ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 4 1978 Математика

Л. В. БАХШЕЦЯН

О СТРУКТУРЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЦЕНТРИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Данная работа посвящена изучению свойств некоторых центрированных систем (определение см. ниже). Она состоит из двух частей. В 1° рассматриваются центрированные системы, состоящие из непрерывных функций. Во второй части, основываясь на одной теореме Ганди ([1]), устанавливается связь полных центрированных систем с классической системой Хаара.

1°. Пусть $\Phi = \{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — система действительных функций, определенных на E. Через $\mathbf{F}_n(\Phi)$ обозначим минимальную σ-алгебру, содержащую множества $\{x \in E: \Phi_k(x) < \alpha\}$ $(\alpha \in R,\ k=0, 1, \cdots, n)$ (т. е. $\mathbf{F}_n(\Phi)$ — минимальная σ-алгебра, по которой измеримы функции Φ_k $k=0, 1, \cdots, n$).

Для дальнейшего нам понадобится следующее простое

Замечание. *Если для некоторых двух точек x_1 и x_2 $(x_1 \neq x_2)$,*

$$\Phi_k(x_1) = \Phi_k(x_2),\ k=0, 1, \cdots, n,$$

то любое $\Lambda \in \mathbf{F}_n(\Phi)$ либо содержит одновременно обе точки x_1, x_2, либо не содержит ни одну из них.

Действительно, рассмотрим σ-алгебру $\mathbf{F}$ всех подмножеств E одновременно содержащих или не содержащих точки x_1 и x_2. Очевидно функции Φ_k $(k=0, 1, \cdots, n)$ измеримы по $\mathbf{F}$. Следовательно, $\mathbf{F}_n(\Phi) \subset \mathbf{F}$, что доказывает наше утверждение.

Определение. Система $\Phi = \{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *центрированной*, если для любого n и $\Lambda \in \mathbf{F}_n(\Phi)$

$$\int_{\Lambda} \Phi_{n+1}(x)\, dx = 0.$$

Введем некоторые вспомогательные обозначения. Пусть f определена на $[0,1]$ и $\Delta = [\alpha, \beta) \subset [0,1]$. Обозначим

$$f^+(x; \Delta) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right) & \text{при } x \in \Delta \\ 0 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \Delta, \end{cases} \qquad f^-(x; \Delta) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x-\beta}{\alpha-\beta}\right) & \text{при } x \in \Delta \\ 0 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \Delta, \end{cases}$$

$$\widehat{f}(x; \Delta) = |\Delta|\,[f^+(x; \Delta_1) + f^-(x; \Delta_2) - f^+(x; \Delta_3) - f^-(x; \Delta_4)],$$

где

$$\Delta_i = \left[\alpha + \frac{i-1}{4}|\Delta|,\ \alpha + \frac{i}{4}|\Delta|\right),\ i=1, 2, 3, 4.$$

Следует заметить, что если $f \in C([0,1])$ и $f(0)=0$, то $\hat{f}(x;\ \Delta)$ непрерывна на $[0,1]$, причем для любого $0 < x < \frac{|\Delta|}{2}$ имеем

$$\hat{f}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - x;\ \Delta\right) = -\hat{f}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + x;\ \Delta\right). \tag{1}$$

Предложение 1. *Существует центрированная система $\Phi = \{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$, состоящая из почти всюду отличных от нуля непрерывных функций.*

Пусть P_0 — канторово совершенное множество меры нуль. Обозначим через Θ непрерывную на $[0,1]$ функцию со следующими свойствами (определения см. в [2], стр. 50, 200):

1. $\Theta(0) = 0,\ \Theta(1) = 1,\ 0 < \Theta(x) < 1$ при $x \in (0,1)$, (2)

2. $\Theta(x)$ постоянна на дополнительных интервалах множества P_0.

Определим систему Φ индуктивно. $\Phi_0(x) = \Theta(x)$. Пусть $\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_n$ уже определены и $\Delta_i^{(n)}$ — интервалы постоянства функции Φ_n. Определим Φ_{n+1} равенством

$$\Phi_{n+1}(x) = \sum_i \hat{\Theta}(x;\ \Delta_i^{(n)}). \tag{3}$$

Так как в силу (2) $\|\hat{\Theta}(x;\ \Delta_i^{(n)})\|_C = |\Delta_i^{(n)}|$, то ряд (3) сходится абсолютно и равномерно. Следовательно, Φ_{n+1} непрерывна. Легко видеть, что любое Λ из $\mathbf{F}_n(\Phi)$ можно с точностью до множества меры нуль представить в виде суммы интервалов $\Delta_i^{(n)}$. Но в силу (1)

$$\int_{\Delta_i^{(n)}} \hat{\Theta}(x;\ \Delta_i^{(n)})\ dx = 0. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем

$$\int_{\Lambda} \Phi_{n+1}(x)\, dx = 0 \text{ для любого } \Lambda \in \mathbf{F}_n(\Phi).$$

В классе функций ограниченной вариации этот пример в некотором роде единственный. А именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $\Phi = \{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — центрированная система непрерывных на $[0,1]$ функций и $\Phi_n(x) \neq 0$ почти всюду $(n = 1, 2, \cdots)$. Если Φ_1 имеет конечное изменение, то существует множество $E \subset [0,1]$, $|E| = 1$ такое, что $|\Phi_1(E)| = 0$.*

Для доказательства нам понадобится

Теорема Реньи (см. [3]). *Пусть конечная или счетная система $\{f_i\}$ ограниченных функций максимальна на E, т. е. существует множество Z меры нуль такое, что если x_1 и x_2 принадлежат $E \setminus Z$ и $f_n(x_1) = f_n(x_2)$ для любого n, то $x_1 = x_2$. Тогда система произведений*

$$\{f_1^{m_1}\cdot f_2^{m_2},\cdots f_n^{m_n}\}\ (m_k=0,1,\cdots;\ k=1,2,\cdots;\ n=1,2,\cdots)$$

полна в $L^2(E)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $N(y)$ индикатриса Банаха функции Φ_1 (определение см. в [2], стр. 212). Известно (теорема Банаха, см. там же), что $N(y)$ измерима и

$$\int_m^M N(y)\,dy=\bigvee_0^1 \Phi_1, \tag{5}$$

где $m=\min\limits_{x\in[0,1]}\Phi_1(x)$, $M=\max\limits_{x\in[0,1]}\Phi_1(x)$. Более того, из доказательства теоремы Банаха видно, что $N(y)$ измерима по Борелю и следовательно

$$M_k=\Phi_1^{-1}(N^{-1}((0,k]))\in\mathbf{F}_1(\Phi)\ (k=1,2,\cdots). \tag{6}$$

(Из определения функции $N(y)$ следует, что множество M_k состоит из всех точек $t\in[0,1]$, для которых уравнение $\Phi_1(x)=\Phi_1(t)$ имеет не более, чем k корней).

Обозначим через $M_n^{(i)}$ множество тех $x\in[0,1]$, для которых множество $\bigcap\limits_{x\in E\in\mathbf{F}_i(\Phi)} E$ состоит из не более чем n точек. Очевидно $M_k^{(1)}=M_k$.

Зафиксируем произвольное k_0. Пусть e_k—множество нулей функции Φ_k и $e=\bigcup\limits_{k=1}^{k_0} e_k$.

Очевидно

$$e\in\mathbf{F}_k(\Phi)\ \text{и}\ |e|=0. \tag{7}$$

Пусть $P_n^{(i)}=M_n^{(i)}\setminus e$ $(n=1,2,\cdots;\ i=1,2,\cdots,k_0)$. Из (6) и (7) следует, что

$$P_n^{(1)}\in\mathbf{F}_{k_0}(\Phi)\ \text{и}\ |P_n^{(1)}|=|M_n|. \tag{8}$$

Докажем для любых $i<k_0$ и n включение

$$P_n^{(i)}\subset P_{n-1}^{(i+1)}.$$

Допустим противное. Тогда для некоторых n и $i<k_0$ существует $x_0\in P_n^{(i)}\setminus P_{n-1}^{(i+1)}$, т. е. найдутся ровно $n-1$ точек $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ таких, что

$$\Phi_j(x_k)=\Phi_j(x_0)\neq 0\ (k=1,\cdots,n-1;\ j=1,\cdots,i+1).$$

(Если для некоторого $x_0\in[0,1]\setminus e$ таких точек меньше, то $x_0\in P_{n-1}^{(i+1)}$, если же больше, то $x_0\overline{\in} P_n^{(i)}$). Так как $\Phi_{i+1}(x_0)\neq 0$, то существует $\delta>0$ такое, что Φ_{i+1} сохраняет знак на множестве $U=\bigcup\limits_{k=0}^{n-1}(x_k-\delta,x_k+\delta)$. Далее существует $\varepsilon_0>0$ такое, что

$$V = V(\varepsilon_0) = \bigcap_{k=1}^{i} \Phi_k^{-1}((\Phi_k(x_0) - \varepsilon_0, \Phi_k(x_0) + \varepsilon_0)) \subset U. \tag{9}$$

В противном случае для каждого $\varepsilon = \frac{1}{2^m}$ существовала бы точка $y_m \in V\left(\frac{1}{2^m}\right) \setminus U$. В силу компактности $[0,1] \setminus U$ можно предположить, что последовательность y_m сходится к некоторому пределу $x = x_n$. Тогда $\Phi_j(x_n) = \Phi_j(x_0)$ для любого $j = 1, 2, \cdots, i$, причем $x_n \bar{\in} U$, т. е. $x_n \neq x_k$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$. Отсюда получаем, что $x_0 \bar{\in} P_n^{(i)}$, а это противоречит выбору точки x_0.

Из непрерывности Φ_k $(k = 1, 2, \cdots, i)$ получаем, что $|V(\varepsilon_0)| \neq 0$ (учитывая, что $x_0 \in V(\varepsilon_0) \neq \varnothing$) и в силу (9) $\int_V \Phi_{i+1}(x)\,dx \neq 0$. А это противоречит условию центрированности, так как $V \in \mathbf{F}_i(\Phi)$.

Тем самым мы в частности доказали, что

$$P_{k_0} = P_{k_0}^{(1)} \subset P_{k_0-1}^{(2)} \subset \cdots \subset P_1^{(k_0)}. \tag{10}$$

Докажем, что $|P_{k_0}| = 0$. Допустим противное: $|P_{k_0}| = \mu > 0$. Тогда существуют замкнутые множества

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_m \subset \cdots \subset P_{k_0} \tag{11}$$

с $|F_m| > \mu - \frac{1}{m}$ $(m = 1, 2, \cdots)$. Пусть $x \in F_m$, тогда в силу (10) и (11) $x \in P_1^{(k_0)}$ и, следовательно, существует $\varepsilon = \varepsilon(x, m) > 0$ такое, что

$$U_{x,m} = \bigcap_{k=1}^{k_0} \Phi_k^{-1}((\Phi_k(x) - \varepsilon, \Phi_k(x) + \varepsilon)) \subset \left(x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}\right). \tag{12}$$

В силу непрерывности Φ_k множества $\{U_{x,m}\}$ образуют открытые покрытия компактов F_m. Выберем конечные покрытия

$$\{U_i = U_{x_i,m}\}_{i=l_{m-1}+1}^{l_m}, \quad m = 1, 2, \cdots; \quad 0 = l_0 < l_1 < \cdots.$$

Определим на P_{k_0} систему $\{\chi_i\}_{i=0}^{\infty}$:

$$\chi_0(x) \equiv 1; \quad \chi_i(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in U_i \cap P_{k_0} \\ 0 \text{ при } x \in P_{k_0} \setminus U_i \end{cases}$$
$$(i = 1, 2, \cdots).$$

Пусть $F = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$. Очевидно $|P_{k_0} \setminus F| = 0$.

Покажем, что для любых отличных друг от друга точек α и β из F существует функция χ_{i_0} такая, что

$$\chi_{i_0}(\alpha) \neq \chi_{i_0}(\beta). \tag{13}$$

Пусть

$$|\alpha - \beta| > \frac{2}{m_0}. \tag{14}$$

Так как $\alpha, \beta \in F$, то существует (в силу (11))

$$m_1 > m_0 \tag{15}$$

такое, что $\alpha, \beta \in F_{m_1}$. Возьмем i_0 такое, что $l_{m_1-1} < i_0 \leqslant l_{m_1}$ и $\alpha \in U_{i_0}$. Тогда в силу (12), (14) и (15) $\beta \overline{\in} U_{i_0}$. Отсюда получаем (13).

Система $\{\chi_i\}_{i=0}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы Реньи. Следовательно, система

$$\Psi = \{\chi_0;\ \chi_{i_1} \cdot \chi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \chi_{i_j},\ 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_j,\ j = 1, 2, \cdots\}$$

полна в $L^2(P_{i_0})$. Но функция $\chi_{i_1} \cdot \chi_{i_2} \cdot \ldots \cdot \chi_{i_j} = 1$ на множестве $\bigcap\limits_{l=1}^{j} U_{il} \cap P_{k_0}$, которое в силу (8) и (12) принадлежит $\mathbf{F}_{k_0}(\Phi)$. Отсюда в силу центрированности системы Φ получаем, что сужение функции Φ_{k_0+1} на P_{k_0} ортогонально ко всем функциям системы Ψ. Следовательно, $\Phi_{k_0+1}(x) = 0$ почти всюду на P_{k_0}. Получили противоречие, так как по условиям теоремы $\Phi_{k_0+1} \neq 0$ почти всюду. Итак, для любого k $|P_k^{(1)}| = 0$ и следовательно, в силу (8) $|M_k| = 0$.

Покажем, что множество $E = [0,1] \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$ удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, $|E| = 1$ и $\Phi_1(E) = N^{-1}(\infty)$. Но из (5) следует, что $|N^{-1}(\infty)| = 0$.

Теорема 1 доказана.

Покажем, что в теореме 1 нельзя опустить условие ограниченности вариации Φ_1.

Предложение 2. *Существует центрированная система $\Psi = \{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ непрерывных и почти всюду на $[0,1]$ отличных от нуля функций, причем $|\{x;\ \Psi_0(x) < t\}| = t$ для любого $0 \leqslant t \leqslant 1$.*

Введем некоторые вспомогательные обозначения. Пусть

$$\Delta_{ni} = \left[\frac{i-1}{6^n}, \frac{i}{6^n}\right) \quad (n = 0, 1, \cdots;\ i = 1, 2, \cdots, 6^n).$$

Для любого полуинтервала $\Delta = [\alpha, \beta)$ обозначим:

$$A(\Delta) = \left[\alpha, \alpha + \frac{2}{3}|\Delta|\right),\ B(\Delta) = \left[\alpha + \frac{1}{3}|\Delta|, \beta\right),$$

$$C_1(\Delta) = \left[\beta, \beta + \frac{1}{6}|\Delta|\right),\ C_2(\Delta) = \left[\beta + \frac{1}{4}|\Delta|, \beta + \frac{5}{12}|\Delta|\right),$$

$$D_i(\Delta) = \left[\alpha + \frac{i-1}{4}|\Delta|, \alpha + \frac{i}{4}|\Delta|\right) \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

$$E_0(\Delta) = \left[\alpha, \alpha + \frac{1}{6}|\Delta|\right) \cup \left[\alpha + \frac{1}{2}|\Delta|, \alpha + \frac{5}{6}|\Delta|\right),\ E_1(\Delta) = \Delta \setminus E_0(\Delta).$$

Далее, обозначим через $N(\Delta)$ последовательность полуинтервалов $\{\Delta^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\Delta^{(1)} = A(\Delta),\ \Delta^{(2m)} = C_1(\Delta^{(m)}),\ \Delta^{(2m+1)} = C_2(\Delta^{(m)})(m=1,\ 2,\cdots).$$

Очевидно

$$\Delta^{(k)} \subset \Delta,\ \Delta^{(k)} \cap \Delta^{(m)} = \varnothing\ \ (k,\ m=1,\ 2,\cdots;\ k \neq m) \tag{16}$$

и, так как

$$|A(\Delta)| = \frac{2}{3}|\Delta|,\ |C_1(\Delta)| = |C_2(\Delta)| = \frac{1}{6}|\Delta|,$$

то

$$\left|\bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta^{(k)}\right| = |\Delta|. \tag{17}$$

Определим индуктивно последовательность ступенчатых функций $\{f_i\}_{i=0}^{\infty}$. Пусть

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \in E_0([0,1)) \\ 1 \text{ при } x \in E_1([0,1)) \\ 2 \text{ при } x = 1. \end{cases}$$

Допустим, что функции f_m $(m = 0,1,\cdots,\ n-1)$ уже определены так, что функция

$$F_{n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{2^{m+1}} f_m$$

постоянна на полуинтервалах Δ_{ni} $(i = 1,\ 2,\cdots,\ 6^n)$ и имеет скачок, равный $\frac{1}{2^n}$ по крайней мере на одном из концов Δ_{ni}, причем

$$F_{n-1}\left(\frac{i}{6^n}\right) \neq F_{n-1}\left(\frac{i-1}{6^n} - 0\right)(i = 2,\ 3,\cdots,\ 6^n).$$

Положим

$$f_n(1) = 0;\ f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \in E_{\varepsilon_i}(\Delta_{ni}) \\ 1 \text{ при } x \in E_{1-\varepsilon_i}(\Delta_{ni}), \quad (i = 1, 2,\cdots, 6^n), \end{cases} \tag{18}$$

где $\varepsilon_i = 0$, если $F_{n-1}\left(\frac{i}{6^n}\right) > F_{n-1}\left(\frac{i}{6^n} - 0\right)$ или же

$$F_{n-1}\left(\frac{i}{6^n}\right) = F_{n-1}\left(\frac{i}{6^n} - 0\right) = F_{n-1}\left(\frac{i-1}{6^n}\right) > F_{n-1}\left(\frac{i-1}{6^n} - 0\right)$$

и $\varepsilon_i = 1$ в противном случае.

Легко заметить, что при таком определении функция

$$F_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2^{m+1}} f_m$$

удовлетворяет предположениям индукции.

Пусть

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} f_m(x). \tag{19}$$

Докажем следующие свойства функции F:

1. F — непрерывна;

2. $F(0)=0;\ 0\leqslant F(x)\leqslant 1$ при $x\in[0,1]$; (20)

3. $|F^{-1}([0,\ t))|=t$ для любого $0\leqslant t\leqslant 1$; (21)

4. $$F(x)=\frac{1}{2}[f_0(x)+F^+(x;\ \Delta_{11})+F^+(x;\ \Delta_{12})+$$

$$+F^-(x;\ \Delta_{13})+F^-(x;\ \Delta_{14})+F^+(x;\ \Delta_{15})+F^+(x;\ \Delta_{16})]. \qquad (22)$$

Непрерывность F вытекает из равномерной сходимости ряда (19), если учесть, что колебания функции F_n на $\overline{\Delta}_{ni}$ равны $\frac{1}{2^{n-1}}$. Свойство (20) очевидно.

Возьмем некоторый двоичный полуинтервал

$$\Delta=\left[\frac{i-1}{2^k},\ \frac{i}{2^k}\right)\ (1\leqslant i\leqslant 2^k). \qquad (23)$$

Пусть $\frac{i-1}{2^k}=\sum\limits_{m=1}^{k}\frac{\delta_m}{2^m}$, где $\delta_m=0$ или 1. Тогда из (18) следует, что

$$F^{-1}(\Delta)=\{x:\ f_{m-1}(x)=\delta_m;\ m=1,\cdots,\ k\}=\bigcap_{m=1}^{k}\{x:\ f_{m-1}(x)=\delta_m\}.$$

Отсюда и в силу (18) получаем

$$|F^{-1}(\Delta)|=\frac{1}{2^k}=|\Delta|. \qquad (24)$$

Очевидно любой полуинтервал $[0,\ t)$ можно представить в виде суммы непересекающихся полуинтервалов вида (23). Следовательно, учитывая (24), получаем (21).

Далее

$$F(x)-\frac{1}{2}f_0(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^{m+1}}\ f_m(x)=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2^{m+1}}\ f_{m+1}(x). \qquad (25)$$

Нетрудно заметить, что из определения (18) следует

$$f_{m+1}(x)=\begin{cases} f_m^+(x;\ \Delta_{1i}) \text{ при } x\in\Delta_{1i},\ i=1,\ 2,\ 5,\ 6\\ f_m^-(x;\ \Delta_{1i}) \text{ при } x\in\Delta_{1i},\ i=3,\ 4\end{cases}$$

$$(m=0,\ 1,\cdots),$$

а это вместе с (25) дает (22).

Свойство (22) означает, что для любого $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$

$$F\left(\frac{1}{3}-x\right)=F\left(\frac{1}{3}+x\right) \text{ и } F\left(\frac{2}{3}-x\right)=F\left(\frac{2}{3}+x\right),$$

т. е. функция F на интервалах $A(\Delta_{01})$ и $B(\Delta_{01})$ четна относительно середины этих интервалов. Многократно пользуясь формулой (22) получим, что для любых n, $1 \leqslant i \leqslant 6^n$ и $0 \leqslant x \leqslant \frac{|\Delta_{ni}|}{3}$

$$F(c-x) = F(c+x), \tag{26}$$

где c — середина интервала $A(\Delta_{ni})$.

Определим индуктивно последовательность M_n семейств полуинтервалов:

$$M_1 = N([0,1]); \; M_n = \bigcup_{\Delta \in M_{n-1}} \bigcup_{i=1}^{4} \{\Delta: \Delta \in N(D_i(\Delta'))\} \tag{27}$$

$$(n = 2, 3, \cdots).$$

Пусть

$$\Psi_0(x) = F(x); \; \Psi_n(x) = \sum_{\Delta \in M_n} \hat{F}(x; \Delta) (n = 1, 2, \cdots). \tag{28}$$

Система $\Psi = \{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ будет искомой.

Действительно, так как $\hat{F}(x; \Delta) \in C([0,1])$, $\|\hat{F}(x; \Delta)\|_C = |\Delta|$ и в силу (21) $\hat{F}(x; \Delta) \neq 0$ п. в. на Δ, то из (16), (17) и (27) получаем, что $\Psi_n \in C([0,1])$ и $\Psi_n(x) \neq 0$ п. в. на $[0,1]$.

Докажем, что система Ψ центрирована. В силу (26), (27) и (28) легко заметить, что для любых n, $\Delta \in M_n$ и $0 \leqslant x \leqslant \frac{|\Delta|}{2}$

$$\Psi_k(c-x) = \Psi_k(c+x) \; (k = 0, 1, \cdots, n-1), \tag{29}$$

где c—середина интервала Δ.

Пусть $\Lambda \in \mathbf{F}_{n-1}(\Psi)$. Учитывая замечание в начале параграфа из (29) следует, что для любого $\Delta \in M_n$ множество $\Lambda \cap \Delta$ симметрично относительно середины интервала Δ. А отсюда в силу (28) и (1) получаем, что

$$\int_{\Lambda} \Psi_n(x)\, dx = 0 \text{ для любого } \Lambda \in \mathbf{F}_{n-1}(\Psi).$$

Итак, предложение 2 доказано.

Фактически мы доказали, что существует непрерывная функция Ψ_0, равноизмеримая с функцией $y = x$, которую можно дополнить непрерывными функциями до „нетривиальной" центрированной системы. На самом деле верно более общее

Предложение 3. *Для любой непрерывной на* $[0,1]$ *функции* φ *существует центрированная система* $\Psi = \{\Psi_n\}_{n=0}^{\infty}$, *почти всюду отличных от нуля непрерывных функций такая, что* Ψ_0 *и* φ *равноизмеримы.*

Доказательство по существу то же самое. Нужно лишь подходящим образом изменить определения полуинтервалов Δ_{ni} и множеств $E_0(\Delta_{ni})$, $E_1(\Delta_{ni})$.

2°. Для каждой системы множеств $T=\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($T_n\subset[0,1]$, $|T_n|>0$, $n=1, 2,\cdots$), удовлетворяющих условиям:

$$1)\ |T_1|=1;\ 2)\ T_{2n}\cup T_{2n+1}=T_n;\ 3)\ T_{2n}\cap T_{2n+1}=\varnothing \qquad (n=1, 2,\cdots) \tag{30}$$

определим ортонормированную на [0,1] систему $\chi_T=\{\chi_n(t;\ T)\}_{n=0}^{\infty}$:

$$\chi_0(t;\ T)\equiv 1;\ \chi_n(t;\ T)=\begin{cases}\left(\dfrac{|T_{2n+1}|}{|T_n|\,|T_{2n}|}\right)^{1/2} & \text{при } t\in T_{2n}\\ -\left(\dfrac{|T_{2n}|}{|T_n|\,|T_{2n+1}|}\right)^{1/2} & \text{при } t\in T_{2n+1}\\ 0 \text{ при } t\in[0,1]\setminus T_n\end{cases} \qquad (n=1, 2,\cdots). \tag{31}$$

Для полных центрированных систем известна теорема Ганди, которую мы приводим в удобной для нас формулировке.

Теорема (Ганди, см. [1]). *Пусть* $\Phi=\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *полная в* $L^2([0,1])$, *нормированная, центрированная система. Тогда существует система множеств* T, *удовлетворяющая условиям* (30) *такая, что*

$$\Phi_n(t)=\chi_n(x;\ T)\ \textit{п. в. на}\ [0,1]\ (n=1, 2,\cdots).$$

Определение. Систему χ_T, определенную в (31), назовем *системой типа Хаара*, если система T состоит из полуинтервалов, причем $\lim\limits_{n\to\infty}|T_n|=0$*).

Определение. Системы $\Phi=\{\varphi_n\}$ и $\Psi=\{\psi_n\}$, определенные на [0,1], называются *изоморфными*, если существуют множество $F\subset[0,1]$, $|F|=1$ и взаимно-однозначное отображение α_0 из E в [0,1] такое, что

а) для любого измеримого $E\subset F$ образ $\alpha_0(E)$ также измерим и $|\alpha_0(E)|=|E|$, (32)

б) для любого измеримого $E\subset[0,1]$ прообраз $\alpha_0^{-1}(E)$ также измерим и $|\alpha_0^{-1}(E)|=|E|$, (33)

в) для любого n и $x\in F$ $\varphi_n(x)=\psi_n(\alpha_0(x))$. (34)

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы система* (31) *была полна в* $L^2[0,1]$) *необходимо и достаточно, чтобы она была изоморфна некоторой системе типа Хаара.*

Вместе с теоремой Ганди отсюда вытекает

---

* Очевидно, классическая система Хаара является *системой типа Хаара* (в смысле равенства почти всюду).

Теорема 3. *Полная в $L^2([0,1])$ нормированная, центрированная система есть система типа Хаара.*

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть система $S=\{f_n\}$ полна в $L^2([0,1])$. Тогда для любого измеримого $E\subset[0,1]$ существует множество $E_S\in \mathbf{F}(S)$ такое, что $|E\Delta E_S|=0$* (Здесь $\mathbf{F}(S)$ — σ-алгебра, порожденная системой S, т. е. минимальная σ-алгебра, по которой измеримы все функции системы S).

Доказательство леммы. Возьмем произвольное $E\subset[0,1]$ и обозначим через f_E характеристическую функцию множества E. Так как S полна в L^2, то существует последовательность многочленов по системе S, сходящихся к f_E по норме L^2. Следовательно, некоторая последовательность $\{p_n\}$ многочленов по S сходится к f_E почти всюду. Обозначим через E_S множество тех точек, где $\lim p_n(x)>\frac{1}{2}$. Очевидно $|E\Delta E_S|=0$ и, как легко проверить

$$E_S=\bigcup_{m,k=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x:\ p_n(x)>\frac{1}{2}+\frac{1}{k}\right\}.$$

Отсюда вытекает, что $E_S\in\mathbf{F}(S)$.

Доказательство теоремы 2. Необходимость. Пусть система (31) полна в L^2. Тогда по доказанной лемме для каждого интервала $U_{p,q}=(p,q)\subset[0,1]$ с рациональными концами существует

$$E_{p,q}\in\mathbf{F}(\mathcal{L}_T) \tag{35}$$

такое, что мера $e_{p,q}=E_{p,q}\Delta U_{p,q}$ равна нулю*). Пусть $E_0=\bigcup_{p,q} e_{p,q}$, $\widetilde{T}_n=T_n\setminus E_0$. Из полноты $\mathcal{L}_T$ вытекает, что $\lim|\widetilde{T}_n|=0$. В противном случае существовали бы $\varepsilon_0>0$ и вложенные множества $\{\widetilde{T}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что $|\widetilde{T}_{n_k}|>\varepsilon_0$ для любого k. Но тогда мера множества $\bigcap_{k=1}^{\infty}\widetilde{T}_{n_k}$ не меньше ε_0 и все функции системы $\mathcal{L}_T$ постоянны на нем. Это противоречит полноте $\mathcal{L}_T$.

Пусть система полуинтервалов $\Delta=\{\Delta_n=[a_n,b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условием (30) и кроме того для любого n

$$|\Delta_n|=|T_n|=|\widetilde{T}_n|.$$

Определим отображение α: $\widetilde{T}_1\to[0,1]$: пусть

$$\widetilde{T}_1\supset\widetilde{T}_{n_1}\supset\widetilde{T}_{n_2}\supset\cdots \quad \text{и} \quad t\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\widetilde{T}_{n_k},$$

---

* Заметим, что $\mathbf{F}(\mathcal{L}_T)$ есть σ-алгебра, порожденная системой T.

тогда

$$x = \alpha(t) = \lim_{k \to \infty} a_{n_k}.$$

Очевидно для любого n

$$\alpha(\bar{T}_n) \subset \bar{\Delta}_n. \tag{36}$$

Для отображения α выполняется условие (33).

Доказательство этого утверждения дано в работе [4] (лемма). Пусть R — множество, состоящее из точек $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ $(a_0=1)$, т. е. множество концов $\{\Delta_n\}$. (Заметим, что если $b_n \neq 1$, то $b_n = a_{n+1}$). В силу (33) мера $Q = \alpha^{-1}(R)$ равна нулю. Обозначим для любого n

$$H_n = \tilde{T}_n \setminus Q \tag{37}$$

и рассмотрим сужение α_0 отображения α на множество H_1. Очевидно для α_0 также выполняется (33).

Легко проверить, что и для системы $H = \{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполняются условия (30). Далее из (36) и (37) имеем

$$\alpha_0(H_n) \subset \Delta_n \tag{38}$$

для любого n.

Докажем, что отображение α_0 взаимно-однозначно. Пусть

$$t_1, t_2 \in H_1 = T_1 \setminus (E_0 \cup Q) \text{ и } t_1 \neq t_2. \tag{39}$$

Тогда существует интервал $U_{p,q}$ с рациональными концами такой, что

$$t_1 \in U_{p,q} \text{ и } t_2 \bar{\in} U_{p,q}. \tag{40}$$

Обозначим

$$E_{p,q} \setminus (E_0 \cup Q) = E'_{p,q}. \tag{41}$$

В силу определения E_0 имеем

$$U_{p,q} \setminus (E_0 \cup Q) = E'_{p,q} \subset U_{p,q}. \tag{42}$$

Из (40), (39) и (42) получаем

$$t_1 \in E'_{p,q} \text{ и } t_2 \bar{\in} E'_{p,q}.$$

Отсюда в силу (41) и (39)

$$t_1 \in E_{p,q} \text{ и } t_2 \bar{\in} E_{p,q}.$$

Учитывая замечание в начале первого параграфа, получаем, что существует T_{n_0} такое, что

$$t_1 \in T_{n_0} \text{ и } t_2 \bar{\in} T_{n_0}$$

Отсюда в силу (37)

$$t_1 \in H_{n_0} \text{ и } t_2 \bar{\in} H_{n_0},$$

а это в силу (38) означает, что

$$\alpha_0(t_1) \in \Delta_{n_0} \text{ и } \alpha_0(t_2) \bar{\in} \Delta_{n_0}, \text{ т. е. } \alpha_0(t_1) \neq \alpha_0(t_2).$$

Итак, мы получили, что α_0 взаимно-однозначно на H_1. Теперь докажем, что для α_0 и любого множества H_n выполняется (32).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и k. Определим последовательность вложенных замкнутых множеств $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Пусть S_k — произвольное замкнутое множество из H_k с $|S_k| > |H_k| - \frac{\varepsilon}{2}$. Возьмем $P_1 = S_k$. Допустим, что множества P_i $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$ уже определены.

Рассмотрим те множества $H_i \cap P_{m-1}$ $(k\,2^{m-1} \leqslant i < (k+1)\,2^{m-1})$, которые имеют положительную меру. В каждом из них возьмем замкнутое множество S_i так, чтобы

$$\Big|\bigcup_{i \in J_m} S_i\Big| > |P_m| - \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}, \tag{43}$$

где

$$J_m = \{i\colon\ k2^{m-1} \leqslant i < (k+1)\,2^{m-1};\ |H_i \cap P_{m-1}| > 0\}.$$

Положим

$$P_m = \bigcup_{i \in J_m} S_i. \tag{44}$$

В силу (43)

$$\Big|\bigcap_{m=1}^{\infty} P_m\Big| \geqslant |H_k| - \varepsilon. \tag{45}$$

Для любого $m \geqslant 1$ обозначим

$$H^m = \bigcup_{i \in J_m} H_i. \tag{46}$$

Из определения множеств P_m следует, что

$$H_k = H^1 \supset H^2 \supset \cdots. \tag{47}$$

Далее, так как $P_m \subset H^m$ $(m = 1, 2, \cdots)$, то из (45) и (47) получаем

$$\Big|\bigcap_{m=1}^{\infty} H^m\Big| \geqslant |H_k| - \varepsilon. \tag{48}$$

Аналогично обозначим

$$\Delta^m = \bigcup_{i \in J_m} \Delta_i. \tag{46'}$$

Из (47) и (48) получаем

$$\Delta_k = \Delta^1 \supset \Delta^2 \supset \cdots \tag{47'}$$

и

$$\Big|\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^m\Big| \geqslant |\Delta_k| - \varepsilon. \tag{48'}$$

Покажем, что

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^m \subset \alpha_0(H_k), \tag{49}$$

Пусть $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^m$, тогда существует последовательность $\{n_m\}$ такая, что для любого m

$$n_m \in J_m, \ \Delta_{n_m} \supset \Delta_{n_{m+1}} \tag{50}$$

и

$$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{n_m}. \tag{51}$$

Отсюда имеем, что и

$$H_{n_m} \supset H_{n_{m+1}} \ (m = 1, 2, \cdots). \tag{50'}$$

Далее из определения $S_{n_{m+1}}$ в силу (50'), (44) и (50) получаем для любого m

$$S_{n_{m+1}} \subset H_{n_{m+1}} \cap P_m \subset H_{n_m} \cap P_m = S_{n_m}.$$

(Здесь нужно учесть, что если $i, j \in J_m$, то $H_i \cap H_j = \varnothing$). Учитывая замкнутость S_{n_m}, отсюда получаем, что множество

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} H_{n_m} \supset \bigcap_{m=1}^{\infty} S_{n_m}$$

не пусто. Пусть $t \in \bigcap_{m=1}^{\infty} H_{n_m}$. В силу (38) и (51) имеем $\alpha_0(t) = x$, а это означает, что выполняется (49). Но (49) вместе с (51) доказывает утверждение (32) для множеств системы H.

Отсюда, учитывая взаимно-однозначность α_0 мы получаем, что и для любого множества из σ-алгебры $\mathbf{F}(H)$, порожденной системой H, выполняется условие (32). Пусть теперь E — измеримое множество из H_1. Проверим условие (32) для множества E. Очевидно для любого интервала $U \subset [0,1]$ существует множество $U_H \in \mathbf{F}(H)$ такое, что $|U \Delta U_H| = 0$. (Для этого достаточно в лемме вместо системы χ_T взять χ_H). А отсюда легко вывести, что множество $\alpha_0(E)$ измеримо. Но это, учитывая взаимно-однозначность α_0, вместе с (33) дает

$$|\alpha_0(E)| = |E|.$$

Итак, мы получили, что системе χ_T изоморфна системе χ_Δ. (Условие (34) очевидно выполняется).

Достаточность. Пусть система χ_T изоморфна *системе типа Хаара* $\chi_\Delta = \{\chi_n(x; \Delta)\}_{n=0}^{\infty}$. Пусть далее $t_1 \neq t_2$ и $t_1, t_2 \in F$ (F — область определения отображения α_0). Отсюда вытекает, что $\alpha_0(t_1) \neq \alpha_0(t_2)$ и, так как в силу определения χ_Δ $\lim |\Delta_n| = 0$, то существует $\chi_{n_0}(x; \Delta)$, которая принимает в точках $\alpha_0(t_1)$ и $\alpha_0(t_2)$ разные значения. В силу (34) то же верно и для $\chi_{n_0}(t; T)$, т. е.

$$\chi_{n_0}(t_1; T) \neq \chi_{n_0}(t_2; T).$$

Мы получили, что система χ_T удовлетворяет условиям теоремы Реньи. Но как легко заметить, любая функция вида

$$\chi_{n_1}(t;\ T)\cdot\chi_{n_2}(t;\ T)\cdots\chi_{n_k}(t;\ T)\ (0\leqslant n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_k$$

есть конечная линейная комбинация функций системы χ_T. Следовательно, χ_T полна в $L^2([0,1])$.

Теорема 2 полностью доказана.

В заключение автор выражает благодарность Р. И. Овсепяну и А. А. Талаляну за постановку задач.

Ереванский государственный
университет

Поступила 30.V.1978

Ա. Վ. ԲԱԽՇԵՑՅԱՆ. Կենտրոնացված սիստեմների որոշ դասերի կառուցվածքի մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է անընդհատ ֆունկցիաներից բաղկացած կենտրոնացված սիստեմների կառուցվածքը [1] և ցույց է տրվում, որ լրիվ կենտրոնացված սիստեմները իզոմորֆ են Հաարի տիպի սիստեմներին։

A. V. BAKHSHETZIAN. *On the structure of some classes of centered systems* (summary)

The paper investigates centered systems consisting of continuous functions. It is shown that complete centered systems are isomorph to the Haar system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. F. Gundy*. Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, Trans. Am. Math. Soc., 124, 1966, 228—248.
2. *И. П. Натансон*. Теория функций вещественной переменной, Изд. „Наука", 1974.
3. *A. Renyi*. On a conjecture of H. Steinhaus, Ann. Soc. math. Polonaise, 25, 1952, 279—287.
4. *А. В. Бахшецян*. О некотором обобщении систем Радемахера и Уолша. Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., X, № 1, 1975, 85—91.