большим, что расстояние элемента f_2 до подпространства $\bigvee_1^{N_1}\Phi_n \vee \bigvee_{N_1+1}^{N_2} \Phi_n^{N_1}$ меньше, чем $\frac{1}{2}\cdot\delta_2$. Дальше надо повторить вышеизложенные рассуждения уже для точек y_n, $n > N_1$, причем роль функций $\sin nx$ теперь будут играть функции $\Phi_n^{N_1}$, $n > N_1$. В результате определятся функции Φ_n, $N_1 < n \leqslant N_2$ с условиями (26). При этом система $(\Phi_n)_1^{N_2} \cup (\Phi_n^{N_2})_{N_2+1}^{\infty}$ — ОНПС, состоит из непрерывных функций и еще

$$\|f_2 - Pf_2\| < \delta_2, \tag{39}$$

где Pf_2 — ортогональная проекция f_2 на $\bigvee_1^{N_2} \Phi_n$.

Продолжив этот процесс до бесконечности, мы получим искомую систему $(\Phi_n)_1^{\infty}$. Непрерывность и выполнение условий (26) и $\Phi_n(0) = \Phi_n(\pi) = 0$ очевидны, а полнота системы следует из условий (38), (39) и т. д., если δ_n достаточно малы, ибо система $(Pf_n)_1^{\infty}$ будет базисом в $L^2[0,\pi]$ [11]. Лемма 2 доказана.

Замечание 6. Несколько иным путем можно доказать следующее: если числовая матрица $\|\beta_{mn}\|$ удовлетворяет условию $|\beta_{mn}| < \text{const}$, $\beta_{mn} \underset{n}{\to} \beta_m$ $(\forall m)$ и $(y_n)_1^{\infty}$ — произвольная сходящаяся последовательность различных точек из (0,1), причем $\lim y_n \in (0,1)$, то существует равномерно ограниченная ортонормированная полная система $(\varphi_n)_1^{\infty}$ такая, что $\varphi_m \in C^{\infty}[0,1]$,

$$\varphi_m(0) = \varphi_m(1) = 0 \ (\forall m) \text{ и } \varphi_m(y_n) = \beta_{mn}.$$

Продолжим доказательство теоремы 2.

Пусть $(a_n)_0^{\infty}$ — произвольная числовая последовательность с условиями $a_n > 0$, $(a_n) \in l^p$ и $(a_n) \overline{\in} l^r$, если $r < p$. Поскольку $p > 2$, то (a_n) удовлетворяет условию (4). Применим к ней лемму 1. Далее, для каждого отрезка $\bar{\Delta}_i = [x_{i-1}, x_i]$ (см. доказательство леммы 1) отображаем на нее систему $(\Phi_n)_2^{\infty}$ из леммы 2 и вне $\bar{\Delta}_i$ полагаем равной нулю. Полученные системы обозначим через $(\psi_n^i)_{n=2}^{\infty}$, $i \geqslant 1$. Нетрудно видеть, что система $(\psi_n)_0^{\infty} \cup (\psi_n^i;\ n \geqslant 2,\ i \geqslant 1)$ — ОНПС на $[0,1]$ и состоит из непрерывных функций. Докажем, что эта система (обозначим ее через $(\varphi_n)_1^{\infty}$ независимо от порядка нумерации) удовлетворяет теореме 2.

Пусть $\sum_1^{\infty} b_n \cdot \varphi_n(x) = 0$ всюду. Нам удобно разбить этот ряд на подряды

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n^i \cdot \psi_n^i,\ i \geqslant 1;\ \sum_0^{\infty} d_n \cdot \psi_n(x).$$

Для каждого i проходит следующее рассуждение: поскольку $\sum_1^\infty b_n \cdot \varphi_n(x) = 0$ всюду, то на $\bar{\Delta}_i$ имеем

$$\sum_0^\infty d_n \cdot \psi_n + \sum_{n=2}^\infty b_n^i \cdot \psi_n^i = 0$$

и так как (в силу леммы 2)

$$\psi_n^i(y_1^i) = 0,\ n > 2,\ \text{то} \sum_{n=0}^\infty d_n \cdot \psi_n(y_1^i) = 0$$

и вследствие конструкции функций ψ_n имеем на всем $\bar{\Delta}_i$ $\sum_0^\infty d_n \cdot \psi_n(x) = 0$.

Таким образом

$$\sum_0^\infty d_n \cdot \psi_n(x) = 0,\ x \in [0,\ 1], \tag{40}$$

и в силу замечания 4 получим $d_n = a_n,\ n > 0$.

Теперь докажем, что все $b_n^i = 0$. В самом деле, из (40) следует, что $\sum_{n=2}^\infty b_n^i \cdot \psi_n^i = 0$ на $\bar{\Delta}_i$ и, следовательно, $\sum_{n=2}^\infty b_n^i \cdot \psi_n^i(y_2^i) = 0$. Но по лемме 2 $\psi_2^i(y_2^i) \neq 0$, $\psi_n^i(y_2^i) = 0$, $n > 2$, откуда следует, что $b_2^i = 0$ и т. д. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3

а) В силу замечания 5 для системы $(\varphi_n)_1^\infty$, построенной при доказательстве теоремы 2, пустое множество будет M-множеством после любой перестановки.

б) Требованию этого пункта удовлетворяет система из леммы 2, а из замечания 6 следует, что эта система может быть равномерно ограниченной (для этого надо в качестве $\|\beta_{mn}\|$ брать единичную матрицу).

На самом деле для этой системы верно более сильное утверждение: если ряд (1) для каждой точки при каком-либо порядке членов сходится к нулю хотя бы по подпоследовательности частных сумм, то все коэффициенты равны нулю.

в) Пусть $a_i\ (i \geq 1)$ — произвольные положительные числа и $\sum_1^\infty a_i^2 = 1$, b_i — отличные от нуля числа такие, что

$$\sum_1^\infty a_i \cdot b_i = 0; \quad \sum_{i=1}^\infty |a_i \cdot b_i| = \infty, \tag{41}$$

$$(a_1,\ a_2) \text{ и } (b_1,\ b_2) \text{ — линейно независимы,} \tag{42}$$

существуют такие m' и m'', что

$$|b_{m'}| < a_{m'},\ |b_{m''}| > a_{m''}. \tag{43}$$

Обозначим $a_{i1} = a_i$. Из (42) следует, что существует единственный l^2-нормированный вектор $(a_{i2})_{i=1}^{\infty}$, $a_{i2} = 0$, $i > 3$, ортогональный к $(b_i)_1^{\infty}$ и $(a_{i1})_1^{\infty}$. Далее выбирается нормированный вектор $(a_{i3})_{i=1}^{\infty}$, $a_{i3} = 0$ $i > 4$, ортогональный к $(b_i)_1^{\infty}$, $(a_{i1})_1^{\infty}$, $(a_{i2})_1^{\infty}$. Продолжая так, мы получим матрицу $\|a_{ij}\|$, столбцы которой составляют ортонормированную и полную l^2-систему.

Докажем полноту. Пусть $(A_i)_1^{\infty} \in l^2$ и ортогонален ко всем столбцам $(a_{ij})_{i=1}^{\infty}$. Тогда в силу (42) получим

$$(A_i)_1^3 = u_3 \cdot (a_{i1})_1^3 + v_3 \cdot (b_i)_1^3;\ (A_i)_1^4 = u_4 \cdot (a_{i1})_1^4 + v_4 \cdot (b_i)_1^4$$

и вообще $(A_i)_1^n = u_n \cdot (a_{i1})_1^n + v_n \cdot (b_i)_1^n$.

Опять же в силу (42) получим $u = u_3 = u_4 = \cdots$; $v = v_3 = v_4 = \cdots$, т. е. $(A_i)_1^{\infty} = u \cdot (a_i)_1^{\infty} + v \cdot (b_i)_1^{\infty}$. Отсюда следует, что $v = 0$, ибо в противном случае $(A_i) \notin l^2$, поскольку $(b_i) \notin l^2$ (см. (41)).

Но так как $(A_i)_1^{\infty}$ и $(a_i)_1^{\infty}$ ортогональны, то $u=0$, т. е. $A_i = 0\ \forall i$. Этими же рассуждениями можно получить утверждение: если $(A_i)_1^{\infty}$ ортогональна ко всем стобцам матрицы, то $(A_i)_1^{\infty} = v \cdot (b_i)_1^{\infty}$. В самом деле, сначала получим $(A_i)_1^{\infty} = u \cdot (a_i)_1^{\infty} + v \cdot (b_i)_1^{\infty}$ и из первого условия в (41) будет следовать $u = 0$.

С другой стороны, можно указать такую перестановку $\sigma(m)$ строчек матрицы $\|a_{mn}\|$, что если $(A_m)_1^{\infty}$ ортогональна ко всем столбцам новой матрицы $\|a_{\sigma(m)\,n}\|$, то $A_m = 0\ \forall m$. В самом деле, пусть $\sigma(m)$ таково, что $\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_{\sigma(m)} \cdot a_{\sigma(m)} = \alpha \neq 0$. Это возможно, ибо в силу второго условия (41) ряд $\sum b_n \cdot a_n$ условно сходящийся. Теперь имеем

$$(A_{\sigma(m)})_{m=1}^{\infty} = u \cdot (a_{\sigma(m)})_{m=1}^{\infty} + v \cdot (b_{\sigma(m)})_{m=1}^{\infty}.$$

Ясно, что u и v не зависят от перестановок σ. Если $v \neq 0$, то

$$0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_{\sigma(m)} \cdot a_{\sigma(m)} = u + v \cdot \sum b_{\sigma(m)} \cdot a_{\sigma(m)} = u + v \cdot \alpha.$$

Но α можно выбрать так, чтобы $u + v \cdot \alpha \neq 0$ и тогда придем к противоречию. Следовательно, $v = 0$. Дальше ясно.

Ф. Г. Арутюнян заметил, что если столбцы матрицы ортонормированы и составляют в l^2 полную систему, то строчки также обладают этими свойствами.

Доказательство. Пусть $(\varphi_m)_1^{\infty}$ — ОНПС и $\psi_n = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \varphi_m$. Тогда $(\psi_n)_1^{\infty}$ — тоже ОНПС и поскольку $a_{mn} = \int \varphi_m \cdot \psi_n\, dx$, то $\varphi_m = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{mn} \cdot \psi_n$. Ортонормированность и полнота строчек $(a_{mn})_{n=1}^{\infty}$ эквивалентна тому, что $(\varphi_m)_1^\infty$—ОНПС. Теперь покажем, что существует $(l_n)_1^\infty \in l^2$ такая, что

$$\forall m \geqslant 1,\ a_{mn} = O(l_n). \tag{44}$$

Матрица $\|a_{ij}\|$ строилась так, что при любом j векторы $(b_m)_1^j$, $(a_{mn})_{m=1}^j$, $1 \leqslant n < j$ линейно независимы. Тогда, учитывая ортогональность столбцов матрицы, получим

$$(a_{mn})_{m=1}^{n-1} = u_n \cdot (b_m)_1^{n-1} + v_n \cdot (a_m)_1^{n-1},\ \forall n > 3 \tag{45}$$

(напомним, что $a_{m1} = a_m$), откуда следует

$$a_{mn} = b_m \cdot u_n + a_m \cdot v_n\ \ \forall m \geqslant 1,\ \forall n > m. \tag{46}$$

Из конструкции матрицы следует, что для любого $n > 3$ $|u_n| + |v_n| > 0$. Пусть n_i', n_i'' — все те числа, для которых

$$\left|u_{n_i'}\right| \leqslant \left|v_{n_i'}\right|,\ \left|u_{n_i''}\right| > \left|v_{n_i''}\right|. \tag{47}$$

Тогда $a_{m' n_i'} = \left(b_{m'} \cdot \dfrac{u_{n_i'}}{v_{n_i'}} + a_{m'}\right) \cdot v_{n_i'}$ и в силу (43) и (47)

имеем

$$a^2_{m' n_i'} \geqslant M \cdot v^2_{n_i'}.$$

Аналогично получим $a^2_{m'' n_i''} \geqslant M \cdot u^2_{n_i''}$.

Но поскольку все строчки нашей матрицы принадлежат l^2, то из последних неравенств следует $(v_{n_i'})_{i=1}^\infty$, $(u_{n_i''})_{i=1}^\infty \in l^2$ и в силу (47) получим

$$(v_n)_1^\infty \in l^2,\ (u_n)_1^\infty \in l^2. \tag{48}$$

Далее $a^2_{mn} \leqslant (b_m^2 + a_m^2) \cdot (u_n^2 + v_n^2)$ и в силу (48) получим (44).

Будем считать, что $l_n > 0$ $\forall n \geqslant 1$. Поскольку $(l_n) \in l^2$, то существует $(d_n)_1^\infty$ такая, что

$$d_n > 0\ \ n \geqslant 1,\ d_n \to \infty,\ \ \sum_1^\infty d_n^2 \cdot l_n^2 = 1. \tag{49}$$

Обозначим $x_i = \sum\limits_{n=1}^{i} d_n^2 \cdot l_n^2$,

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{d_n \cdot l_n} \cdot \sin \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \cdot \pi, & x \in [x_{i-1}, x_i] \equiv \Delta_i \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus \Delta_i, \end{cases}$$

$(\psi_n)_1^\infty$ — ортонормирована на $[0,1]$ и тогда в силу ортонормированности строчек матрицы $\|a_{ij}\|$ функции $\Psi_m = \sum\limits_{n=1}^\infty a_{mn} \cdot \psi_n$ также ортонормированы на $[0,1]$, причем

$$\bigvee_1^{\infty} \Psi_n = \bigvee_1^{\infty} \psi_n. \tag{50}$$

Непрерывность функций Ψ_n на $[0,1)$ следует из непрерывности функций ψ_n. Далее из (44) и (49) следует $\max\limits_{x \in \Delta_n} |a_{mn} \cdot \psi_n(x)| = O(d_n^{-1}) = o(1)$, а это означает непрерывность $\Psi_n(x)$ при $x = 1$, ибо $\Psi_n(1) = 0 \; \forall n \geq 1$.

Теперь ясно, что условие $\sum\limits_1^{\infty} A_n \cdot \Psi_n(x) \equiv 0$ на $[0,1]$ эквивалентно тому, что $(A_n)_1^{\infty}$ ортогональна ко всем столбцам матрицы $\|a_{ij}\|$ и, как было показано ранее, это равносильно условию

$$(A_n)_1^{\infty} = v \cdot (b_n)_1^{\infty}. \tag{51}$$

Итак, по системе $(\Psi_n)_1^{\infty}$ существуют нуль-ряды $\sum\limits_1^{\infty} A_n \cdot \Psi_n$. Если же $\sum\limits_1^{\infty} A_m \cdot \Psi_{\sigma(m)} = 0$ на $[0,1]$, то отсюда следует, что $(A_m)_1^{\infty}$ ортогональна ко всем столбцам матрицы $\|a_{\sigma(m)\,n}\|$ и, как было показано ранее, при подходящем выборе σ отсюда следует, что $A_m = 0 \; \forall m \geq 1$.

Для завершения доказательства пункта в) теоремы 3 надо воспользоваться леммой 2 и провести рассуждения как при доказательстве теоремы 2.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 6.V.1978

Ռ. Ի. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ. Դատարկ բազմության M-բազմություն լինելու վերաբերյալ ընդհանուր օրթոնորմավորված սիստեմների դասում *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է այն հարցը՝ թե անընդհատ ֆունկցիաներից բաղկացած լրիվ օրթոնորմավորված սիստեմների համար զրո-շարքի գոյությունը ինչպես է կախված սիստեմի տեղափոխությունից և գործակիցների զրոյին ձգտելու արագությունից։

R. I. OVSEPIAN. *About the empty set which is M-set in the class of orthonormal systems* (summary)

In the paper the following question is considered how does the existence of series $\sum a_n \varphi_n$ ($\{\varphi_n\}$ is a complete orthonormal system of continous functions) which converge to zero everywhere depend on the coefficients a_n and the rearrangements of the system $\{\varphi_n\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды. М., Гос. изд. физ-мат. лит., 1961.
2. Итоги науки, Математический анализ, М., Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ, 1971, 132, 193.
3. *R. P. Agnew.* Convergence of orthogonal series, Duke Math. J., 27, № 2, 1960, 127—131.

4. *Р. П. Агнью.* Сходимость ортогональных рядов, Математика, сб. переводов, 6: 1· 1962, 60—64.
5. *П. Л. Ульянов.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, XIX, вып. 1, 1964.
6. *Г. М. Мушегян, Р. И. Овсепян.* О единственности ортогональных рядов, Изв. АН Арм. ССР, „Математика", IV, № 4, 1969, 259—266.
7. *В. А. Скворцов.* О скорости стремления к нулю коэффициентов нуль-рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН СССР сер. матем., 41, № 3, 1977, 703—716.
8. *Г. М. Мушегян.* О единственности рядов по переставленным системам Хаара, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", VI, № 1, 1971, 21—34.
9. *А. М. Олевский.* Ряды Фурье непрерывных функций по ограниченным системам, Изв. АН СССР сер. матем., 1966, 387—432.
10. *А. М. Олевский.* Об одной ортонормальной системе и ее применениях, Матем. сб. 71 (113): 3, 1966, 297—337.
11. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, Гос. изд. физ.-мат. лит., 1958, 442.