К. С. КАЗАРЯН

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ ДОПОЛНЕНИИ
НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ

Система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется мультипликативно дополняемой в пространстве L^2 , если существует измеримая функция $M(x)$ такая, что система $\{M(x)f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ полна в L^2 .

В 1948 г. Р. Боас и Г. Поллард [1] доказали, что любая ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, ортогональное дополнение которой конечномерно, является мультипликативно дополняемой в L^2 .

В дальнейшем Дж. Прайс и Р. Зинк [2] дали полное описание класса мультипликативно дополняемых систем, —оказалось, что это свойство системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ эквивалентно тому, чтобы система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ была замкнутой в пространстве S всех конечных измеримых функций. В работах [3], [4] А. А. Талаляна было установлено, что если система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ замкнута в пространстве S , то этим же свойством обладают все системы вида $\{f_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$, N —любое натуральное число, и некоторые системы $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, полученные из системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удалением бесконечного числа функций. Отсюда и из результата [2] непосредственно следует теорема Р. Боаса и Г. Полларда, и более того, получается, что если система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ мультипликативно дополняема, то она остается таковой и после удаления из нее произвольного конечного числа функций, причем это свойство можно сохранить также при удалении некоторых бесконечных подсистем.

Методы, использованные в работах [1], [2], не позволяют выяснить можно ли путем умножения неполных мультипликативно дополняемых систем на некоторую функцию получить базисы в L^2 или хотя бы системы представления пространства L^2 (т. е. получить такую систему $\{M(x)f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, чтобы для любой функции $f \in L^2$ существо-

вал ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n M(x)f_n(x)$, сходящийся к $f(x)$ в метрике L^2).

В 1973 г. Бен-Ами Браун [5], опираясь только на лемму З. А. А. Талаляна [3] о приближении измеримых функций на „больших“ мно-

жествах суммами вида $\sum_{k=N}^m a_k \Phi_k(x)$, где однако, коэффициенты a_k ,

$N \leq k \leq m$, определяются не единственным образом, доказал, что если $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ —базис пространства L^2 , то для любого натурального

числа N существует ограниченная функция $M(x)$ такая, что $\{M(x)f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является системой представления пространства L^p .

В работах [6], [7] автора было установлено, что если $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара, то для любого N существует ограниченная функция $M(x)$ такая, что система $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является базисом в пространстве $L^p[0,1]$ для всех $p > 1$. Вместе с тем было доказано также, что некоторые полные ортогональные системы (в частности система Уолша, тригонометрическая система) не обладают указанным свойством системы Хаара. В частности для системы Уолша $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, какова бы ни была измеримая функция $M(x)$ ни одна система $\{M(x) \cdot W_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ ($N \geq 1$) не является базисом пространства $L^p[0,1]$, $p > 1$, несмотря на то, что согласно теореме Бен-Ами Брауна среди таких систем существуют системы представления пространств $L^p[0,1]$. Вместе с тем оказывается, что подсистемы Уолша $\{M(x)W_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ ($N \geq 1$) можно мультипликативно дополнить до замкнутых минимальных систем в $L^p[0,1]$, сопряженные системы которых полны относительно $L^p[0,1]$. В § 3 будут даны необходимые и достаточные условия на $M(x)$, при которых системы $\{M(x)W_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ ($N \geq 1$) являются замкнутыми минимальными в $L^p[0,1]$ системами, сопряженные системы которых полны относительно $L^p[0,1]$.

§ 1 настоящей статьи посвящен нахождению достаточных условий на замкнутые минимальные системы $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, при выполнении которых системы $\{f_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ ($N \geq 2$) мультипликативно не дополняемы до базисов в L^p , $p > 1$.

Во втором параграфе доказывается, что найденные условия в известном смысле окончательны [10].

В § 3 рассматриваются системы вида $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$, где $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ — система, полученная удалением произвольного конечного числа функций из системы Хаара. Найденны необходимые и достаточные условия на функцию $M(x)$, при которых система $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ является замкнутой минимальной в $L^p[0,1]$. Доказывается также, что если система $\{M(x)\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ замкнута минимальна в $L^p[0,1]$, то сопряженная ей система функций $\{\psi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ полна относительно $L^p[0,1]$.

В дальнейшем через $|E|$ будем обозначать меру Лебега измеримого множества E , через L^q — сопряженное к L^p , $1 \leq p < \infty$, пространство функций, а через $\bar{G}$ — замыкание множества G .

§ 1. О невозможности мультипликативного дополнения до базисов в L^p , $1 \leq p < \infty$, некоторых минимальных систем

В этом параграфе сначала доказываются общие теоремы*), где для произвольной замкнутой минимальной в L^p , $1 \leq p < \infty$, системы

*) Эти теоремы являются обобщениями теоремы 1 работы [5] и теоремы 1 работы [6].

$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и для любого натурального числа N находятся необходимые и достаточные условия на функцию $M(x)$, при выполнении которых системы вида $\{M(x)\varphi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ снова являются замкнутыми минимальными системами в L^p .

В этих теоремах, в зависимости от свойств системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно предполагать, что функции $M(x)$ принадлежат классу ограниченных функций, классам L^p , $1 \leq p < \infty$, или требовать только, чтобы $M(x)\varphi_n(x) \in L^p$ ($n = 1, 2, \dots$). Для всех этих случаев доказательства соответствующих теорем почти совпадают и поэтому мы их приводим одновременно. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — замкнутая минимальная система в $L^p(E)$, $1 \leq p < \infty$, и $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — сопряженная ей система функций. Пусть, далее, N — натуральное число и $M(x)$ — ограниченная функция.

Для того чтобы система $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ была замкнутой минимальной системой в $L^p(E)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

Функция

$$1) \quad [M(x)]^{-1} \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)$$

принадлежит пространству $L^q(E)$ тогда и только тогда, когда все a_n равны нулю.

2) Для каждого k ($k = N+1, N+2, \dots$) существуют единственные числа $a_n^{(k)}$ ($n = 1, 2, \dots, N$) такие, что функция

$$\psi_k(x) = [M(x)]^{-1} \sum_{n=1}^N a_n^{(k)} \varphi_n(x) + \varphi_k(x)$$

принадлежит $L^q(E)$.

Теорема 1^о. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — минимальная в $L^p(E)$, $1 \leq p < \infty$, и полная относительно $L^1(E)$ система ограниченных функций. Пусть, далее, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — сопряженная к $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ система функций, N — натуральное число и функция $M(x) \in L^p(E)$. Для того чтобы система $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ была замкнутой минимальной системой в L^p , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1) и 2) теоремы 1.

Теорема 1^о. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — минимальна в $L^p(E)$, $1 \leq p < \infty$, и обладает следующим свойством:

(C₁)^{*} из того, что для некоторой измеримой функции $f(x)$ функции $f(x)f_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) интегрируемы и $\int_E f(x)f_n(x)dx = 0$ для всех n , следует $f(x) \equiv 0$.

^{*}) Заметим, что здесь функция $f(x)$ может быть неинтегрируемой, например, для случая системы $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$, рассматриваемой на отрезке $[0, \pi]$.

Пусть далее, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^N$ — сопряженная к $\{f_n(x)\}_{n=1}^N$ системе функций, N — натуральное число и функция $M(x)$ такая, что $M(x)f_n(x) \in L^p(E)$ ($n=1, 2, \dots$). Для того чтобы система $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^\infty$ была замкнутой минимальной системой в L^p , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1) и 2) теоремы 1.

Доказательство теорем 1, 1° и 1^∞ . Необходимость. Пусть $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^\infty$ — замкнутая минимальная система в $L^p(E)$. Если существуют числа a_n ($1 \leq n \leq N$) такие, что функция

$$g(x) = [M(x)]^{-1} \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)$$

принадлежит пространству $L^q(E)$, то ввиду того, что

$$\int_E g(x) M(x) f_k(x) dx = \int_E \left[\sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) \right] f_k(x) dx = 0$$

($k = N+1, N+2, \dots$),

и система $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^\infty$ замкнута в $L^p(E)$ (полна относительно $L^q(E)$) получаем, что $g(x) \equiv 0$. Отсюда вытекает, что $a_1 = a_2 = \dots = a_N = 0$ и, следовательно, в теоремах 1, 1° и 1^∞ условие 1) выполняется.

Проверим выполнение условия 2). Обозначим через $\{\psi_k(x)\}_{k=N+1}^\infty$ систему функций, сопряженную к системе $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^\infty$, т. е.

$$\int_E \psi_k(x) M(x) f_n(x) dx = \delta_{n,k} \quad (n, k = N+1, N+2, \dots), \quad (1.1)$$

где $\delta_{n,k}$ — символ Кронекера. Обозначим

$$a_n^{(k)} = \int_E M(x) \psi_k(x) f_n(x) dx \quad (1 \leq n \leq N, k = N+1, N+2, \dots) \quad (1.2)$$

и для каждого k ($k = N+1, N+2, \dots$) положим

$$h_k(x) = M(x) \psi_k(x) - \sum_{n=1}^N a_n^{(k)} \varphi_n(x) = \varphi_k(x). \quad (1.3)$$

Из условий (1.1), (1.2) и (1.3) получаем, что

$$\int_E h_k(x) f_n(x) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots; k = N+1, N+2, \dots).$$

Отсюда, ввиду того, что в теореме 1 система $\{f_k(x)\}_{k=1}^\infty$ замкнута в $L^p(E)$, в теореме 1° — полна относительно $L^1(E)$, а в теореме 1^∞ — имеет свойство (C_5) , получаем, что $h_k(x) \equiv 0$ ($k = N+1, N+2, \dots$).

Следовательно, согласно определению функций $h_k(x)$, будем иметь, что

$$\psi_k(x) = [M(x)]^{-1} \left| \sum_{n=1}^N a_n^{(k)} \varphi_n(x) + \varphi_k(x) \right| \quad (k = N+1, N+2, \dots),$$

т. е. что и требовалось доказать.

Единственность коэффициентов $a_n^{(k)}$ ($n = 1, 2, \dots, N$; $k = N+1, N+2, \dots$) очевидна.

Достаточность. Предположим, что имеют место условия 1) и 2). Если система $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ не является замкнутой в $L^p(E)$, то существует неэквивалентная нулю функция $g(x)$ из пространства $L^1(E)$ такая, что

$$\int_E g(x) M(x) f_k(x) dx = 0 \quad (k = N+1, N+2, \dots).$$

Отсюда получаем, что

$$\int_E \left[g(x) M(x) - \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) \right] f_k(x) dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (1.4)$$

где

$$a_n = \int_E g(x) M(x) f_n(x) dx \quad (1 \leq n \leq N).$$

Из условия (1.4), в силу соответствующих свойств системы $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в теоремах 1, 1° и 1°, следует, что

$$g(x) M(x) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x).$$

Следовательно

$$g(x) = M(x)^{-1} \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) \in L^q,$$

а отсюда и из условия 1) вытекает, что $a_k = 0$ ($1 \leq k \leq N$), т. е. $g(x) = 0$ почти всюду. Полученное противоречие доказывает замкнутость системы $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ в пространстве $L^p(E)$. Минимальность системы $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ следует из условия 2). Нужно только заметить, что определенная в условии 2) система функций $\{\psi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ биортогональна к системе $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$.

Теоремы 1, 1° и 1° доказаны.

Для формулировки нижеследующих теорем введем

Определение 1. Будем говорить, что система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определенных на измеримом множестве E , $|E| > 0$, функций имеет свойство (A) на измеримом множестве F ($F \subset E$, $|F| > 0$), если существует

положительное число α такое, что для любого натурального числа N_1 найдется натуральное число N_2 , для которого

$$\left| \bigcup_{k=N_1}^{N_2} E_k \right| = |F|,$$

где

$$E_k = \{x: |\varphi_k(x)| \geq \alpha\} \cap F.$$

Теорема 2. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — нормированная замкнутая минимальная система в $L^p(E)$, $1 < p < \infty$, и $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — сопряженная ей система, состоящая из ограниченных функций. Пусть, далее, система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ содержит равномерно ограниченную подсистему $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ обладает свойством (A) на множестве $F \subset E$.

Тогда, если для некоторого натурального числа N и для ограниченной функции $M(x) \in L^p(E)$ система $\{M(x)f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является базисом в $L^p(E)$, то

$$[M(x)]^{-1} \in L^q(F) \quad (1.5)$$

и

$$[M(x)]^{-1} \in L^q(E). \quad (1.6)$$

Теорема 2°. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — нормированная минимальная в $L^p(E)$, $1 < p < \infty$, и полная относительно $L^1(E)$ система ограниченных функций, и $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — сопряженная ей система, состоящая из ограниченных функций. Пусть, далее, система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ содержит равномерно ограниченную подсистему $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ обладает свойством (A) на множестве $F \subset E$.

Тогда, если для некоторого натурального числа N и для функции $M(x) \in L^p(E)$ система $\{M(x)f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является базисом в $L^p(E)$, то имеют место условия (1.5) и (1.6) теоремы 2.

Теорема 2^{oo}. Пусть $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — нормирована минимальна в $L^p(E)$, $1 < p < \infty$, имеет свойство (C_s), и $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — сопряженная ей система функций, состоящая из ограниченных функций. Пусть, далее, система $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ содержит равномерно ограниченную подсистему $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ обладает свойством (A) на множестве $F \subset E$.

Тогда, если для некоторого натурального числа N и для некоторой измеримой функции $M(x)$, $M(x)f_n(x) \in L^p(E)$ ($n=1, 2, \dots$) имеем, что система $\{M(x)f_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является базисом в $L^p(E)$, то имеют место условия (1.5) и (1.6) теоремы 2.

Доказательство теорем 2, 2° и 2^{oo}. Обозначим через $\{\psi_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ сопряженную систему базиса $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$. Согласно теоремам 1, 1° и 1^{oo} имеем, что

$$\psi_k(x) = [M(x)]^{-1} \left[\sum_{n=1}^N a_n^{(k)} \varphi_n(x) + \varphi_k(x) \right] \in L^q(E) \quad (k=N+1, N+2, \dots). \quad (1.7)$$

Отсюда очевидно, что последовательности чисел

$$|a_n^{(k)}|_{k=N+1}^- \quad (1 \leq n \leq N)$$

являются коэффициентами разложений функций $M(x) f_n(x) \in L^p$ ($1 \leq n \leq N$) по базису $|M(x) f_k(x)|_{k=N+1}^-$. Следовательно, имеем, что

$$\sum_{l=N+1}^{\infty} a_n^{(l)} M(x) f_l(x) \stackrel{L^p(E)}{=} M(x) f_n(x) \quad (1 \leq n \leq N). \quad (1.8)$$

Из нормированности и ограниченности системы $|f_{n_k}(x)|_{k=1}^-$, следует, что существуют положительные числа β и δ такие, что при $E_0 \subset E$ и $|E_0| > |E| - \delta$

$$\left[\int_{E_0} |f_{n_k}(x)|^p dx \right]^{1/p} > \beta > 0 \quad (k=1, 2, \dots). \quad (1.9)$$

Из условий (1.8) и (1.9) ввиду того, что функция $M(x)$ почти всюду отлична от нуля, следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_n^{(n_k)} = 0 \quad (1 \leq n \leq N). \quad (1.10)$$

Так как система $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^-$ обладает свойством (A) на множестве F , то для некоторого числа $\alpha > 0$ каково бы ни было натуральное число N_1 , существует $N_2 > N_1$ такое, что

$$\left| \bigcup_{k=N_1}^{N_2} E_k \right| = |F|, \quad (1.11)$$

где

$$E_k = \{x: |\varphi_{n_k}(x)| \geq \alpha\} \cap F. \quad (1.12)$$

Возьмем N_1 настолько большим, чтобы

$$|a_n^{(n_k)}| < \frac{1}{N} \frac{\alpha}{2l} \quad (1 \leq n \leq N; k > N_1),$$

где

$$l = \max_{1 \leq j \leq N} \sup_{x \in E} |\varphi_j(x)|.$$

Тогда будем иметь

$$\left| \sum_{n=1}^N a_n^{(n_k)} \varphi_n(x) + \varphi_{n_k}(x) \right| > \frac{\alpha}{2}, \quad \text{при } x \in E_k,$$

а отсюда согласно условию (1.7) получаем, что функция $[M(x)]^{-1}$ интегрируема по модулю в степени q на множестве $\bigcup_{k=N_1}^{N_2} E_k$. Следовательно,

учитывая (1.11) и (1.12) получаем условие (1.5). Выполнение условия (1.6) для теорем 2, 2° и 2°° вытекает соответственно из теорем 1, 1° и 1°°, ввиду ограниченности функций $\varphi_k(x)$ ($1 \leq k \leq N$).

Теоремы 2, 2° и 2°° доказаны.

Из теорем 2, 2° и 2°° соответственно вытекают следующие теоремы.

Теорема 3. Если в условиях теоремы 2 система $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ обладает свойством (A) на множестве полной меры, то для любого натурального числа N и произвольной ограниченной измеримой функции $M(x)$ система $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ не является базисом в $L^p(E)$.

Теорема 3°. Если в условиях теоремы 2° система $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ обладает свойством (A) на множестве полной меры, то для любого натурального числа N и произвольной функции $M(x) \in L^p(E)$ система $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ не является базисом в $L^p(E)$.

Теорема 3°°. Если в условиях теоремы 2°° система $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ обладает свойством (A) на множестве полной меры, то для любого натурального числа N и произвольной измеримой функции $M(x)$, для которой $M(x)f_n(x) \in L^p(E)$ ($n = 1, 2, \dots$), система $\{M(x)f_k(x)\}_{k=N+1}^{\infty}$ не является базисом в $L^p(E)$.

Как легко видеть, теорема 3 является обобщением теоремы 3 работы [6], а теоремы 3° и 3°° — теоремы 3 работы [7]. Отсюда следует также, что выбрасывая из системы Уолша, из тригонометрической системы $\{1, \cos 2\pi nx, \sin 2\pi nx\}_{n=1}^{\infty}$ и из системы $\{\cos \pi nx\}_{n=0}^{\infty}$ конечное число функций, оставшуюся систему функций невозможно умножением на какую-нибудь измеримую функцию превратить в базис пространства $L^p[0,1]$ для любого $p \geq 1$.

Используя теорему 2°°, докажем следующую теорему.

Теорема 4. Если система $\{\sin n_i x\}_{i=1}^{\infty}$ получена удалением из системы $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ конечного числа функций, то для любой измеримой функции $M(x)$ система $\{M(x)\sin n_i x\}_{i=1}^{\infty}$ не является базисом в $L^p[0,1]$ для любых $p > 1$.

Доказательство. Убедимся сначала, что система $\{\sin n_i x\}_{i=1}^{\infty}$ имеет свойство (C₁) на отрезке $[0, \pi]$.

Из условия

$$a_n = \int_0^{\pi} f(t) \sin n t dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (1.12')$$

образуя разности $a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, \dots$), получаем, что

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin t \cdot \cos (n+1)t dt = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.13)$$

Из существования интегралов (1.13) следует, что функция $f(t) \sin t \in L[0, \pi]$, а из того, что $a_1 = a_2 = 0$ и из условий (1.13) получаем, что

$$\int_0^{\pi} f(t) \sin t \cos nt dt = 0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Отсюда, так как система $\{\cos nt\}_{n=0}^{\infty}$ полна в $L[0, \pi]$ получаем, что $f(t) \equiv 0$.

Обозначим $\{\sin k_j x\}_{j=1}^N = \{\sin nx\}_{n=1}^N - \{\sin n_i x\}_{i=1}^N$. Предположим, что $\{M(x) \sin n_i x\}_{i=1}^N$, где $M(x)$ — измеримая функция, является базисом в $L^p[0, \pi]$ и через $\{\psi_{n_i}(x)\}_{i=1}^N$ обозначим сопряженную ей систему функций. Согласно теореме 1^{оо}

$$\psi_{n_i}(x) = [M(x)]^{-1} \left[\sum_{j=1}^N a_{k_j}^{(n_i)} \sin k_j x + \frac{2}{\pi} \sin n_i x \right] \quad (i=1, 2, \dots).$$

Покажем, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$\sin k_j x [M(x)]^{-1} \in L^q[(0, \delta) \cup (\pi - \delta, \pi)] \quad (1 \leq j \leq N). \quad (1.14)$$

Как и в доказательстве теоремы 2^{оо} из предположения, что $\{M(x) \sin n_i x\}_{i=1}^N$ является базисом в $L^p[0, \pi]$, получаем, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} a_{k_j}^{(n_l)} = 0 \quad (1 \leq j \leq N). \quad (1.15)$$

Для $1 \leq j_0 \leq N$ определим следующий предел

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} M(x) \psi_{n_l}(x) [\sin k_{j_0} x]^{-1} = \\ & = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^N a_{k_j}^{(n_l)} \sin k_j x + \frac{2}{\pi} \sin n_l x \right] [\sin k_{j_0} x]^{-1} = \\ & = \sum_{j=1}^N a_{k_j}^{(n_l)} \frac{k_j}{k_{j_0}} + \frac{2}{\pi} \frac{n_l}{k_{j_0}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из условия (1.15) следует, что существует некоторое большое натуральное число l_0 , для которого

$$\lim_{x \rightarrow 0} M(x) \psi_{n_l}(x) [\sin k_{j_0} x]^{-1} \neq 0 \quad (1 \leq j_0 \leq N).$$

Ввиду того, что $\psi_{n_l}(x) \in L^q[0, \pi]$, получаем, что существует число $\delta_1 > 0$ такое, что

$$\sin k_j x [M(x)]^{-1} \in L^q[0, \delta_1], \quad \text{для всех } j, 1 \leq j \leq N.$$

Аналогично можно показать, что существует число $\delta_2 > 0$ такое, что

$$\sin k_j x [M(x)]^{-1} \in L^q[\pi - \delta_2, \pi], \quad \text{для всех } j, 1 \leq j \leq N.$$

Следовательно, для $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ соотношение (1.14) имеет место.

Легко убедиться, что верхний предел

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\sin nx| > 1/2, \text{ при } x \in [1/2 \delta, \pi - 1/2 \delta],$$

откуда ввиду непрерывности функций $\sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$), применяя лемму Бореля, получаем, что система $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ имеет свойство (A) на отрезке $[1/2 \delta, \pi - 1/2 \delta]$. Следовательно, согласно теореме 2^{оо} имеем, что

$$[M(x)]^{-1} \in L^q [1/2 \delta, \pi - 1/2 \delta]. \quad (1.16)$$

Но с другой стороны, согласно теореме 1^{оо}, из условия

$$[M(x)]^{-1} \sum_{j=1}^N a_j \sin k_j x \in L^q [0, \pi]$$

следует, что $a_1 = a_2 = \dots = a_N = 0$, а это противоречит условиям (1.14) и (1.16). Теорема 4 доказана.

§ 2. Об окончательности теорем 3, 3^о и 3^{оо}

Прежде всего заметим, что в формулировках теорем 3, 3^о и 3^{оо} нельзя отбросить требование о равномерной ограниченности некоторой подсистемы $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, сохраняя при этом все остальные условия. Например, для любого числа $p \geq 1$, нормируя систему Хаара в пространстве $L^p [0, 1]$, легко видеть, что для полученной системы

$\{2^{(\frac{n}{p} - \frac{n}{2})} \chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ выполняются все условия этих теорем, кроме условия о равномерной ограниченности некоторой подсистемы, и тем не менее, для любого натурального числа N , согласно теореме 5 работы [6], систему $\{2^{(\frac{n}{p} - \frac{n}{2})} \chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ можно мультипликативно дополнить до базиса в $L^p [0, 1]$.

В формулировках этих теорем нельзя отбросить также требование, чтобы $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система сопряженная к равномерно ограниченной системе $\{f_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, имела свойство (A) на множестве полной меры. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 5. *Существует нормированная и минимальная в $L^2 [0, 1]$ система $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, которая обладает следующими свойствами:*

- а) $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — полна в $L [0, \pi]$;
- б) Как система $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, так и сопряженная ей система $\{L_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — равномерно ограничены;
- в) Существует ограниченная функция $M(x)$ такая, что система $\{M(x) T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в пространстве $L^2 [0, 1]$.

Очевидно, в этой теореме свойство (A) не может иметь места на множестве полной меры (это противоречило бы теореме 3).

Следовательно, функции $L_n(x)$ сопряженной системы в некотором смысле не могут быть удалены от нуля, и в зависимости от того, насколько они „близки“ к нулю удаются системы, полученные из $\{T_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ после выбрасывания некоторых функций, мультипликативно дополнить до базисов.

Нам понадобятся квадратичные матрицы A_k , введенные А. М. Олевским [8]. Для каждого k определяется матрица

$$A_k = \|a_{i,j}^{(k)}\| \quad (1 \leq i, j \leq 2^k)$$

$$a_{1,j}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2^k}} \quad (1 \leq j \leq 2^k), \quad (2.1)$$

а при $1 < i \leq 2^k$, i представляется следующим образом:

$$i = 2^s + \vartheta \quad (1 \leq \vartheta \leq 2^s, 0 \leq s \leq k-1), \quad (2.2)$$

и полагаем

$$a_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2^{k-s}}}, & \text{если } (\vartheta-1)2^{k-s} + 1 \leq j \leq (\vartheta-1)2^{k-s-1} \\ -\frac{1}{\sqrt{2^{k-s}}}, & \text{если } (2\vartheta-1) \cdot 2^{k-s-1} + 1 \leq j \leq \vartheta \cdot 2^{k-s} \\ 0, & \text{для остальных } j. \end{cases} \quad (2.3)$$

Приведем некоторые свойства матриц A_k [см. [8], стр. 299].

а). Матрица A_k ортогональна при каждом k .

б). Справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{2^k} |a_{i,j}^{(k)}| < \vartheta_1 \quad (1 \leq i, j \leq 2^k; k=1, 2, \dots). \quad (2.4)$$

Дадим определение квадратичных матриц $B_{k,m} = \|b_{i,j}^{(k,m)}\|$, где m принимает любые целочисленные значения и $1 \leq i, j \leq 2^k$. Положим

$$b_{1,j}^{(k,m)} = \frac{2^m}{\sqrt{2^k}} \quad (1 \leq j \leq 2^k), \quad (2.5)$$

а при $1 < i \leq 2^k$ и для $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ полагаем

$$b_{i,j}^{(k,m)} = a_{i,j}^{(k)} \quad (1 \leq j \leq 2^k). \quad (2.6)$$

Из определения матриц $B_{k,m}$ и A_k непосредственно следует, что имеют место следующие свойства.

а). Ранг матрицы $B_{k,m}$, для любых $m = \pm 1, \pm 2$, равен 2^k .

$$б) \sum_{j=1}^{2^k} b_{j,i}^{(k,m)} b_{j,l}^{(k,-m)} = \delta_{i,l} \quad (1 \leq i, l \leq 2^k; m = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Напомним определение системы Хаара $\{\lambda_n(x)\}$.

Имеем: $\lambda_0^{(0)}(x) \equiv 1$ ($0 \leq x \leq 1$), а при $k=0, 1, 2, \dots$

$$\lambda_m^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \text{если } \frac{2k-2}{2^{m+1}} < x < \frac{2k-1}{2^{m+1}} \\ -\sqrt{2^m}, & \text{если } \frac{2k-1}{2^{m+1}} < x < \frac{2k}{2^{m+1}} \\ 0, & \text{если } x \in \left[\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m} \right], \end{cases}$$

где для каждого $m=0, 1, \dots$ индекс k пробегает значения $1, 2, \dots, 2^m$. Через $\{\lambda_n(x)\}_{n=1}^\infty$ обозначим систему Хаара, упорядоченную обычным образом:

$$\lambda_0^{(0)}(x) = \lambda_1(x),$$

а при $n = 2^m + k$ ($m=0, 1, \dots; k=1, 2, \dots, 2^m$)

$$\lambda_m^{(k)}(x) = \lambda_n(x).$$

Обозначим

$$\tilde{\lambda}_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2} \lambda_n(2x), & \text{при } x \in [0, 1/2] \\ 0, & \text{при } x \in (1/2, 1] \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\bar{W}_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in [0, 1/2] \\ \sqrt{2} W_n(2x-1), & \text{при } x \in (1/2, 1], \end{cases} \quad (2.8)$$

где через $\{\lambda_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и $\{W_n(x)\}_{n=0}^\infty$ соответственно обозначены системы Хаара и Уолша.

При построении функции системы $\{T_n(x)\}_{n=1}^\infty$ будут сгруппированы в так называемые „пачки“, а последние — в „блоки“. Поэтому удобно эти функции обозначить тремя индексами — $T_i^{(p, q)}$, где нижний индекс i показывает номер функции в „пачке“, верхний левый индекс p показывает номер „пачки“ в „блоке“, а верхний правый индекс q — номер „блока“. Обозначим

$$T_0^{(0, 0)}(x) = \tilde{\lambda}_1(x). \quad (2.9)$$

Нулевой „блок“ состоит из одной „пачки“, которая, в свою очередь, состоит из одной функции $T_1^{(1, 0)}(x)$,

$$T_1^{(1, 0)}(x) = \tilde{\lambda}_2(x). \quad (2.10)$$

n -ый „блок“ состоит из 2^n „пачек“, а в каждую „пачку“ входит 2^n функций. Для $n=1, 2, \dots$ и $1 \leq m \leq 2^n$ обозначим

* Значения функций Хаара на конечном числе точек не играют роли в дальнейших рассуждениях.

$$n(m) = \begin{cases} n, & \text{если } m = 1 \\ n - [\log_2(m-1)] - 1, & \text{если } 2 \leq m \leq 2^n, \end{cases} \quad (2.11)$$

где $[\log_2(m-1)]$ означает целую часть числа $[\log_2(m-1)]$. В n -ом „блоке“ m -тая „пачка“, $1 \leq m \leq 2^n$, состоит из функций

$$T_j^{(m, n)}(x) = b_{i, j}^{(3n, n(m))} \tilde{\chi}_n^{(m)}(x) + \sum_{l=2}^{2^{3n}} b_{i, j}^{(3n, n(m))} \tilde{W}_{n_m+l-1}(x) \quad (1 \leq j \leq 2^{3n}), \quad (2.12)$$

где $\tilde{W}_{n_m}(x)$ имеет наибольший индекс среди ранее использованных функций. Положим

$$T_1(x) = T_0^{(0, 0)}(x), \quad (2.13)$$

$$T_2(x) = T_1^{(1, 0)}(x), \quad (2.14)$$

а для $n = 1, 2, \dots, 1 \leq m \leq 2^n$ и $1 \leq j \leq 2^{3n}$

$$T_k(x) = T_j^{(m, n)}(x), \quad (2.15)$$

где

$$k = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} 2^l \cdot 2^{3l} + (m-1) 2^{3n} + j. \quad (2.16)$$

Ограниченность системы $\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ следует из условий (2.5), (2.11), (2.6) и (2.4), если учесть, что

$$\max_{x \in [0, 1]} |\tilde{\chi}_n^{(m)}(x)| = \sqrt{2^{n+1}} \quad (n=0=0, 1, \dots; 1 \leq m \leq 2^n), \quad (2.17)$$

$$\max_{x \in [0, 1]} |\tilde{W}_n(x)| = \sqrt{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots). \quad (2.18)$$

Покажем, что система $\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является квазинормированной, т. е. существуют абсолютные константы c и C такие, что

$$c \leq \|T_k\|_{L^2[0, 1]} \leq C \quad (k=1, 2, \dots). \quad (2.19)$$

Действительно, из условий (2.12) и из определений матриц A_k и $B_{n, m}$ следует, что

$$\int_0^1 |T_j^{(m, n)}(x)|^2 dx = \sum_{l=2}^{2^{3n}} [a_{l, j}^{(3n)}]^2 = 1 - 1/2^{3n},$$

для $n = 1, 2, \dots, 1 \leq m \leq 2^n$ и $1 \leq j \leq 2^{3n}$, и ввиду того, что функции $T_k(x) (k=1, 2, \dots)$ ограничены получаем соотношения (2.19). Полнота системы $\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ относительно пространства $L[0, 1]$ следует

из условия γ) и из полноты в $L[0, 1]$ системы $\{\tilde{\chi}_n(x)\} \cup \{\tilde{W}_n(x)\}$. Чтобы показать минимальность системы $\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^2[0, 1]$ укажем сопряженную ей систему функций $\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Полагаем

$$L_1(x) = \bar{L}_1(x), \quad L_2(x) = \bar{L}_2(x), \quad (2.20)$$

а для натуральных чисел k , которые определяются равенством (2.16), где $n=1, 2, \dots$, $1 \leq m \leq 2^n$ и $1 \leq j \leq 2^{3n}$ —

$$L_k(x) = b_{i,j}^{(3n, -n(m))} \bar{L}_n^{(m)}(x) + \sum_{l=2}^{2^{3n}} b_{i,j}^{(3n, -n(m))} \bar{W}_{n_m+l-1}(x). \quad (2.21)$$

Из определений систем $\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, учитывая равенства б), получаем, что

$$\int_0^1 T_k(x) L_l(x) dx = \delta_{k,l} \quad (k, l = 1, 2, \dots),$$

где $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера.

Из условий (2.17), (2.18), а также из определений матриц $\|b_{i,j}^{(k, n(m))}\|$ следует, что система $\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена. Приступим к доказательству теоремы 5. Возьмем

$$M(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (1/2, 1] \\ 2^{-n}, & \text{если } x \in (1/2^{n+1}, 1/2^n], \quad n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (2.22)$$

Чтобы доказать замкнутость и минимальность системы $\{M(x) T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^2[0,1]$ достаточно проверить выполнение условий 1) и 2) теоремы 1 для случая $p=2$, $N=1$.

Условие 1) теоремы 1 выполнено, так как $|T_1(x)| = \sqrt{2}$, при $x \in [0, 1/2]$ и

$$\int_0^{1/2} [M(x)]^{-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot 1/2^{n+2} = +\infty.$$

Остается доказать существование чисел a_k , для которых

$$\psi_k(x) = [M(x)]^{-1} [L_k(x) + a_k L_1(x)] \in L^2[0,1] \quad (k = 2, 3, \dots). \quad (2.23)$$

Для удобства функции системы $\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ сгруппированы в „блоки“ и „пачки“ и пронумерованы тремя индексами таким же образом, что и соответствующие им функции из системы $\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда, согласно определению, каждая из функций $L_j^{(m, n)}(x)$, $m \neq 1$, отлична от нуля в некоторой окрестности точки $x=0$ и поэтому [см. (2.22)]

$$[M(x)]^{-1} L_j^{(m, n)}(x) \in L^2[0,1], \quad \text{при } m \neq 1.$$

Следовательно, в соотношении (2.23) для k , определенных равенствами (2.16), где $m \neq 1$, полагаем $a_k = 0$.

Итак получаем, что

$$\psi_j^{(m, n)}(x) = [M(x)]^{-1} L_j^{(m, n)}(x) \in L^2[0,1] \quad (n = 1, 2, \dots; 2 \leq m \leq 2^n; 1 \leq j \leq 2^{3n}). \quad (2.24)$$

Так как $n(1) = n$, то согласно определению систем $\{L_k(x)\}_{k=1}^{2^n}$ и из условий (2.5) и (2.7) имеем, что любая функция $L_k(x)$ из первой „пачки“ n -го „блока“ на интервале $(0, 1/2^{n+1})$ равна

$$b_{1,j}^{(3n, n(1))} \sqrt{2^{n+1}} = \frac{2^{-n}}{\sqrt{2^{2n}}} \cdot \sqrt{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2^{2n}} \quad (1 \leq j \leq 2^{3n}).$$

Следовательно, если для таких функций в соотношении (2.23) положить $a_k = -2^{-2n}$, то получим, что функции

$$\begin{aligned} \psi_j^{(1, n)}(x) &= [M(x)]^{-1} [L_j^{(1, n)}(x) - 2^{-2n} L_1(x)] \in L^2[0, 1] \\ & \quad (n = 0, 1, \dots; 1 \leq j \leq 2^{3n}). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Из (2.24) и (2.25) вытекает, что условие 2) теоремы 1 также выполнено, и, следовательно, система $\{M(x) T_k(x)\}_{k=2}^{2^n}$ замкнута и минимальна в $L^2[0, 1]$, а система $\{\psi_k(x)\}_{k=2}^{2^n}$ определена равенствами (2.25) и (2.24), биортогональна ей. Покажем, что система $\{M(x) T_k(x)\}_{k=2}^{2^n}$ имеет ортонормированную подсистему, точнее

$$M(x) T_j^{(m, n)}(x) = \psi_j^{(m, n)}(x) \quad (n = 1, 2, \dots; 2 \leq m \leq 2^n; 1 \leq j \leq 2^{3n}). \quad (2.26)$$

Для этого, во-первых, заметим, что согласно определению систем $\{T_k(x)\}_{k=1}^{2^n}$, $\{L_k(x)\}_{k=1}^{2^n}$ и функции $M(x)$,

$$M(x) T_k(x) = \psi_k(x), \quad \text{при } x \in (1/2, 1) \quad (k \geq 2). \quad (2.27)$$

Для любого натурального числа n и для $2 \leq m \leq 2^n$ из условия (2.22) получаем, что на носителе функции $T_n^{(m)}(x)$ $M(x)$ постоянна и принимает значение

$$2^{-[n - \lfloor \log_2(m-1) \rfloor - 1]}. \quad (2.28)$$

Отсюда и из условий (2.12), (2.21), (2.11), (2.27) и (2.5) вытекают соотношения (2.26). Совокупность функций (2.26) составляет ортонормированную систему, поэтому часть разложения функции $f(x) \in L^2[0, 1]$ по биортогональной системе $\{M(x) T_k(x), \psi_k(x)\}_{k=2}^{2^n}$, в которой участвуют функции (2.26), сходится в $L^2[0, 1]$.

Остается проверить сходимость другой части этого разложения, т. е. той части, в которой участвуют функции $M(x) T_j^{(1, n)}(x)$ ($n = 1, 2, \dots; 1 \leq j \leq 2^{3n}$). Положим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \in [0, 1/2] \\ 0 & \text{при } x \in (1/2, 1], \end{cases} \quad (2.29)$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in [0, 1/2] \\ f(x), & \text{при } x \in (1/2, 1]. \end{cases} \quad (2.30)$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{3n}} C_j^{(1, n)} M(x) T_j^{(1, n)}(x), \quad (2.31)$$

где $C_j^{(1, n)}$ коэффициенты разложения функции $f_1(x)$,

$$C_j^{(1, n)} = \int_0^1 f_1(t) \psi_j^{(1, n)}(t) dt. \quad (2.32)$$

Из условий (2.21) и (2.25) следует, что на интервале $(0, 1/2)$ функции $\psi_j^{(1, n)}(x)$ ($n = 1, 2, \dots; 1 \leq j \leq 2^{3n}$) совпадают, поэтому из условий (2.29) и (2.32) следует, что

$$C_1^{(1, n)} = C_2^{(1, n)} = \dots = C_{2^{3n}}^{(1, n)} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.33)$$

Ряд (2.31) рассмотрим отдельно на интервалах $(0, 1/2)$ и $(1/2, 1)$. Из условий (2.33) получаем, что ряд (2.31) на интервале $(0, 1/2)$ равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{3n}} \int_0^{1/2} f_1(t) \psi_j^{(1, n)}(t) dt \times M(x) T_j^{(1, n)}(x). \quad (2.34)$$

Подставляя сюда значения функций $\psi_j^{(1, n)}(x)$ и $T_j^{(1, n)}(x)$ ($1 \leq j \leq 2^{3n}$) [см. (2.12), (2.25) и (2.21)], получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{3n} \int_0^{1/2} f_1(t) [b_{1,1}^{(3n, n(1))} \tilde{\chi}_n^{(1)}(t) - 2^{-2n} \tilde{\chi}_1^{(1)}(t)] [M(t)]^{-1} dt \times \\ \times M(x) b_{1,1}^{(3n, n(1))} \tilde{\chi}_n^{(1)}(x).$$

Отсюда согласно (2.5) и (2.11) ряд (2.34) на интервале $(0, 1/2)$ совпадает с рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1/2} f_1(t) [\tilde{\chi}_n^{(1)}(t) - 2^{n/2} \tilde{\chi}_1^{(1)}(t)] [M(t)]^{-1} dt \times M(x) \tilde{\chi}_n^{(1)}(x). \quad (2.35)$$

Заметим, что норма в $L^2[0, 1/2]$ m -той частичной суммы ряда (2.35) равна норме в $L^2[0, 1]$ m -той частичной суммы ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 g(t) [\chi_n^{(1)}(t) - 2^{n/2} \chi_1^{(1)}(t)] [M_1(t)]^{-1} dt \cdot M_1(x) \chi_n^{(1)}(x), \quad (2.36)$$

где $g(t) = f_1(t/2)$ и $M_1(t) = M(t/2)$. Сходимость ряда (2.36) в $L^2[0, 1]$ была доказана в работе [6], где установлено, что система $\{M_1(x) \chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом во всех пространствах $L^p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ (краткая схема доказательства этого факта приведена в работе [5]). Таким образом доказана сходимость ряда (2.31) на интервале $[0, 1/2]$. Снова используя равенства (2.33) ряд (2.31) на интервале $[1/2, 1]$ можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{3n}} C_1^{(1,n)} M(x) T_j^{(1,n)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{3n}} C_1^{(1,n)} M(x) \sum_{l=2}^{2^{3n}} b_{l,j}^{(3n,n)} \bar{W}_{n_1+l-1}(x). \quad (2.37)$$

Из условия (2.6) имеем, что $b_{l,j}^{(3n,n)} = a_{l,j}^{(1n)}$, поэтому, учитывая также условие (2.3), получим

$$\sum_{j=1}^{2^{3n}} \sum_{l=2}^{2^{3n}} b_{l,j}^{(3n,n)} \bar{W}_{n_1+l-1}(x) = \sum_{l=2}^{2^{3n}} \bar{W}_{n_1+l-1}(x) = \sum_{l=1}^{2^{3n}} a_{l,j}^{(1n)} = 0. \quad (2.38)$$

Чтобы доказать сходимость ряда (2.31) к нулю по норме в $L^2[1/2, 1]$ остается только проверить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |C_1^{(1,n)}| \max_{1 \leq \theta < 2^{3n}} \left\| \sum_{j=1}^{\theta} \sum_{l=2}^{2^{3n}} a_{l,j}^{(3n)} \bar{W}_{n_1+l-1}(x) \right\|_{L^2} = 0. \quad (2.39)$$

Из ортогональности матрицы $\|a_{i,j}^{(k)}\|$ ($k=1, 2, \dots, 1 \leq i, j \leq 2^k$) [см. условие а] и из того, что все элементы первой строки этой матрицы равны $1/\sqrt{2^k}$, получаем следующие соотношения:

$$\sum_{l=2}^{2^{3n}} a_{l,r}^{(3n)} a_{l,l}^{(3n)} = \begin{cases} 1 - 1/2^{3n}, & \text{при } r = l \\ -1/2^{3n}, & \text{при } r \neq l \end{cases} \quad (1 \leq r, l \leq 2^{3n}).$$

Отсюда, ввиду ортонормированности системы $\{\bar{W}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, легко следует равенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{\theta} \sum_{l=2}^{2^{3n}} a_{l,j}^{(3n)} \bar{W}_{n_1+l-1}(x) \right|^2 dx = \theta(1 - 1/2^{3n}) - \theta(\theta - 1) 1/2^{3n}. \quad (2.40)$$

Так как функция $y(x) = x(1 - 1/2^{3n}) - x(x-1)1/2^{3n}$ для положительных x достигает максимума при $x = 2^{3n-1}$ получаем, что

$$\max_{1 \leq \theta < 2^{3n}} \left\| \sum_{j=1}^{\theta} \sum_{l=2}^{2^{3n}} a_{l,j}^{(3n)} \bar{W}_{n_1+l-1}(x) \right\|_{L^2} \leq \sqrt{2^{3n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.41)$$

С другой стороны, из (2.32), (2.25) и из определения системы $\{L_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ имеем

$$C_i^{(1,n)} = \int_0^1 f_1(t) \left[\frac{1}{\sqrt{2^{3n}}} \tilde{\chi}_n^{(1)}(t) - \frac{1}{2^{2n}} \tilde{\chi}_1(t) \right] [M(t)]^{-1} dt,$$

а отсюда можно написать

$$C_1^{(1,n)} = \int_0^{1/2} \left[f(t) - \sum_{k=2}^{2^n} a_k M(t) \tilde{\chi}_k(t) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2^{3n}}} \tilde{\chi}_n^{(1)}(t) - \frac{1}{2^{2n}} \tilde{\chi}_1(t) \right] \times \\ \times [M(t)]^{-1} dt \quad (2.42)$$

для любых действительных чисел a_k ($2 \leq k \leq 2^n$). Обозначим

$$\delta_n = \inf_{\{a_k\}} \left\| f(t) - \sum_{k=2}^{2^n} a_k M(t) \tilde{\chi}_k(t) \right\|_{L^2[0, 1/2]} \quad (2.43)$$

Из замкнутости системы $\{M(x) \tilde{\chi}_k(x)\}_{k=2}^{2^n}$ в $L^2[0, 1/2]$ следует, что

$$\delta_n \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.44)$$

Из условий (2.42) и (2.43) получаем, что

$$\begin{aligned} |C_1^{(1, n)}| &\leq 2\delta_n \left[\int_0^{1/2} \left| \frac{1}{\sqrt{2^{5n}}} \tilde{\chi}_n^{(1)}(t) - \frac{1}{2^{2n}} \tilde{\chi}_1(t) \right|^2 [M(t)]^{-2} dt = \right. \\ &= 2\delta_n \left[2 \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2k} \cdot 1/2^{k+2} + 8 \cdot 2^{2n} \cdot 1/2^{n+2} \right]^{1/2} \cdot 1/2^{2n} \leq \frac{\sqrt{2^n}}{2^{2(n-1)}} \delta_n. \end{aligned}$$

Отсюда и из условий (2.41), (2.44) вытекает (2.39). Сходимость ряда (2.31) в $L^2[0, 1]$ доказана.

Для завершения доказательства теоремы 5 нужно доказать сходимость в $L^2[0, 1]$ ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{3n}} d_j^{(1, n)} M(x) T_j^{(1, n)}(x), \quad (2.45)$$

где

$$d_j^{(1, n)} = \int_0^1 f_2(t) \psi_j^{(1, n)}(t) dt. \quad (2.46)$$

Из условий (2.12) ряд (2.45) на интервале $(0, 1/2)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{3n}} d_j^{(1, n)} M(x) T_j^{(1, n)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_{1,1}^{(3n, n)} M(x) \tilde{\chi}_n^{(1)}(x) \sum_{j=1}^{2^{3n}} d_j^{(1, n)}, \\ &x \in (0, 1/2). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Согласно условиям (2.21), (2.25) и (2.46) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2^{3n}} d_j^{(1, n)} &= \int_{(0)}^{1/2} f(t) \left[\sum_{j=1}^{2^{3n}} \psi_j^{(1, n)}(t) \right] dt = \\ &= \int_0^{1/2} f(t) \left[\sum_{j=1}^{2^{3n}} \sum_{i=2}^{2^{3n}} b_{i,j}^{(3n, n)} \tilde{W}_{n, \tau_i - 1}(t) \right] dt, \end{aligned}$$

а отсюда и из условия (2.38) получаем

$$\sum_{j=1}^{2^{3n}} d_j^{(1, n)} = 0. \quad (2.48)$$

С другой стороны, из определения $M(x)$ [см. (2.22)] и условия (2.5) имеем

$$\|M(x) b_{1,1}^{(3n, n)} \tilde{\chi}_n^{(1)}(x)\|_{L^2} = \left\| \frac{1}{\sqrt{2^n}} M(x) \tilde{\chi}_n^{(1)}(x) \right\|_{L^2} < \frac{3}{\sqrt{2^{3n}}}.$$

Отсюда учитывая (2.46) и полноту системы $\{\tilde{W}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L^2[1/2, 1]$ подобными рассуждениями, что и выше, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|b_{1,1}^{(3n, n)} (M(x) \tilde{\chi}_n^{(1)}(x))\|_{L^2} \cdot \max_{1 \leq j \leq 2^{3n}} \left| \sum_{j=1}^v d_j^{(1, n)} \right| = 0. \quad (2.49)$$

Из условий (2.47), (2.48) и (2.49) следует сходимость ряда (2.45) в $L^2[0, 1/2]$.

Так как $M(x) = 1$, при $x \in [1/2, 1]$, то имеем, что ряд

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{3n}} d_j^{(1, n)} M(x) T_j^{(1, n)}(x) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{3n}} \int_0^{1/2} f_2(t) \left[\sum_{l=2}^{2^{3n}} b_{l,j}^{(3n, n)} \tilde{W}_{n,l-1}(t) \right] dt \cdot \sum_{l=2}^{2^{3n}} b_{l,j}^{(3n, n)} \tilde{W}_{n,l-1}(x), \\ & \quad x \in [1/2, 1]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Функции

$$\sum_{l=2}^{2^{3n}} b_{l,j}^{(3n, n)} \tilde{W}_{n,l-1}(x) \quad (1 \leq j \leq 2^{3n}; n = 0, 1, 2, \dots),$$

определенные на интервале $(1/2, 1)$, можно продолжить на весь отрезок $[0, 1]$ таким образом, чтобы полученная система была ортонормированной системой в $L^2[0, 1]$. Это очевидно следует из ортогональности матриц A_k ($k = 1, 2, \dots$), если в условии (2.12) положить

$$b_{1,1}^{(3n, n(1))} = b_{1,2}^{(3n, n(1))} = \dots = b_{1,2^{3n}}^{(3n, n(1))} = \frac{1}{\sqrt{2^{3n}}}.$$

Отсюда ввиду того, что $f(x) = 0$, при $x \in (0, 1/2)$, сразу вытекает сходимость ряда (2.50) в $L^2[1/2, 1]$.

Теорема 5 доказана.

§ 3. Мультипликативное дополнение некоторых подсистем системы Хаара и системы Уолша

В настоящем параграфе для любого конечного набора функций Хаара устанавливаются необходимые и достаточные условия на функ-

цию $M(x)$ для того, чтобы после удаления из системы Хаара $\{\lambda_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ данного набора, оставшуюся систему функций $\{\lambda_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ умножением на функцию $M(x)$ можно было превратить в замкнутую минимальную систему пространства $L^p[0,1]$, $p \geq 1$. Доказывается также, что если $\{M(x)\lambda_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ является замкнутой минимальной системой в $L^p[0,1]$, то сопряженная ей система функций полна относительно $L^p[0,1]$. Заметим, что последний факт имеет место не для всех замкнутых минимальных систем. Например, система $\{\lambda_n(x) + 1\}_{n=2}^{\infty}$, где $\{\lambda_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара, замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$, $p \geq 1$, но для любой функции $M(x)$, для которой система $\{M(x)[\lambda_n(x) + 1]\}_{n=3}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$, сопряженная ей система функций полна в $L^p[0,1]$. В самом деле, если $\{M(x)[\lambda_n(x) + 1]\}_{n=3}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$ (такая функция $M(x)$ существует — например, функция, определенная равенствами (2.22)), то сопряженная ей система $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ согласно условию 2) теоремы 1² представляется в виде

$$\psi_n(x) = [M(x)]^{-1} [\lambda_n(x) + a_1 \lambda_2(x)] \quad (n \geq 3),$$

а отсюда ясно, что функция $M(x)\lambda_1(x)$ ортогональна всем функциям $\psi_n(x)$ ($n \geq 3$). Все результаты, доказанные в настоящем параграфе для системы Хаара, верны и для системы Уолша. Однако, в случае системы Уолша, для простоты, мы их приведем только для специальных подсистем вида $\{W_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ (полученных удалением первых N функций из системы Уолша $\{W_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$). Дело в том, что в этом случае соответствующий результат получается как следствие теорем, доказанных для системы Хаара. Приведем одно определение.

Определение 2. Пусть $M(x)$ — функция, определенная на измеримом множестве E положительной конечной меры, и E_1 — измеримое подмножество множества E , $|E_1| > 0$. Пусть, далее, $1 \leq p < \infty$ и $x_0 \in \bar{E}_1$. Скажем, что функция $M(x)$ имеет особенность степени p в точке x_0 относительно множества E_1 , если для любого $\gamma > 0$ функция $[M(x)]^{-1}$ не принадлежит пространству $L^p(E_1)$, где $E_\gamma = (x_0 - \gamma, x_0 + \gamma) \cap E_1$. Сначала рассмотрим случай, когда из системы Хаара удалена первая функция.

Теорема 6. Пусть $\{\lambda_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара и $M(x) \in L^p[0,1]$, $p \geq 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

γ_1) Система $\{M(x)\lambda_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ является замкнутой минимальной системой в $L^p[0,1]$.

γ_2) Система $\{M(x)\lambda_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ является замкнутой минимальной системой в $L^p[0,1]$ и сопряженная ей система $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ полна относительно $L^p[0,1]$.

γ_3) Существует одна и только одна точка $x_0 \in [0,1]$, для которой, если точка x_0 — двоично иррациональна, то функция $M(x)$ имеет особенность степени q в этой точке относительно отрезка

ка $[0,1]$; если точка x_0 — двоично рациональна, то функция $M(x)$ имеет особенность степени q в этой точке относительно одного и только одного из множеств $(0, x_0)$ и $(x_0, 1)$.

Доказательство. Если через $\Delta_k^{(1)}$ и $\Delta_k^{(2)}$ ($k = 0, 1, \dots$) соответственно обозначим левую и правую половину носителя некоторой функции Хаара из k -той „пачки“, то очевидно, что условие γ_3) эквивалентно существованию последовательности интервалов

$$\Delta_0^{(i_1)} \supset \Delta_1^{(i_2)} \supset \dots \supset \Delta_k^{(i_k)} \supset \dots \quad (i_k = 1 \text{ или } 2), \quad (3.1)$$

для которых

$$[M(x)]^{-1} \in L^q[\Delta_k^{(i_k)}]; \quad [M(x)]^{-1} \in L^q[C\Delta_k^{(i_k)}]. \quad (3.2)$$

Из сделанного замечания следует, что эквивалентность условий γ_1) и γ_3) доказана в работе [7] (см. лемму 1). Нам здесь нужно только доказать, что сопряженная к $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^\infty$ система функций $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^\infty$ полна относительно $L^p[0,1]$. Положим

$$\psi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} [M(x)]^{-1} [\chi_m^{(k)}(x) + (-1)^{l_m} \sqrt{2^m}], & \text{если } \Delta_m^{(i_m)} \subset \Delta_{2^m+k} \\ \chi_m^{(k)}(x) [M(x)]^{-1}, & \text{если } \Delta_m^{(i_m)} \cap \Delta_{2^m+k} = \emptyset \end{cases} \quad (3.3)$$

($1 \leq k \leq 2^m$; $m = 0, 1, \dots$). Обозначая

$$\psi_{2^m+k}(x) = \psi_m^{(k)}(x) \quad (1 \leq k \leq 2^m; m = 0, 1, \dots), \quad (3.4)$$

непосредственным вычислением легко проверить, что система $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^\infty$ биортогональна к системе $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^\infty$. Покажем, что если функ-

ция $f(x) \in L^p[0,1]$ и $\int_0^1 f(t) \psi_n(t) dt = 0$ для всех $n \geq 2$, то $f(x) \equiv 0$.

Доказательство проведем по индукции. Сначала докажем, что $f(x) = 0$, при $x \in C\Delta_0^{(i_0)}$. Обозначим через $\{\psi_{1,k}(x)\}_{k=1}^\infty$ все те функции из системы $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^\infty$, которые тождественно равны нулю на интервале $\Delta_0^{(i_0)}$. Из условия (3.3) очевидно, что в систему $\{\psi_{1,k}(x)\}_{k=1}^\infty$ входят функции, сопряженные к тем функциям из системы $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=2}^\infty$, носители которых лежат в $C\Delta_0^{(i_0)}$, а также функция $\psi_2(x)$, которая на интервале $C\Delta_0^{(i_0)}$ равна $2(-1)^{i_0} [M(x)]^{-1}$. Согласно выбору системы $\{\psi_{1,k}(x)\}_{k=1}^\infty$ имеем, что

$$\int_{C\Delta_0^{(i_0)}} f(x) \psi_{1,k}(x) dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.5)$$

Легко видеть, что каждую функцию $M(x)\psi_{1,k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) с точностью до постоянного множителя можно получить транспонируя функцию Хаара $\chi_k(x)$ с интервала $(0,1)$ на интервал $C\Delta_0^{(i_0)}$ заменой линей-

ного переменного. Отсюда, ввиду того, что функция $f(x) [M(x)]^{-1} \in L[C\Delta_0^{(i)}]$ и система Хаара полна относительно $L[0,1]$, из условия (3.5) получаем, что $f(x) \equiv 0$ на интервале $C\Delta_0^{(i)}$.

Предположим, что для некоторого натурального числа m функция

$$f(x) \equiv 0, \text{ при } x \in C\Delta_{m-1}^{(i_{m-1})}. \quad (3.6)$$

Возьмем ту подсистему $\{\psi_{m,k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ системы $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$, которая состоит из всех функций, принимающих нулевое значение на интервале $\Delta_m^{(i_m)}$ и имеющих ненулевое значение на интервале $\Delta_{m-1}^{(i_{m-1})} - \Delta_m^{(i_m)}$. Если функции системы $\{\psi_{m,k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ расположены относительно друг-друга таким же образом, что и в системе $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ и номера функций $\psi_{m,k}(x) (k=1, 2, \dots)$ в системе $\{\psi_n(x)\}_{n=2}^{\infty}$ равны m_k , то легко видеть, что

$$\Delta_{m_1} = \Delta_{m-1}^{(i_{m-1})}, \quad (3.7)$$

$$\psi_{m,k}(x) = [M(x)]^{-1} \psi_{m_k}(x) \quad (k \geq 2). \quad (3.8)$$

Согласно предположению

$$0 = \int_0^1 f(t) \psi_{m,1}(t) dt = \int_{C\Delta_m^{(i_m)}} f(t) \psi_{m,1}(t) dt. \quad (3.9)$$

Но отсюда, ввиду того, что $f(x) \equiv 0$, при $x \in C\Delta_{m-1}^{(i_{m-1})}$ и функция $\psi_{m,1}(x)$ на интервале $\Delta_{m-1}^{(i_{m-1})} - \Delta_m^{(i_m)}$ с точностью до постоянного множителя равна $[M(x)]^{-1}$, получаем

$$\int_{\Delta_{m-1}^{(i_{m-1})} - \Delta_m^{(i_m)}} f(t) [M(t)]^{-1} dt = 0. \quad (3.10)$$

Так как по предположению

$$\int_0^1 f(t) \psi_{m,k}(t) dt = 0 \quad (k=1, 2, \dots),$$

то согласно выбору системы $\{\psi_{m,k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ из условий (3.8) и (3.10), как и выше, получаем, что

$$f(x) \equiv 0, \text{ при } x \in \Delta_{m-1}^{(i_{m-1})} - \Delta_m^{(i_m)}.$$

Отсюда, согласно индукционному предположению, $f(x) \equiv 0$, при $x \in [0,1]$, что и требовалось доказать.

С помощью теоремы 6 доказывается следующая

Теорема 7. Пусть $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — система Хаара, N — произвольное натуральное число и $M(x) \in L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:

γ_1) Система $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является замкнутой минимальной системой в $L^p[0,1]$.

γ_2) Система $\{M(x)\chi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ является замкнутой минимальной системой в $L^p[0,1]$ и сопряженная ей система функций $\{\psi_n(x)\}_{n=N+1}^{\infty}$ полна относительно $L^p[0,1]$.

γ_3) Если (a_i, b_i) ($1 \leq i \leq N$) двоичные интервалы наибольшей длины, на которых все функции $\chi_i(x)$ ($1 \leq i \leq N$) постоянны, то на каждом отрезке $[a_i, b_i]$ существует одна и только одна точка x_i такая, что если x_i — двоично иррациональная точка, то функция $M(x)$ в этой точке имеет особенность степени q относительно отрезка $[a_i, b_i]$; если x_i — двоично рациональная точка, то функция $M(x)$ в этой точке имеет особенность степени q относительно одного и только одного из множеств (a_i, x_i) и (x_i, b_i) .

Доказательство. Импликации $\gamma_3) \Rightarrow \gamma_2)$ и $\gamma_3) \Rightarrow \gamma_1)$ непосредственно следуют из теоремы 6. Для доказательства теоремы нам остается только показать, что $\gamma_1) \Rightarrow \gamma_3)$.

Ввиду того, что для любого числа i ($1 \leq i \leq N$) подходящим образом выбирая коэффициенты a_k ($1 \leq k \leq N$), суммами вида $\sum_{k=1}^N a_k \chi_k(x)$ можно представить характеристическую функцию интервала (a_i, b_i) то согласно теореме 1°

$$[M(x)]^{-1} \notin L^q[(a_i, b_i)] \quad (1 \leq i \leq N).$$

Выполнение утверждений, касающихся точек, в которых функция $M(x)$ имеет особенность, следует из теоремы 6, если заметить, что система $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из N подсистем $\{\chi_{n,i}(x)\}_{n=2}^{\infty}$ ($1 \leq i \leq N$), где

$$\chi_{n,i}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b_i - a_i}} \chi_n\left(\frac{x - a_i}{b_i - a_i}\right), & \text{при } x \in (a_i, b_i) \\ 0 & , \text{ при } x \in (a_i, b_i). \end{cases} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Докажем аналог теоремы 7 для случая, когда из системы Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удаляется произвольный конечный набор функций $\{\chi_{k_i}(x)\}_{i=1}^N$.

Введем некоторые определения.

Через Δ_n^+ и Δ_n^- соответственно обозначим левую и правую половину интервала Δ_n , где Δ_n — носитель функций Хаара $\chi_n(x)$, $n \geq 2$. При $n = 1$ полагаем $\Delta_1^+ = \Delta_1^- = [0,1]$. Обозначим через $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_N}^+, \Delta_{k_N}^-)$, $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_N$, кольцо с мерой, порожденное отрезком $[0,1]$ и интервалами $\Delta_{k_i}^+, \Delta_{k_i}^-$ ($1 \leq i \leq N$), где мерой является мера Лебега.

Определение 3. Скажем, что совокупность атомов $\{L_i\}_{i=1}^N$ кольца $S(\Delta_{k_1}, \Delta_{k_1}^*, \dots, \Delta_{k_N}, \Delta_{k_N}^*), 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_N$ выбрана правильно, если $L_i \cap \Delta_{k_i} \neq \emptyset, 1 \leq i \leq N$, и для каждого натурального числа $j (1 \leq j \leq N)$ число отличных друг от друга атомов кольца $S(\Delta_{k_1}, \Delta_{k_1}^*, \dots, \Delta_{k_j}, \Delta_{k_j}^*)$, каждый из которых содержит хоть одно множество $L_i, 1 \leq i \leq j$, в точности равно j .

По индукции убедимся в том, что для любых N чисел $1 \leq n_1 < \dots < n_N$ в кольце $S(\Delta_{n_1}, \Delta_{n_1}^*, \dots, \Delta_{n_N}^*)$ можно правильно выбрать N различных атомов. Для $N=1$ это очевидно. Предположим, что для любых $N-1$ чисел $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{N-1}$ в кольце $S(\Delta_{n_1}, \Delta_{n_1}^*, \dots, \Delta_{n_{N-1}}^*)$ существует набор правильно выбранных атомов $\{E_i\}_{i=1}^{N-1}$. Для случая, когда даны N различных чисел $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_N$, если $\Delta_{n_N} \subset E_{j_0} (1 \leq j_0 \leq N-1)$, берем $L_j \equiv E_j (1 \leq j \leq N-1; j \neq j_0)$, $L_{j_0} \equiv \Delta_{n_N}^*$ и $L_N \equiv \Delta_{n_N}^*$. А если множество Δ_{n_N} не лежит ни в одном из множеств $E_j (1 \leq j \leq N-1)$, то полагаем $L_j \equiv E_j (1 \leq j \leq N-1)$ и $L_N \equiv \Delta_{n_N}^*$. Очевидно, что взятые указанным способом атомы $L_j (1 \leq j \leq N)$ кольца $S(\Delta_{n_1}, \Delta_{n_1}^*, \dots, \Delta_{n_N}, \Delta_{n_N}^*)$, выбраны правильно.

Заметим, что все атомы кольца $S(\Delta_{n_1}, \Delta_{n_1}^*, \dots, \Delta_{n_{N-1}}, \Delta_{n_{N-1}}^*)$ кроме одного содержащего Δ_{n_N} , являются атомами кольца $S(\Delta_{n_1}, \Delta_{n_1}^*, \dots, \Delta_{n_N}, \Delta_{n_N}^*)$, а атом, содержащий Δ_{n_N} „расщепляется“ на две (если совпадает с Δ_{n_N}) или на три части.

Лемма 1. Пусть $\{Z_n(x)\}_{n=1}^N$ — система Хаара. Пусть, далее, $\{Z_{k_j}(x)\}_{j=1}^N, 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_N$ — произвольный комплект функций Хаара и $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$ — некоторый набор атомов кольца $S(\Delta_{k_1}, \Delta_{k_1}^*, \dots, \Delta_{k_N}, \Delta_{k_N}^*)$. Тогда для того чтобы функции $\{Z_{k_j}(x)\}_{j=1}^N$ были линейно независимыми на объединении множеств $L_j^{(N)} (1 \leq j \leq m_N)$ необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее: в совокупности множеств $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$ найдется множество $L_{j_N}^{(N)} (1 \leq j_N \leq m_N)$, которое является правой или левой половиной интервала Δ_{k_N} . В совокупности всех тех различных атомов $\{L_j^{(N-1)}\}_{j=1}^{m_{(N-1)}}$ кольца $S(\Delta_{k_1}, \Delta_{k_1}^*, \dots, \Delta_{k_{(N-1)}}, \Delta_{k_{(N-1)}}^*)$ каждый из которых содержит хоть одно множество $L_j^{(N)} (j \neq j_N, 1 \leq j \leq m_N)$, найдется множество $L_{j_{(N-1)}}^{(N-1)}$, которое является левой или правой половиной $\Delta_{k_{(N-1)}}$ и т. д. На n -ом шаге ($1 \leq n \leq N-1$) в совокупности всех тех различных атомов $\{L_j^{(N-n)}\}_{j=1}^{m_{(N-n)}}$ кольца $S(\Delta_{k_1}, \Delta_{k_1}^*, \dots, \Delta_{k_{(N-n)}}, \Delta_{k_{(N-n)}}^*)$, каждый из которых содержит хоть одно множество $L_j^{(N-n+1)} (j \neq j_{N-n+1}; 1 \leq j \leq m_{N-n+1})$, найдется множество $L_{j_{(N-n)}}^{(N-n)}$, которое является левой или правой половиной $\Delta_{k_{(N-n)}}$.

Доказательство. Достаточность докажем по индукции. При $N=1$ она верна. Предполагая, что достаточность имеет место, когда из системы Хаара удален произвольный набор функций $\{\gamma_{k_j}(x)\}_{j=1}^{N-1}$ докажем, что она верна и для случая, когда удалены любые функции $\{\gamma_{k_j}(x)\}_{j=1}^N$. Когда

$$L_j^{(N)} \in S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_1}^*, \dots, \Delta_{k_{(N-1)}}^*, \Delta_{k_{(N-1)}}^*) \quad (j \neq j_N; 1 \leq j \leq m_N),$$

из условия

$$\sum_{j=1}^N a_j \gamma_{k_j}(x) = 0, \text{ при } x \in \bigcup_{j=1}^{m_N} L_j^{(N)}, \quad (3.11)$$

получаем, что

$$\sum_{j=1}^{N-1} a_j \gamma_{k_j}(x) = 0, \text{ при } x \in \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq j_N}}^{m_N} L_j^{(N)}.$$

Отсюда согласно индукционному предположению $a_1 = a_2 = \dots = a_{N-1} = 0$, следовательно и $a_N = 0$. Если же для некоторого i_0

$$L_{i_0}^{(N)} \in S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_1}^*, \dots, \Delta_{k_{(N-1)}}^*, \Delta_{k_{(N-1)}}^*) \quad (i_0 \neq j_N; 1 \leq i_0 \leq m_N), \quad (3.12)$$

то получаем, что

$$\Delta_{k_N} \subset L_{i_0} \quad (3.13)$$

где L_{i_0} есть атом кольца $S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_1}^*, \dots, \Delta_{k_{(N-1)}}^*, \Delta_{k_{(N-1)}}^*)$. Из условий (3.12) и (3.13) следует, что возможны следующие три случая

$$1) L_{i_0} = \Delta_{k_N}, \quad 2) L_{i_0} = \Delta_{k_N}^*, \quad 3) L_{i_0} = L_{i_0}' - \Delta_{k_N} \neq \emptyset.$$

В случае 1) или 2), ввиду того, что L_{j_N} является левой или правой половиной Δ_{k_N} , в совокупность атомов $\{L_j\}_{j=1}^{m_N}$ входят как $\Delta_{k_N}^*$, так и Δ_{k_N} . Отсюда, так как все функции $\gamma_{k_j}(x)$ ($1 \leq j \leq N-1$) принимают постоянные значения на Δ_{k_N} , из условия (3.11) получаем, что $a_N = 0$. Следовательно, согласно условию (3.11)

$$\sum_{j=1}^{N-1} a_j \gamma_{k_j}(x) = 0, \text{ при } x \in L_{i_0}', \quad (3.14)$$

а если учесть, что все множества из совокупности $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$ не пересекающиеся с множеством L_{i_0}' , не являются атомами и для кольца $S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_1}^*, \dots, \Delta_{k_{(N-1)}}^*)$, то получаем, что

$$\sum_{j=1}^{N-1} a_j \gamma_{k_j}(x) = 0, \text{ при } x \in \bigcup_{j=1}^{m_{(N-1)}} L_j^{(N-1)}, \quad (3.15)$$

откуда, согласно индукционному предположению, $a_1 = a_2 = \dots = a_{N-1} = 0$. Для случая 3) из (3.11) нетрудно заметить, что имеет место условие (3.14). Откуда, ввиду того, что $L_{iN}^{(N)}$ является левой или правой половиной Δ_{k_N} , следует, что $a_N = 0$, что опять приводит к соотношению (3.15).

Необходимость. Предположим, что из условия (3.11) следует $a_1 = a_2 = \dots = a_N = 0$. Ввиду того, что $\Delta_{k_N}^*$ и Δ_{k_N} являются атомами кольца $S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_1}, \dots, \Delta_{k_N}^*, \Delta_{k_N})$ из сделанного предположения вытекает, что в совокупности $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{mN}$ найдется множество $L_{jN}^{(N)}$, которое является левой или правой половиной интервала Δ_{k_N} . Пусть для натурального числа n ($1 \leq n \leq N-1$) интервалы $L_{ji}^{(i)}$ ($n+1 \leq i \leq N$; $1 \leq j_i \leq m_i$) соответственно являются левыми или правыми половинами интервалов Δ_{k_i} ($n+1 \leq i \leq N-1$), где в совокупность $\{L_{ji}^{(i)}\}_{j=1}^{m_i}$ входят все атомы кольца $S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_1}, \dots, \Delta_{k_i}^*, \Delta_{k_i})$, содержащие хоть одно такое множество из совокупности $\{L_{ji}^{(N)}\}_{j=1}^{mN}$, которое не лежит ни в одном из множеств $\{L_{jm}^{(m)}\}_{m=n+1}^N$. Покажем, что левая или правая половина интервала $\Delta_{k_{(N-n)}}$ содержится в совокупности $\{L_j^{(N-n)}\}_{j=1}^{m_{(N-n)}}$. Предположим, что $\Delta_{k_{(N-n)}} \cap L_j^{(N-n)} = \emptyset$ для всех $1 \leq j \leq m_{(N-n)}$. Среди множеств $\{L_{ji}^{(i)}\}_{i=N-n+1}^N$ выберем множество $L_{i_1}^{(i_1)}$ с наименьшим индексом i_1 , содержащееся в $\Delta_{k_{(N-n)}}$. После этого среди множеств $\{L_{ji}^{(i)}\}_{i=i_1+1}^N$ выбираем множество с наименьшим индексом, лежащем в $\Delta_{k_{(N-n)}} - L_{i_1}^{(i_1)}$ и т. д. После конечного числа шагов получим множества $L_{i_1}^{(i_1)}, L_{i_2}^{(i_2)}, \dots, L_{i_q}^{(i_q)}$, которые содержатся в $\Delta_{k_{(N-n)}} - L_{i_1}^{(i_1)}$ и вне объединения этих множеств в $\Delta_{k_{(N-n)}}$ нет какого-либо множества из совокупности $\{L_{ji}^{(N)}\}_{j=1}^{mN}$. Покажем, что функции Хаара $\gamma_{k_{(N-n)}}(x), \gamma_{k_{i_1}}(x), \gamma_{k_{i_2}}(x), \dots, \gamma_{k_{i_q}}(x)$ линейно зависимы на множестве $\bigcup_{p=1}^q L_{j_p}^{(i_p)}$. Действительно, в противном случае совокупность линейных комбинаций этих функций на множестве $\bigcup_{p=1}^q L_{j_p}^{(i_p)}$ образовала бы $(q+1)$ -мерное евклидово пространство, которое, ввиду того, что все функции $\gamma_{k_{(N-n)}}(x), \gamma_{k_{i_1}}(x), \dots, \gamma_{k_{i_q}}(x)$ принимают постоянные значения на каждом из множеств $L_{j_p}^{(i_p)}$ ($1 \leq p \leq q$), содержалось бы в q -мерном евклидовом пространстве линейных комбинаций характеристических функций множеств $L_{j_p}^{(i_p)}$ ($1 \leq p \leq q$). Значит существуют действительные числа $\{a_p\}_{p=1}^q$ такие, что

$$\gamma_{k_{(N-n)}}(x) + \sum_{p=1}^q a_p \gamma_{k_{i_p}}(x) = 0, \quad \text{при } x \in \bigcup_{p=1}^q L_{j_p}^{(i_p)}. \quad (3.16)$$

Ввиду того, что выражение (3.16) равно нулю, если $x \in C\Delta_{k(N-n)}$ и так как в множестве $\Delta_{k(N-n)} \bigcup_{p=1}^q L_{k_i p}$ не содержатся элементы из совокупности атомов $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{mN}$, получаем

$$\chi_{k(N-n)}(x) + \sum_{p=1}^q a_p \chi_{k_i p}(x) = 0, \quad \text{при } x \in \bigcup_{j=1}^{mN} L_j^{(mN)}.$$

Полученное соотношение противоречит условию леммы и поэтому приходим к заключению, что одна из половин интервала $\Delta_{k(N-n)}$ содержится в совокупности множеств $\{L_j^{(N-n)}\}_{j=1}^{m(N-n)}$.

Лемма 1 доказана.

С помощью этой леммы устанавливаются необходимые и достаточные условия на функцию $M(x)$, при выполнении которых система $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^n$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$, а сопряженная ей система функций полна. Полученная теорема одновременно указывает способ построения функций $M(x)$, для которых система $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^n$ является замкнутой и минимальной в $L^p[0,1]$. Эта теорема формулируется следующим образом.

Теорема 8. Пусть $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^n$ — система Хаара, $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^n$ — система, полученная из системы Хаара после удаления функций $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^N$, $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_N$, где N — некоторое натуральное число, и $M(x) \in L^p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

δ_1) Система $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^n$ является замкнутой минимальной системой в $L^p[0,1]$.

δ_2) Система $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^n$ является замкнутой минимальной системой в $L^p[0,1]$ и сопряженная ей система $\{\psi_{n_i}(x)\}_{i=1}^n$ полна в $L^p[0,1]$.

δ_3) Существуют атомы L_j ($1 \leq j \leq N$) кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_N}^+, \Delta_{k_N}^-)$ и для каждого L_j только одна точка x_j , $x_j \in \bar{L}_j$ ($1 \leq j \leq N$) такие, что:

А) Совокупность атомов $\{L_j\}_{j=1}^N$ выбрана правильно;

Б) Если точка x_j — двоично иррациональна, то функция $M(x)$ имеет особенность степени q относительно множества $[0,1]$; если точка x_j — двоично рациональна, то функция $M(x)$ имеет особенность степени q относительно одного и только одного из множеств $L_j \cap (0, x_j)$ и $(x_j, 1) \cap L_j$;

В) $\{M(x)\}^{-1} \in L^q \left[(0,1) - \bigcup_{j=1}^N L_j \right]$.

Доказательство. Сперва докажем импликацию $\delta_1) \Rightarrow \delta_3)$. Согласно теореме 1 из замкнутости системы $\{\chi_{\pi_i}(x)|_{i=1}^N$ следует, что функция $M(x)$ имеет особенности степени q относительно некоторых атомов $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$ кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_N}^+, \Delta_{k_N}^-)$. Причем, легко видеть, что на объединении этих атомов функции $\{\chi_{k_j}(x)|_{j=1}^N$ линейно независимы. Следовательно, атомы $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$ удовлетворяют условиям леммы 1 и согласно этой лемме в наборе $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$ найдется множество $L_{j(N)}^{(N)}$, являющееся левой или правой половиной интервала Δ_{k_N} . Пусть, далее, $\{L_j^{(N-n)}\}_{j=1}^{m_{(N-n)}}$ — все те атомы кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_{(N-n)}}^+, \Delta_{k_{(N-n)}}^-)$, каждый из которых содержит хотя одно множество из совокупности $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$, не лежащее ни в одном из множеств $\{L_{j_i}^{(i)}\}_{i=N-n+1}^N$. Тогда в совокупности $\{L_j^{(N-n)}\}_{j=1}^{m_{(N-n)}}$ найдется множество $L_{j(N-n)}^{(N-n)}$ ($1 \leq j_{(N-n)} \leq m_{(N-n)}$), являющееся левой или правой половиной интервала $\Delta_{(N-n)}$. Отсюда, очевидно следует, что $m_N \geq N$. Докажем, что число m_N в точности равно N .

Предполагая $m_N > N$, получаем, что существует натуральное число i_0 ($1 \leq i_0 \leq N$), для которого верно соотношение

$$m_{i_0} - m_{i_0-1} > 1, \quad (3.17)$$

где полагаем, что $m_0 = 0$. Пусть F — атом кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_{i_0-1}}^+, \Delta_{k_{i_0-1}}^-)$ содержащий множество $\Delta_{k_{i_0}}$. Нам известно, что $L_{j_{i_0}}^{(i_0)}$ является левой или правой половиной интервала $\Delta_{k_{i_0}}$. Если среди множеств $\{L_j^{(i_0)}\}_{j=1}^{m_{i_0}}$ кроме $L_{j_{i_0}}^{(i_0)}$ не было бы другого множества, лежащего в F , то ввиду того, что тогда атомы $L_j^{(i_0)}$ ($j \neq j_{i_0}; 1 \leq j \leq m_{i_0}$) кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_{i_0}}^+, \Delta_{k_{i_0}}^-)$ являлись бы атомами и для кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_{i_0-1}}^+, \Delta_{k_{i_0-1}}^-)$, получили бы $m_{i_0-1} = m_{i_0} - 1$, что противоречит условию (3.17).

Отсюда следует, что возможны следующие два случая: из совокупности $\{L_j^{(i_0)}\}_{j=1}^{m_{i_0}}$ во множестве F кроме $L_{j_{i_0}}^{(i_0)}$ лежит только одно множество, или — только два множества. Если бы из набора $\{L_j^{(i_0)}\}_{j=1, j \neq j_{i_0}}^{m_{i_0}}$ во множестве F лежало только одно множество, то остальные элементы этой совокупности являлись бы атомами кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_{i_0-1}}^+, \Delta_{k_{i_0-1}}^-)$ и так как множество F тоже входило бы в набор $\{L_j^{(i_0-1)}\}_{j=1}^{m_{i_0-1}}$, то опять получили бы противоречащее условию (3.17) условие — $m_{i_0-1} = m_{i_0} - 1$. Таким образом, множества $\Delta_{k_{i_0}}^+$, $\Delta_{k_{i_0}}^-$ и $F = \Delta_{k_{i_0}}$ входят в совокупность множеств $\{L_j^{(i_0)}\}_{j=1}^{m_{i_0}}$. Ввиду того, что каждое множество из совокупности $\{L_j^{(i_0)}\}_{j=1}^{m_{i_0}}$ содержит хотя одно множество из набора $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^{m_N}$, не лежащее ни в одном из множеств $\{L_{j_i}^{(i)}\}_{i=N-n+1}^N$, то получаем, что во множестве $F = \Delta_{k_{i_0}}$ лежит некоторый атом $L_{j_{i_0}}^{(N)}$ кольц

$S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_N}^+, \Delta_{k_N}^-)$ и $L_{j_0}^{(N)} \cap \bigcup_{l=k_0+1}^N L_{j_l}^{(l)} = \emptyset$. Согласно выбору атомов $L_{j_l}^{(N)}$ ($1 \leq j \leq m_N$) существует точка $x_{j_0} \in \bar{L}_{j_0}^{(N)}$, в которой функция $M(x)$ имеет особенность степени q относительно множества $L_{j_0}^{(N)}$. Очевидно, можно найти натуральное число N_0 такое, что $N_0 > k_N$, $x_{j_0} \in \Delta_{N_0}$ и функция $M(x)$ в точке x_{j_0} имеет особенность степени q относительно множества Δ_{N_0} .

Теперь рассмотрим кольцо $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_N}^+, \Delta_{k_N}^-, \Delta_{N_0}^+, \Delta_{N_0}^-)$ и возьмем все те атомы $\{F_{l_i}^{(N+1)}\}_{l=1}^{m'_{(N+1)}}$ этого кольца, относительно которых функция $M(x)$ имеет особенность степени q . Согласно выбору числа N_0 очевидно, что в совокупности $\{F_{l_i}^{(N+1)}\}_{l=1}^{m'_{(N+1)}}$ найдется множество $F_{l_{N+1}}^{(N+1)}$, которое является левой или правой половиной интервала Δ_{N_0} . Рассмотрим все те атомы $\{F_{l_i}^{(N)}\}_{l=1}^{m'_N}$ кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_N}^+, \Delta_{k_N}^-)$, каждый из которых содержит хоть одно множество $F_{l_i}^{(N+1)}$ ($l \neq l_{N+1}$; $1 \leq l \leq m'_{(N+1)}$). Ввиду того, что

$$L_{j_0}^{(N)} \cap \bigcup_{l=k_0+1}^{(N)} L_{j_l}^{(l)} = \emptyset \text{ и } F_{l_{N+1}}^{(N+1)} \subset L_{j_0}^{(N)},$$

существует некоторое натуральное число l_N ($1 \leq l_N \leq m'_N$) такое, что $L_{j_N}^{(N)} \equiv F_{l_N}^{(N)}$. Для натурального числа n ($i_0 \leq n \leq N-1$) рассмотрим все те атомы $\{F_{l_i}^{(n)}\}_{l=1}^{m'_n}$ кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_n}^+, \Delta_{k_n}^-)$, каждый из которых содержит по крайней мере одно множество из совокупности

$$\{F_{l_i}^{(n+1)}\}_{l=1, l \neq l_{n+1}}^{m'_{n+1}}, \text{ где } F_{l_{n+1}}^{(n+1)} \equiv L_{j_{n+1}}^{(n+1)}. \text{ Набор } \{F_{l_i}^{(n)}\}_{l=1}^{m'_n}$$

состоит из всех тех атомов кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_n}^+, \Delta_{k_n}^-)$, пересечение которых с множеством $\bigcup_{l=n+1}^{N+1} F_{l_i}^{(l)}$ пусто и каждый из которых содержит хоть одно множество из совокупности $\{F_{l_i}^{(N+1)}\}_{l=1}^{m'_{(N+1)}}$. Отсюда, ввиду того, что

$$L_{j_n}^{(n)} \cap \bigcup_{l=n+1}^N L_{j_l}^{(l)} = \emptyset; L_{j_n}^{(n)} \cap \Delta_{N_0} = \emptyset \text{ и } F_{l_i}^{(l)} \equiv L_{j_i}^{(l)} \text{ (} n+1 \leq i \leq N \text{)}$$

получаем, что для некоторого натурального числа l_n ($1 \leq l_n \leq m'_n$) $F_{l_n}^{(n)} \equiv L_{j_n}^{(n)}$.

Покажем, что совокупности атомов $\{L_{j_l}^{(l-1)}\}_{l=1}^{m_{(l-1)}}$ и $\{F_{l_i}^{(l-1)}\}_{l=1}^{m'_{(l-1)}}$ кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_{(l_0-1)}}^+, \Delta_{k_{(l_0-1)}}^-)$ совпадают. Для этого заметим во-первых, что, согласно построению, если некоторый атом кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_{(l_0-1)}}^+, \Delta_{k_{(l_0-1)}}^-)$, входит в совокупность $\{F_{l_i}^{(l-1)}\}_{l=1}^{m'_{(l-1)}}$, то этот атом входит также и в совокупность множеств $\{L_{j_l}^{(l-1)}\}_{l=1}^{m_{(l-1)}}$.

Из построения и из того, что $\Delta_{k_{i_0}} = L_{j_{i_0}}^{(i_0)} \subset \{L_j^{(i_0)}\}_{j=1}^{m_{i_0}}$ имеем также, что атом $\Delta_{k_{i_0}} = L_{j_{i_0}}^{(i_0)}$ кольца $S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_2}^*, \dots, \Delta_{k_{i_0}}^*, \Delta_{k_{i_0}}^*)$ находится как в совокупности $\{L_j^{(i_0)}\}_{j=1}^{m_{i_0}}$, так и в совокупности множеств $\{F_l^{(i_0)}\}_{l=1}^{m'_{i_0}}$. Отсюда, так как все атомы кольца $S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_2}^*, \dots, \Delta_{k_{i_0}}^*, \Delta_{k_{i_0}}^*)$, которые входят в совокупность множеств $\{L_j^{(i_0)}\}_{j=1}^{m_{i_0}}$ и не пересекаются с множеством $F_{j_{i_0}}$, находятся в наборе $\{F_l^{(i_0)}\}_{l=1}^{m'_{i_0}}$ и являются атомами кольца $S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_2}^*, \dots, \Delta_{k_{(i_0-1)}}^*, \Delta_{k_{(i_0-1)}}^*)$ получаем, что совокупности множеств $\{L_j^{(i_0-1)}\}_{j=1}^{m_{(i_0-1)}}$ и $\{F_l^{(i_0-1)}\}_{l=1}^{m'_{(i_0-1)}}$ совпадают. Следовательно, процесс, описанный в лемме 1, проходит для атомов $\{F_l^{(N+1)}\}_{l=1}^{m'_{(N+1)}}$ кольца $S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_2}^*, \dots, \Delta_{k_N}^*, \Delta_{k_N}^*, \Delta_{k_N}^*, \Delta_{k_N}^*)$ и значит функции $\gamma_{k_1}(x), \gamma_{k_2}(x), \dots, \gamma_{k_N}(x), \gamma_{k_{N_0}}(x)$ линейно независимы на множестве $\bigcup_{l=1}^{m'_{N+1}} F_l^{(N+1)}$.

С другой стороны, так как система $\{M(x) \gamma_{n_l}(x)\}_{l=1}^N$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$, то функция $\gamma_{N_0}(x)$ должна удовлетворять условию 2) теоремы 1. Но это противоречит линейной независимости функций $\gamma_{k_1}(x), \dots, \gamma_{k_N}(x), \gamma_{N_0}(x)$ на множестве $\bigcup_{l=1}^{N+1} F_l^{(N+1)}$, если заметить, что $\{M(x)\}^{-1} \in L^q[F_l^{(N+1)}]$ ($1 \leq l \leq m'_{N+1}$). Предположение, что $m_N > N$ привело к противоречию, следовательно $m_N = N$.

Перенумеруем атомы $\{L_j^{(N)}\}_{j=1}^N$ кольца $S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_2}^*, \dots, \Delta_{k_N}^*, \Delta_{k_N}^*)$ таким образом, чтобы вновь полученная совокупность $\{L_{i_k}^{(N)}\}_{k=1}^N$ для любого натурального числа k ($1 \leq k \leq N$) удовлетворяла условию

$$L_{i_k}^{(N)} \subset L_{j_k}^{(k)} = \bigcup_{l=k+1}^N L_{j_l}^{(l)}.$$

Легко видеть, что совокупность атомов $\{L_k\}_{k=1}^N$ кольца $S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_2}^*, \dots, \Delta_{k_N}^*, \Delta_{k_N}^*)$, где $L_k = L_{i_k}^{(N)}$, составляет правильный выбор. Остается показать, что в замыкании каждого множества L_j ($1 \leq j \leq N$) есть только одна точка x_j , в которой функция $M(x)$ имеет особенность степени q относительно множества L_j . Допустим, что функция $M(x)$ в двух различных точках x_{j_0} и x_{j_0}' имеет особенность степени q относительно некоторого атома L_{j_0} .

Легко видеть, что существует функция $\gamma_r(x)$ такая, что точки x_{j_0} и x_{j_0}' находятся в замыканиях различных половин интервала Δ_r и $M(x)$ в точках x_{j_0} и x_{j_0}' имеет особенность степени q относительно соответствующей половины. Для этого нужно взять интервал Хаара наименьшей длины, содержащий атом L_{j_0} и последовательным делением на две равные части отобразить первый интервал Хаара, для которого функция $M(x)$ имеет особенности в точках x_{j_0} и x_{j_0}' относительно его

различных половин. Покажем, что функции $\chi_{k_1}(x), \dots, \chi_{k_N}(x), \chi_r(x)$ линейно независимы на множестве $\bigcup_{j \neq j_0} L_j \cup (L_{j_0} \cap \Delta_r)$. Действительно, если бы

$$\sum_{j=1}^N a_j \chi_{k_j}(x) + a_{N+1} \chi_r(x) = 0, \text{ при } x \in \bigcup_{j \neq j_0} L_j \cup (L_{j_0} \cap \Delta_r),$$

то, ввиду того, что оба множества $L_{j_0} \cap \Delta_r^+$ и $L_{j_0} \cap \Delta_r^-$ не пусты и функции $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^N$ принимают постоянные значения на множестве L_{j_0} , получаем $a_{N+1} = 0$. Откуда, так как функции $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^N$ линейно независимы на множестве $\bigcup_{j=1}^N L_j$, получаем $a_1 = a_2 = \dots = a_N = 0$. Согласно выбору функции $\chi_r(x)$ имеем, что если функция

$$\left| \chi_r(x) + \sum_{j=1}^N a_j^{(r)} \chi_{k_j}(x) \right| [M(x)]^{-1} \in L^q[0,1],$$

то выражение $\left| \chi_r(x) + \sum_{j=1}^N a_j^{(r)} \chi_{k_j}(x) \right|$ равно нулю на множестве

$\bigcup_{j \neq j_0} L_j \cup (L_{j_0} \cap \Delta_r)$, что противоречит линейной независимости функций

$\chi_{k_1}(x), \dots, \chi_{k_N}(x), \chi_r(x)$ на множестве $\bigcup_{j \neq j_0} L_j \cup (L_{j_0} \cap \Delta_r)$. Следовательно,

но, в замыкании каждого множества L_j ($1 \leq j \leq N$) есть только одна точка x_j , в которой функция $M(x)$ имеет особенность. Для завершения доказательства импликации $\delta_1) \Rightarrow \delta_3)$ остается проверить выполнение второй части условия Б) (выполнение первой части — когда x_j двоично иррациональна, очевидно). Допустим, что точка x_j двоично рациональна и $M(x)$ имеет особенности относительно обоих множеств $(0, x_j) \cap L_j$ и $(x_j, 1) \cap L_j$. Взяв функцию $\chi_{r_1}(x)$, для которой точка x_j является центром интервала Δ_{r_1} , подобными рассуждениями, что и выше, приходим к противоречию.

Импликация $\delta_1) \Rightarrow \delta_3)$ доказана.

Перейдем к доказательству импликации $\delta_3) \Rightarrow \delta_1)$. Ввиду того, что атомы $\{L_j\}_{j=1}^N$ кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_N}^+, \Delta_{k_N}^-)$ выбраны правильно, согласно лемме 1, функции $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^N$ будут линейно независимыми на множестве $\bigcup_{j=1}^N L_j$. Отсюда немедленно следует, что функция $M(x)$

удовлетворяет условию 1) теоремы 1°. Для проверки выполнения условия 2) теоремы 1° сперва покажем, что для любого натурального числа r , отличного от всех k_j ($1 \leq j \leq N$) и для произвольных $F_j \subset \subset L_j$ ($1 \leq j \leq N$), где множества F_j — атомы кольца $S(\Delta_{k_1}^+, \Delta_{k_1}^-, \dots, \Delta_{k_N}^+, \Delta_{k_N}^-, \Delta_r^+, \Delta_r^-)$, существуют действительные числа c_j ($1 \leq j \leq N$)

такие, что

$$\sum_{j=1}^N c_j \chi_{k_j}(x) + \chi_r(x) = 0, \text{ при } x \in \bigcup_{j=1}^N F_j = F. \quad (3.18)$$

Предположим, что функции $\chi_r(x), \chi_{k_1}(x), \dots, \chi_{k_N}(x)$ линейно независимы на множестве F , тогда линейные комбинации этих функций на F образуют $(N+1)$ -мерное евклидово пространство. Но, так как все рассмотренные функции постоянны на множествах F_j ($1 \leq j \leq N$), то это пространство содержится в N -мерном евклидовом пространстве линейных комбинаций характеристических функций множеств F_j ($1 \leq j \leq N$). Откуда приходим к противоречию. Значит существуют числа $\{a_j\}_{j=1}^{N+1}$ (не все a_j равны нулю), для которых

$$\sum_{j=1}^{N+1} a_j \chi_{k_j}(x) + a_{N+1} \chi_r(x) = 0, \text{ при } x \in F.$$

Так как $F_j \subset L_j$ ($1 \leq j \leq N$) и функции $\{\chi_{k_j}(x)\}_{j=1}^N$ линейно независимы на множестве $\bigcup_{j=1}^N L_j$, то получаем, что $a_{N+1} \neq 0$, откуда приходим к соотношению (3.18).

Для любого натурального числа r ($r \neq k_j; 1 \leq j \leq N$) рассмотрим все атомы F_j кольца $S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_1}, \dots, \Delta_{k_N}^*, \Delta_{k_N}, \Delta_r^*, \Delta_r)$, относительно которых функция $M(x)$ имеет особенности. Очевидно, что количество этих атомов равно N и $F_j \subset L_j$ ($1 \leq j \leq N$). Тогда из равенства (3.18) будет следовать выполнение условия 2) теоремы 1°.

Для завершения доказательства теоремы нам остается показать, что если система $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$, то сопряженная ей система функций $\{\psi_{n_i}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ полна в $L^p[0,1]$.

Предположим, что для некоторой функции $f(x) \in L^p[0,1]$

$$\int_0^1 f(x) \psi_{n_i}(x) dx = 0 \quad (i=1, 2, \dots). \quad (3.19)$$

Из эквивалентности условий $\delta_1)$ и $\delta_2)$ следует существование атомов L_j ($1 \leq j \leq N$) кольца $S(\Delta_{k_1}^*, \Delta_{k_1}, \dots, \Delta_{k_N}^*, \Delta_{k_N})$ и единственных точек $x_j \in \bar{L}_j$ ($1 \leq j \leq N$), для которых выполняются условия А), Б) и В). Пусть $\{\Gamma_i\}_{i=1}^{2^{m+1}}$ — все интервалы Хаара, длина которых равна $1/2^{m+1} = 1/2 |\Delta_{k_N}|$. Выберем из них те интервалы Γ_i ($1 \leq j \leq N$), для которых $x_j \in \bar{\Gamma}_i$ и функция $M(x)$ в точке x_j имеет особенность относительно множества Γ_i . Согласно условию 2) теоремы 1° имеем

$$\psi_{n_i}(x) = [M(x)]^{-1} \left[\sum_{j=1}^N a_j^{(n_i)} \chi_{k_j}(x) = \chi_{n_i}(x) \right]; \quad (3.20)$$

Так как функции

$$\left| \sum_{j=1}^N a_j^{(n_i)} \chi_{k_j}(x) + \chi_{n_i}(x) \right|, \text{ при } n_i \leq 2^{m+1}, \quad (3.21)$$

линейно независимы на отрезке $[0,1]$, тождественно равны нулю на множестве $\Gamma = [0,1] - \bigcup_{j=1}^N \Gamma_{i_j}$ и принимают постоянные значения на каждом множестве Γ_i ($1 \leq i \leq 2^{m+1}$), то получаем, что линейные комбинации этих функций образуют $(2^{m+1} - N)$ -мерное евклидово пространство характеристических функций Γ_i ($i \neq i_j; 1 \leq j \leq N$), то эти пространства совпадают. Откуда будем иметь, что характеристическая функция любого множества Γ_i ($i \neq i_j; 1 \leq j \leq N$) равна линейной комбинации функций (3.21). Следовательно, отсюда и из условий (3.19) и (3.20) получаем

$$\int_{\Gamma_i} f(t) [M(t)]^{-1} dt = 0 \quad (i \neq i_j; 1 \leq j \leq N). \quad (3.22)$$

Ввиду того, что функция $M(x)$ не имеет особенностей во множестве Γ , то из условия (3.20) получаем, что если носитель Δ_{n_i} некоторой функции Хаара $\chi_{n_i}(x)$ лежит в Γ_i ($i \neq i_j; 1 \leq j \leq N$), то

$$\psi_{n_i}(x) = [M(x)]^{-1} \chi_{n_i}(x) \in L^q[0,1].$$

Отсюда и из условия (3.19) следует, что для любой функции Хаара $\chi_{n_i}(x)$, носитель которой лежит во множестве Γ_i ($i \neq i_j; 1 \leq j \leq N$)

$$\int_{\Gamma_i} f(t) [M(t)]^{-1} \chi_{n_i}(t) dt = 0. \quad (3.23)$$

Из (3.22) и (3.23) получаем, что $f(x) [M(x)]^{-1} = 0$, при $x \in \Gamma$, следовательно

$$f(x) = 0, \text{ при } x \in \Gamma. \quad (3.24)$$

Обозначим через $\{\chi_{j_i}(x)\}_{i=1}^N$ все функции Хаара, носители которых лежат в Γ_{i_j} ($1 \leq j \leq N$). Из равенств (3.20) и из того, что $\psi_{n_i}(x) \in L^q[0,1]$ ($i=1, 2, \dots$) будем иметь, что все функции $\psi_{j_i}(x)$ ($i=1, 2, \dots$) равны нулю на множестве $\Gamma - \Gamma_{i_j}$. Следовательно, отсюда и из условий (3.24) и (3.19) получаем, что

$$\int_{\Gamma_{i_j}} f(t) \psi_{j_i}(t) dt = 0 \quad (1 \leq j \leq N). \quad (3.25)$$

Полагая

$$\varphi_{j_i}(x) = \begin{cases} \psi_{j_i}(x), & \text{при } x \in \Gamma_{i_j} \\ 0, & \text{при } x \in [0,1] - \Gamma_{i_j} \end{cases} \quad (3.26)$$

получим, что система $\{\varphi_{j_i}(x)\}_{i=1}^N$ биортогональна к системе $\{M(x) \chi_{j_i}(x)\}_{i=1}^N$. Транспонируем функции $M(x) \chi_{j_i}(x)$ и $\varphi_{j_i}(x)$ ($i=1, 2, \dots$)

заменой линейного переменного с интервала $\Gamma_{i_j} = (a_j, b_j)$ на интервал $(0,1)$. Очевидно, что функция

$$M_j(x) = M[(b_j - a_j)x + a_j], \quad x \in [0,1]$$

в точке

$$y_j = \frac{x_j - a_j}{b_j - a_j}$$

удовлетворяет условию $\gamma_3)$ теоремы 6, откуда получим, что система, полученная транспонированием системы функций $\{\varphi_{i_j}(x)\}_{i=1}^N$ с интервала Γ_{i_j} на $(0,1)$ полна в $L^p[0,1]$. Отсюда и из условий (3.25) и (3.26) следует

$$f(x) = 0, \quad \text{при } x \in \Gamma_{i_j}, \quad (1 \leq j \leq N). \quad (3.27)$$

Из (3.27) и (3.29) получаем, что $f(x) \equiv 0$, при $x \in [0,1]$. Теорема 8 полностью доказана.

Напомним определение системы Уолша-Пэли. Положим $W_0(x) \equiv 1$; если

$$n = \sum_{l=1}^q 2^{m_l}, \quad m_q = [\log_2 n]. \quad (3.28)$$

Положим

$$W_n(x) = \prod_{l=1}^q r_{m_l}(n). \quad (3.29)$$

где $r_m(x)$ — функции Радемахера:

$$r_m(x) = \text{sign}(\sin 2^{m+1} \pi x), \quad m = 0, 1, \dots$$

Имеет место следующая

Теорема 9. Пусть $\{W_n(x)\}_{n=0}^\infty$ — система Уолша-Пэли и N — некоторое натуральное число, где

$$N = \sum_{l=1}^m 2^{N_l}, \quad N_m = [\log_2 N], \quad (3.30)$$

есть двоичное разложение числа N . Пусть, далее, функция

$$M(x) \in L^p[0,1], \quad 1 \leq p < \infty.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

$\varepsilon_1)$ Система $\{M(x)W_n(x)\}_{n=N}^\infty$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$.

$\varepsilon_2)$ Система $\{M(x)W_n(x)\}_{n=N}^\infty$ замкнута минимальна в $L^p[0,1]$ и сопряженная ей система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=N}^\infty$ полна относительно $L^p[0,1]$.

$\varepsilon_3)$ Существуют атомы L_j ($1 \leq j \leq N$) кольца

$$S(\Delta_{2^{N_1+1}}^*, \Delta_{2^{N_2+1}}^*, \dots, \Delta_{2^{N_{m-1}+1}}^*, \Delta_{2^{N_m+1}}^*, \Delta_{2^{N_{m+1}+1}}^*, \dots, \Delta_{2^{N_{l+1}+1}}^*),$$

$$(\Delta_2^{N_{i+1}}, \dots, \Delta_2^{N_{m+1}})$$

и для каждого L_i только одна точка $x_j, x_j \in \bar{L}_i (1 \leq j \leq N)$ такие, что выполняются условия А), Б) и В) теоремы 8.

Доказательство. Согласно теореме 8 условие ε_3) эквивалентно тому, что система $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^m$, где $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^m$ — система, полученная из системы Хаара удалением из нее всех функций $\chi_{N_i}^{(k)}(x) (1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq 2^{N_i})$, была замкнутой минимальной системой в $L^p[0,1]$. Следовательно, для доказательства эквивалентности условий ε_1) и ε_3), нам нужно показать, что из замкнутости и минимальности системы $\{M(x) \mathcal{W}_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ в $L^p[0,1]$ следует замкнутость и минимальность в $L^p[0,1]$ системы $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^m$ и наоборот. Сначала предположим, что система $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^m$ замкнута и минимальна в $L^p[0,1]$. Согласно теореме 1° для доказательства замкнутости и минимальности в $L^p[0,1]$ системы $\{M(x) \mathcal{W}_n(x)\}_{n=N}^{\infty}$ нужно показать, во-первых, что если некоторая функция

$$\left[\sum_{i=0}^{N-1} b_i \mathcal{W}_i(x) \right] [M(x)]^{-1} \in L^q[0,1], \quad (3.31)$$

то $b_0 = b_1 = \dots = b_{N-1} = 0$, а во-вторых — что для любого натурального числа $r (r \geq N)$ существуют действительные числа $b_i^{(r)} (0 \leq i \leq N-1)$, для которых функция

$$\varphi_r(x) = \left[\mathcal{W}_r(x) + \sum_{i=0}^{N-1} b_i^{(r)} \mathcal{W}_i(x) \right] [M(x)]^{-1} \in L^q[0,1]. \quad (3.32)$$

Очевидно, из условий (3.31) следует, что

$$\left[\sum_{i=0}^{N-1} b_i \mathcal{W}_i(x) \right] \mathcal{W}_N(x) [M(x)]^{-1} \in L^q[0,1]. \quad (3.33)$$

Если число N определяется равенством (3.30), то умножая первые функции системы Уолша-Пэли $\mathcal{W}_0(x), \mathcal{W}_1(x), \dots, \mathcal{W}_{N-1}(x)$ на функцию $\mathcal{W}_N(x)$, получаем все функции Уолша $\mathcal{W}_n(x)$, номера которых находятся между числами 2^{N_i} и $2^{N_i+1} - 1 (2^{N_i} \leq n \leq 2^{N_i+1} - 1; 1 \leq i \leq m)$, т. е. получим целые „пачки“ системы Уолша (см. [9], стр. 295)*.

Отсюда следует, что функция

$$\left[\sum_{i=0}^{N-1} b_i \mathcal{W}_i(x) \right] \mathcal{W}_N(x)$$

выражается некоторой линейной комбинацией $\chi_{N_i}^{(k)}(x) (1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq 2^{N_i})$. Следовательно, из (3.33) и из замкнутости системы

* Этот факт имеет место и для системы в нумерации Уолша, в этом можно убедиться простой индукцией.

$\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^m$ согласно теореме 1^о получаем, что $b_0 = b_1 = \dots = b_{N-1} = 0$. Сейчас проверим выполнение условия (3.32). Действительно, (3.32) эквивалентно тому, что

$$[M(x)]^{-1} \cdot \left[W_r(x) + \sum_{i=1}^{N-1} b_i^{(r)} W_i(x) \right] \cdot W_N(x) \in L^q[0,1]. \quad (3.34)$$

Ввиду того, что функции Уолша $W_r(x) \cdot W_N(x)$ ($r \geq N$) не находятся ни в одной из „пачек“ с номерами N_i ($1 \leq i \leq m$) и выражаются через конечные линейные комбинации некоторых функций из системы $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^m$, то из минимальности системы $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^m$ согласно теореме 1^о вытекает (3.34). Таким образом, импликация $\varepsilon_3) \Rightarrow \varepsilon_1)$ доказана. Импликация $\varepsilon_1) \Rightarrow \varepsilon_2)$ доказывается аналогичными рассуждениями.

Проверим импликацию $\varepsilon_1) \Rightarrow \varepsilon_2)$. Если для некоторой функции $f(x) \in L^p[0,1]$

$$\int_0^1 f(t) \varphi_n(t) dt = 0 \quad (n = N, N+1, \dots),$$

то ввиду того, что функции $\varphi_n(x)$ ($n \geq N$) определяются равенствами (3.32), будем иметь

$$\int_0^1 f(t) W_N(t) \psi_{n_i}(t) dt = 0,$$

где $\{\psi_{n_i}(t)\}_{i=1}^m$ — сопряженная к системе $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^m$ система функций. Откуда согласно теореме 8 следует, что $f(x) \equiv 0$. Теорема 9 доказана.

В заключение выражаю благодарность член-корреспонденту АН Армянской ССР А. А. Талалаю, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 15.IV.1978

Վ. Ու. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Որոշ սխտեմների մուլտիպլիկատիվ լրացման մասին (ամփոփում)

§ 1-ում L^p , $1 < p < \infty$, տարածություններում փակ միևիմայ սխտեմների համար գտնված են բավարար պայմաններ որպեսզի տրված սխտեմից կամայական վերջավոր քանակով ֆունկցիաներ հնուացնելուց հետո մնացած ֆունկցիաների սխտեմը, որն է ֆունկցիայի վրա բազմապատկելով, նարավոր չլինի դարձնել L^p -ի բազիս:

§ 2-ում ցույց է տրվում, որ ստացված թեորեմները հայտնի իմաստով վերջնական են:

§ 3-ում գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ $M(x)$ ֆունկցիայի վրա, որպեսզի Հաարի սխտեմից կամայական վերջավոր թվով ֆունկցիաներ դուրս գցելուց հետո մնացած $\{\chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^m$ սխտեմը $M(x)$ -ի վրա բազմապատկելու միջոցով նարավոր լինի դարձնել $L^p[0,1]$ -ում ($1 < p < \infty$) փակ միևիմայ սխտեմ:

Ապացուցվում է նաև, որ եթե $\{M(x) \chi_{n_i}(x)\}_{i=1}^m$ սխտեմը փակ միևիմայ է $L^p[0,1]$ -ում, ապա նրա համալուծ սխտեմը լրիվ է $L^p[0,1]$ -ում: Նույնատիպ արդյունքներ ստացվում են նաև Ուոլշի սխտեմի համար:

Gh. S. GHAZARIAN. *On the multiplicative completion of some systems*
(summary)

In the § 1 of the paper sufficient conditions are stated for the "closed" minimal in L^p , $1 < p < \infty$, systems to have the following property: it is impossible to obtain a basis in L^p , $1 < p < \infty$, by taking the given system minus a finite number of elements and multiplying this by a measurable function.

In § 2 we show that the theorems proved in the 1 are in a sense final.

In the § 3 necessary and sufficient conditions on a function M for the $\{M x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ system to be closed and minimal in L^p , $1 < p < \infty$, are stated where $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ is a system $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ obtained from the Haar system $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ by deleting from it of any finite number of functions.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. P. Boas, H. Pollard. The multiplicative completion of sets of function, Bull. Amer. Soc., 54, 1948, 518—522.
2. J. J. Price, R. E. Zink. On sets of functions that can be multiplicatively completed, Ann. of Math., (2), 82, 1965, 139—145.
3. А. А. Талалаян. Представление измеримых функций рядами, УМН, 15, № 5, 1960, 77—141.
4. А. А. Талалаян. О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-матем. наук, 10, № 3, 1957, 17—34.
5. Ben-Ami Braun. On the multiplicative completion of certain basic sequences in L^p , $1 < p < \infty$, Trans. Amer. Math. Soc., 176, 1975.
6. К. С. Казарян. О мультипликативном дополнении базисных последовательностей до базисов в L_p , $1 < p < \infty$, ДАН Арм.ССР, LXII, № 4, 1976, 203—209.
7. К. С. Казарян. О мультипликативном дополнении некоторых неполных ортонормированных систем до базисов в L^p , $1 < p < \infty$, Analysis Math., 4, № 1, 1978.
8. А. М. Олевский. Об одной ортонормированной системе и ее приложениях, Мат. сборник, 78 (113), № 3, 297—336.
9. R. Paley. A remarkable system of orthogonal functions, Proc. London Math. Soc., 34, 1932, 241—279.
10. К. С. Казарян. О базисах в L^p , $p > 1$, полученных умножением минимальных систем на функцию из L^p , ДАН Арм.ССР, LXIV, № 3, 1977, 151—155.