ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 4, 1978 Математика

Г. М. МУШЕГЯН

# О КОЭФФИЦИЕНТАХ ВСЮДУ СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА С ПЕРЕСТАВЛЕННЫМИ ЧЛЕНАМИ

## § 1. Введение

В настоящей работе рассматривается вопрос о единственности коэффициентов всюду сходящихся рядов Хаара в зависимости от порядка следований членов этих рядов.

Для дальнейшего изложения приведем следующее

Определение 1.1. Пусть $B$ — некоторое подмножество множества $\theta$ всех числовых последовательностей. Множество $E\subset[0,1]$ называется $U$-множеством для класса $B$, если из равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n (x) = 0, \text{ при } x\in[0, 1]\setminus E, \{a_n\}\in B$$

следует $a_n = 0$, $n=1, 2,\cdots$.

Хааром было установлено (см. [7]), что пустое множество является $U$-множеством для класса $\theta$. Вместе с тем Фабер [8] показал, что множество, состоящее из одной точки, не является $U$-множеством для класса $\theta$.

Далее Ф. Г. Арутюняном и А. А. Талаляном (см. [1]) был выделен естественный класс $A\subset\theta$, для которого счетное множество является $U$-множеством. Этот класс определяется следующим образом: $\{a_n\}\subset A$, если для любой точки $x_0\in[0,1]$ выполнено условие

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{n_k}}{\chi_{n_k}(x_0)} = 0,$$

где $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ — последовательность всех тех номеров $n$ для которых $\chi_n(x_0)\neq 0$.

В работе [1] был получен более сильный результат, который в, частности можно сформулировать следующим образом:

Теорема 1. (Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян). Если $\{a_n\}\subset A$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n (x) \tag{1.1}$$

всюду кроме, быть может, счетного множества точек сходится к суммируемой функции $f(x)$, то

$$a_n = \int_0^1 f(x)\chi_n(x)\,dx, \quad n = 1, 2, \cdots. \tag{1.2}$$

В работе [9] была доказана

Теорема 2. Если ряд (1.1) из класса $A$, после некоторой перестановки* всюду, кроме быть может, счетного множества точек сходится к ограниченной функции $f(x)$, то справедливы формулы (1.2).

Отсюда следует, что если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(x), \quad \{a_n\}, \{b_n\} \in A$$

после одной и той же перестановки всюду сходятся к некоторой функции $g(x)$, то $a_n = b_n$. Следовательно, коэффициенты ряда Хаара, который после некоторой фиксированной $\sigma$-перестановки всюду сходится к некоторой функции $g(x)$, должны определяться единственным образом в зависимости от $g(x)$.

В настоащей работе доказывается, что эти коэффициенты зависят не только от $g(x)$, но и от $\sigma$. А именно, приводятся примеры рядов Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(x), \quad a_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

которые после двух различных перестановок всюду сходятся к одной и той же конечной функции $g(x)$, но $a_1 \neq b_1$.

## § 2. Определения и формулировки вспомогательных утверждений

Система Хаара определяется следующим образом: полагаем $\chi_1(x) = 1$, при $x \in [0,1]$. Если $n = 2^i + k$, $0 \leqslant i$, $1 \leqslant k \leqslant 2^i$, то

$$\chi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2^i}, & \text{при } x \in \left(\dfrac{2k-2}{2^{i+1}}, \dfrac{2k-1}{2^{i+1}}\right) \\ -\sqrt{2^i}, & \text{при } x \in \left(\dfrac{2k-1}{2^{i+1}}, \dfrac{2k}{2^{i+1}}\right) \\ 0, & \text{при } x \overline{\in} \left[\dfrac{2k-2}{2^{i+1}}, \dfrac{2k}{2^{i+1}}\right], \end{cases}$$

*) то есть рассматриваются ряды вида

$$(\sigma)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n^{(\sigma)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \chi_{n_k}(x),$$

где $(n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots)$—некоторая перестановка последовательности $(1, 2, \cdots, n, \cdots)$.

в каждой из остальных точек значение функций $\chi_n(x)$ берется равным полусумме правостороннего и левостороннего его пределов в той же точке.

В настоящей статье будем пользоваться следующими обозначениями: если $n=2^i+k$, $0\leqslant i$, $1\leqslant k\leqslant 2^i$, то полагаем

$$\Delta_n=\left(\frac{2k-2}{2^{i+1}},\ \frac{2k}{2^{i+1}}\right),\ \Delta_n^{(1)}=\left(\frac{2k-2}{2^{i+1}},\ \frac{2k-1}{2^{i+1}}\right),\ \Delta_n^{(2)}=\left(\frac{2k-1}{2^{i+1}},\ \frac{2k}{2^{i+1}}\right),$$

$$\nabla_n^{(1)}=\left(\frac{4k-3}{2^{i+2}},\ \frac{4k-2}{2^{i+2}}\right),\ \nabla_n^{(2)}=\left(\frac{4k-2}{2^{i+2}},\ \frac{4k-1}{2^{i+2}}\right).$$

Ясно, что $\nabla_n^{(1)}$ совпадает с правой половиной интервала $\Delta_n^{(1)}$, а $\nabla_n^{(2)}$ — с левой половиной интервала $\Delta_n^{(2)}$. Интервалами Хаара будем называть множества, имеющие вид $\left(\frac{l}{2^k},\ \frac{l+1}{2^k}\right)$, $0\leqslant l\leqslant 2^k-1$. Через $\overset{\circ}{E}$ будет обозначена внутренность множества $E$, а через $\overline{E}$ — замыкание множества $E$.

Пусть $(a,\ b)$ — некоторый интервал вида $\left(\frac{l-1}{2^s},\ \frac{l}{2^s}\right)$, $1\leqslant l\leqslant 2^s$, рассмотрим следующие ряды:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=2^s+1}^{\infty} a_n\chi_n(x), \text{ где}\\ &a_n=\begin{cases}0, \text{ при } n\in\{n:\ \Delta_n\overline{\subset}(a,\ b)\}\\ [\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|\chi_n(x)|]^{-1}, \text{ при } n\in\{n:\ \Delta_n\subset(a,\ b)\}\end{cases}\end{aligned}\right| \qquad (2.1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=2^s+1}^{\infty} b_n\chi_n(x)\\ &b_n=\begin{cases}a_n, \text{ при } n\in\{n:\ \min\,[S_{2^m}(x);\ x\in\Delta_n,\ 2^s+1\leqslant 2^m<n]>-1\}\\ 0, \text{ если существует номер } m,\ 2^s\leqslant 2^m<n \text{ такой, что}\\ \qquad S_{2^m}(x)=-1, \text{ при } x\in\Delta_n,\end{cases}\end{aligned}\right| \qquad (2.2)$$

а

$$S_{2^m}(x)=\sum_{n=2^s+1}^{2^m} a_n\chi_n(x).$$

Ясно, что любая частичная сумма $S_{2^m}(x)$ ряда (2.1) в каждой точке отрезка [0,1] принимает целочисленные значения и последовательность $S_{2^m}(x)$, $m=s+1,\ s+2,\cdots$, расходится всюду на $(a,\ b)$. Поэтому, как следует из результатов работы [3], почти для всех $x\in(a,\ b)$ справедливы следующие равенства:

$$\varliminf_{m\to\infty} S_{2m}(x) = -\infty, \quad \varlimsup_{m\to\infty} S_{2m}(x) = +\infty. \tag{2.3}$$

Используя определение коэффициентов $b_n$ и учитывая, что каждая частичная сумма $Q_{2m}(x)$ ряда (2.2) $m > s$, в произвольной точке отрезка [0,1] принимает целочисленные значения, получим

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=2^s+1}^{m} b_n \chi_n(x) = -1 \text{ почти всюду на } (a, b). \tag{2.4}$$

Пусть $N$ и $M$—целые числа $N > M > s+1$. Обозначим

$$\left.\begin{aligned} &G(N) = \bigcup_{i=s+1}^{N} (\{x:\ Q_{2m}(x) = -1\} \setminus \{x:\ Q_{2m-1}(x) \neq -1\})^{\circ} \\ &G(N, M) = G(N) \setminus G(M),\ E(N) = \{(a,\ b) \setminus G(N)\}. \end{aligned}\right\}^{*} \tag{2.5}$$

Из (2.4) следует, что для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует число $N$ такое, что $\mu\{G(N)\} > b - a - \varepsilon$.

Легко проверить справедливость следующих соотношений:

$$\text{если } Q_{N_0}(x_0) = -1, \text{ то } Q_N(x_0) = -1, \text{ при } N > N_0, \tag{2.6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{если } Q_N(x_0) > -1, \text{ то } S_{2N}(x_0) = Q_N(x_0), \text{ и если} \\ &S_{2N}(x_0) > -1, \text{ то } Q_N(x_0) = S_{2N}(x_0), \text{ где } x_0 \in \left\{x:\ x \neq \frac{l}{2^k},\ 0 \leqslant l \leqslant 2^k\right\} \end{aligned}\right\}, \tag{2.7}$$

ясно, что

$$\left.\begin{aligned} &(\{x:\ Q_{2m}(x) = -1\} \setminus \{x:\ Q_{2m-1}(x) = -1\})^{\circ} = \bigcup_{i\in B} \Delta_{n_i}^{(2)}, \text{ где} \\ &\{n_i\}_{i\in B} \text{ — некоторое подмножество множества } \{n:\ 2^{m-1}+1 \leqslant n \leqslant 2^m\} \end{aligned}\right\}. \tag{2.8}$$

В работе [6] была доказана следующая

Лемма 1. Для произвольного числа $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, существуют натуральное число $N$ и перестановка $(\nu_{2^s+1}, \nu_{2^s+2}, \cdots, \nu_{2^N})$ последовательности $(2^s+1, 2^s+2, \cdots, 2^N)$ такие, что

1) $-1 < \sum_{i=2^s+1}^{m} b_{\nu_i} \chi_{\nu_i}(x) \leqslant 1$, при $x \in G(N)$, $2^s+1 \leqslant m \leqslant 2^N$,

2) $\mu\{G(N)\} > b - a - \varepsilon$,

3) $Q_N(x) = -1$, при $x \in G(N)$; $b_{\nu_i} \chi_{\nu_i}(x) = 0$, при $x \overline{\in} (a, b)$,

4) $G(N)$ является объединением конечного числа интервалов Хаара.

Отметим, что полиномы $Q_N(x)$ ранее были рассмотрены в работах [3], [4], а Р. И. Овсепян (см. [5]) доказал, что для любого $m$, $2^s < m \leqslant 2^N$ и $x \in G(N)$

---

* Здесь полагаем $Q_{2^s}(x) = 0$, при $x \in [0,1]$

$$\sum_{n=m}^{2^N} b_{2^N-n+m}\chi_{2^N-n+m}(x)\leqslant 0.$$

В настоящей работе нам понадобится следующая

Лемма 2. *Для произвольного числа* $\delta$, $\delta>0$ *и* $N$ *существует полином*

$$P_N(x)=\sum_{n=2^s+1}^{2^N} d_n^{(N)}\chi_n(x),$$

*обладающий свойствами:*

1. $d_n^{(N)}\chi_n(x)=0$, *при* $x\overline{\in}(a, b)$, $2^s<n\leqslant 2^N$,
2. $\max\limits_{a<x<b}|d_n^{(N)}\chi_n(x)|\leqslant\delta$ *для любого* $n$, $2^s<n\leqslant 2^N$,
3. $P_N(x)=C(N)$, *при* $x\in E(N)$,
4. $C(N)\to+\infty$, *при* $N\to\infty$.

## § 3. Доказательство леммы 2

Вначале заметим, что если для некоторого $i$, $i=1$ или $2$ $\Delta_n^{(i)}\overline{\subset}G(M)$, где $2^s<n\leqslant 2^M$, то $\Delta_n^{(i)}\overline{\subset}G(N)$, при любом $N$, $N>M$. (3.1)

Действительно, пусть $2^{N_1-1}<n\leqslant 2^{N_1}$, тогда из условия имеем

$$Q_{2^{N_1}}(x)=c\geqslant 0,\ \text{при}\ x\in\Delta_n^{(i)}.\ \text{Так как}$$

$$\int\limits_{\Delta_n^{(i)}}\sum_{n=2^{N_1}+1}^{2^N} b_n\chi_n(x)\,dx=0,\ \text{то равенство}\ \sum_{n=2^{N_1}+1}^{2^N} b_n\chi_n(x)=-c-1$$

не может иметь места всюду на $\Delta_n^{(i)}$ и следовательно $\Delta_n^{(i)}\overline{\subset}G(N)$.

Предложение 1. *Пусть* $2^s<m\leqslant 2^N$, *тогда*

$$\mu\{G(N)\cap\Delta_m^{(2)}\}\geqslant\mu\{G(N)\cap\Delta_m^{(1)}\}. \tag{3.2}$$

Действительно, в случае когда $\Delta_m^{(2)}\subset G(N)$ или $\Delta_m\cap(a, b)=\varnothing$, неравенство (3.2) очевидно. Пусть $\Delta_m^{(2)}\subset(a, b)$ и $\Delta_m^{(2)}\overline{\subset}G(N)$, тогда из (2.1) имеем

$$S_m(x)=S_m(t)-2,\ \text{при}\ x\in\Delta_m^{(2)}\ \text{и}\ t\in\Delta_m^{(1)}, \tag{3.3}$$

Так как

$$\sum_{n=m+1}^{2^r} a_n\chi_n(x)=\sum_{n=m+1}^{2^r} a_n\chi_n(x+\mu(\Delta_m^{(2)})),\ \text{при}\ x\in\Delta_m^{(1)},\ 2^r>m. \tag{3.4}$$

то получим

$$S_{2^r}(x) = S_{2^r}(x + \mu(\Delta_m^{(2)})) - 2, \text{ при } x \in \Delta_m^{(1)},\ 2^r > m.$$

Отсюда и из (2.2) следует

$$Q_{2^r}(x) \geqslant Q_{2^r}(x + \mu(\Delta_m^{(2)})), \text{ при } x \in \Delta_m^{(1)},\ m < 2^r.$$

Пусть $x_0$ — произвольная точка из множества $\Delta_m^{(1)} \cap G(N)$, тогда учитывая, что для произвольного $r$, $r > s$ имеем $Q_{2^r}(x) \geqslant -1$ всюду на $[0,1]$ получим

$$-1 = Q_{2^N}(x_0) \geqslant Q_{2^N}(x_0 + \mu(\Delta_m^{(2)})) \geqslant -1,$$

откуда $x_0 + \mu(\Delta_m^{(2)}) \subset \Delta_m^{(2)} \cap G(N)$ и, следовательно

$$\Delta_m^{(1)} \cap G(N) + \mu(\Delta_m^{(2)}) \subset \Delta_m^{(2)} \cap G(N).$$

Отсюда легко следует неравенство (3.2).

Предложение 2. *Пусть $N > M > s$ и $2^s < r \leqslant 2^N$. Если $\Delta_r^{(2)} \overline{\subset} G(N)$, то*

$$G(N, M) \cap \nabla_r^{(1)} + \mu(\nabla_r^1) = G(N, M) \cap \nabla_r^{(2)}.$$

При $\Delta_r \overline{\subset} (a, b)$, утверждение очевидно. Пусть $\Delta_r \cap (a, b)$ и $r = 2^l + l$, тогда из определения интервалов $\nabla_r^{(1)}$ и $\nabla_r^{(2)}$ имеем

$$\nabla_r^{(1)} = \Delta_j^{(2)},\quad \nabla_r^{(2)} = \Delta_{j+1}^{(1)},\ \text{где } j = 2^{l+1} + 2l - 1. \tag{3.5}$$

Так как $\Delta_r^{(2)} \overline{\subset} G(N)$, то

$$S_r(x) = S_r(t) - 2 > -1, \text{ при } x \in \Delta_r^{(2)},\ t \in \Delta_r^{(1)},$$

откуда $b_j = a_j$, $b_{j+1} = a_{j+1}$ и из (3.5) получим

$$Q_{2^l+2}(x) = Q_{2^l+2}(t) = \cos nt > -1 \text{ при } x \in \nabla_r^{(1)},\ t \in \nabla_r^{(2)}. \tag{3.6}$$

Пусть $n = 2^{l'} + l'$, $n > 2^{l+2}$ и $\Delta_n \subset \Delta_r^{(1)}$, тогда

$$\chi_n(x) = \chi_{n'}(x + \mu(\nabla_r^{(1)})), \text{ где } n' = n + 2^{l'-l-2},\ x \in \nabla_r^{(1)}.$$

Отсюда получим

$$S_{2m}(x) - S_{2^l+2}(x) = S_{2m}(x + \mu(\nabla_r^{(1)})) - S_{2^l+2}(x + \mu(\nabla_r^{(1)})) \text{ при } x \in \nabla_r^{(1)}. \tag{3.7}$$

Из (3.6) имеем $S_{2^l+2}(x) = Q_{2^l+2}(x)$ при $x \in \nabla_r^{(1)} \cup \nabla_r^{(2)}$, так как $x + \mu(\nabla_r^{(1)}) \subset \nabla_r^{(2)}$, при $x \in \nabla_r^{(1)}$, то равенство (3.7) примет вид

$$S_{2m}(x) = S_{2m}(x + \mu(\nabla_r^1)) \text{ при } x \in \nabla_r^{(1)}. \tag{3.8}$$

Пусть $x_0$ — произвольная точка из множества $G(N, M) \cap \nabla_r^{(1)}$. Тогда из (2.5) имеем, что существует номер $m$, $2^N \geqslant m > 2^M$ такой, что

$$Q_{2m}(x_0) = -1 \text{ и } Q_{2m'}(x_0) > -1 \text{ при } m' < m. \tag{3.9}$$

Отсюда и из (2.2) получим

$$S_{2^m}(x_0) = -1,\ S_{2^{m'}}(x_0) > -1, \text{ при } m' < m$$

и из (3.8) будем иметь

$$S_{2^m}(x_0 + \mu(\nabla_r^{(1)})) = -1,\ S_{2^{m'}}(x_0) > -1,$$

откуда

$$Q_{2^m}(x_0 + \mu(\nabla_r^{(1)})) = -1,\ Q_{2^{m'}}(x_0 + \mu(\nabla_r^{(1)})) > -1$$

и следовательно $x_0 + \mu(\nabla_r^{(1)}) \subset G(N, M) \cap \nabla_r^{(2)}$, в силу произвольности точки $x_0$

$$G(N, M) \cap \nabla_r^{(1)} + \mu(\nabla_r^{(1)}) \subset G(N, M) \cap \nabla_r^{(2)}.$$

Тем же путем легко установить обратное включение, откуда и последует справедливость предложения 2.

Легко убедиться, что в условиях предложения 2 справедливы условия

$$\left.\begin{aligned} G(N) \cap \nabla_r^{(1)} + \mu(\nabla_r^{(1)}) = G(N) \cap \nabla_r^{(2)} \\ E(N) \cap \nabla_r^{(1)} + \mu(\nabla_r^{(1)}) = E(N) \cap \nabla_r^{(2)} \end{aligned}\right\}. \tag{3.10}$$

Пусть $M$ и $N$ — натуральные числа, $s < M < N$. Далее обозначим через $A_1^{(M,N)}$, $A_2^{(M,N)}$, $A_3^{(M,N)}$ подмножества натуральных чисел $n$, $2^s < n \leqslant 2^N$, удовлетворяющие условиям

$$A_1^{(M,N)} = \{n:\ \Delta_n^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing,\ \Delta_n^{(2)} \subset G(N, M)\}, \tag{3.11}$$

$$A_2^{(M,N)} = \{n:\ \Delta_n^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing,\ \Delta_n^{(2)} \cap G(N, M) \neq \varnothing,\ n \overline{\in} A_1^{(M,N)}\}. \tag{3.12}$$

$$A_3^{(M,N)} = \{n:\ 2^s < n \leqslant 2^N\} \setminus [A_1^{(M,N)} \cup A_2^{(M,N)}]. \tag{3.13}$$

Заметим, что

$$\nabla_n^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing,\ \nabla_n^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing, \text{ при } n \in A_2^{(M,N)}. \tag{3.14}$$

Вначале покажем, что

$$\Delta_n^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing \text{ при } n \in A_2^{(M,N)}. \tag{3.15}$$

Действительно, если (3.15) не имеет места, то из (3.12) получим

$$\Delta_n^{(2)} \subset G(N),\ \Delta_n^{(2)} \cap G(M) \neq \varnothing,\ \Delta_n^{(2)} \overline{\subset} G(M). \tag{3.16}$$

Так как $G(M)$ является объединением интервалов Хаара, длина которых не меньше чем $2^{-M}$ и из двух интервалов Хаара, имеющих общую точку, один содержится в другом, то из (3.16) будем иметь $n < 2^M$. Откуда, учитывая (3.1), получим $\Delta_n^{(2)} G \overline{\subset} (N)$. Полученное противоречие доказывзет справедливость условия (3.15). Далее из (3.12) легко убедиться, что $n < 2^{N-1}$. Полагая $n = 2^i + k$, из (3.15) следует $Q_{2^{i+1}}(x) = c \geqslant 0$. Поскольку $\nabla_n^{(2)} = \Delta_{2^{i+1}+2k}^{(1)}$, то из определения $b_n$ вытекает, что $Q_{2^{i+2}}(x) = c + 1 \geqslant 1$, при $x \in \nabla_n^{(2)}$, следовательно, $\nabla_n^{(2)} \overline{\subset} G(i+2)$

и из (3.1) $\nabla_n^{(2)} \subset G(N)$ или $\nabla_n^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing$. Учитывая (3.10) будем иметь $E(N) \cap \nabla_n^{(1)} \neq \varnothing$. Условие (3.14) доказано.

Рассмотрим полином

$$P^{(M,N)}(x) = \sum_{n=2^s+1}^{2^N} d_n^{(M,N)} \chi_n(x),$$

где коэффициенты $d_n^{(M,N)}$ определены методом индукции. А именно, предположим, что определены коэффициенты $d_n^{(M,N)}$ при всех $n$, $m+1 < n \leqslant 2^N$. Положим

а) $d_m^{(M,N)} = 0$, при $m \in A_3^{(M,N)}$,

б) $d_m^{(M,N)} \chi_m(x) = \delta$, при $x \in \Delta_m^{(1)}$ и $m \in A_1^{(M,N)}$,

в) в случае, когда $m \in A_2^{(M,N)}$, берем

$$d_m^{(M,N)} = \frac{P_{m+1}^{(M,N)}(x) - P_{m+1}^{(M,N)}(t)}{2 \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |\chi_m(x)|}, \text{ где}$$

$$P_{m+1}^{(M,N)} = \sum_{n=2^N}^{m+1} d_n^{(M,N)} \chi_n(x), \quad x \in \Delta_m^{(2)} \cap E(N), \quad t \in \Delta_m^{(1)} \cap E(N).$$

Для того чтобы убедиться, что в случае в) $d_m^{(M,N)}$ не зависит от выбора точек $x$ и $t$, нам нужно доказать следующее

Предложение 3. *Для произвольного $m$, $2^s < m \leqslant 2^N$ справедливо условие*

$$P_m^{(M,N)}(x) = c_m^{(M,N)}, \text{ при } x \in \Delta_m \cap E(N). \tag{3.17}$$

Действительно, учитывая, что два интервала Хаара—либо не имеют общих точек, либо один содержит другой, из (2.5) легко убедиться в выполнении одного из следующих четырех условий: при $m \in \{m\colon 2^{N-1}+1 \leqslant m \leqslant 2^N\}$

$$\text{I } m \in A_1^{(M,N)}, \text{ II } \Delta_m \subset G(N), \text{ III } \Delta_m \subset E(N), \text{ IV } \Delta_m \cap (a, b) = \varnothing,$$

откуда

$$m \in A_1^{(M,N)} \cup A_3^{(M,N)}, \text{ при } m \in \{m\colon 2^{N-1}+1 \leqslant m \leqslant 2^N\}. \tag{3.18}$$

При указанных значениях $m$ справедливость условия (3.17) очевидна. Положим, что (3.17) имеет место при $m \in \{m\colon 2^s+1 \leqslant j < m \leqslant 2^N\}$ и докажем его справедливость при $m = j$.

Если $\Delta_j^{(2)} \subset G(N, M)$, то $\Delta_j \cap E(N) = \Delta_j^{(1)} \cap E(N)$ и выполнение условия (3.17) следует из того, что $P_{j+1}^{(M,N)}(x) = \mathrm{const}$, при $x \in \Delta_j^{(1)} \cap \cap E(N)$.

Отсюда получим (3.17), при $m = j$, $j \in A_1^{(M,N)}$.

Полагая $j \in A_2^{(M,N)}$, учитывая индукционное предположение и определение $d_j^{(M,N)}$, легко убедиться в справедливости условия (3.17), при $j=m$.

Пусть теперь $j \in A_3$, тогда выполняется одно из следующих условий:

$$\Delta_j \cap (a, b) = \varnothing, \ \Delta_j^{(1)} \subset G(N), \ \Delta_j^{(2)} \subset E(N) \cup G(M).$$

В первом случае (3.17) очевидно, а во втором оно следует из того, что согласно предложению 1 имеет место соотношение $\Delta_j \subset G(N)$.

Далее, пусть $\Delta_j^{(2)} \subset E(N) \cup G(M)$. В том случае, когда $\Delta_j^{(2)} \subset G(M)$ имеем $\Delta_j \cap E(N) = \Delta_j^{(1)} \cap E(N)$ и выполнение (3.17), при $m=j$ становится тривиальным. Пусть теперь $\Delta_j^{(2)} \not\subset G(M)$, $\Delta_j^{(2)} \subset E(N) \cup G(M)$, $j = 2^r + k$, $r < N-1$. Рассмотрим следующие множества:

$$\{\nabla_{j_i}^{(1)}, \nabla_{j_i}^{(2)}\}_{i=0}^{N-r-1}, \text{ где } j_0 = j; \ j_i = 2^{r+i} + 2^i k - \sum_{l=0}^{i-1} 2^l. \tag{3.19}$$

Иными словами, рассматриваются те интервалы, для которых

$$\nabla_{j_i}^{(1)} = \Delta_{j_{i+1}}^{(2)}, \ i=0, 1, \cdots, N-r-2. \tag{3.20}$$

Ясно, что

$$\Delta_j^{(1)} = \Delta_{j_{N-r-1}}^{(1)} \cup \bigcup_{i=0}^{N-r-2} (\nabla_{j_i}^{(1)}). \tag{3.21}$$

Из (3.20), (2.10), учитывая, что $\nabla_{j_i}^{(2)} = \Delta_{j_{i+1}+1}^{(1)}$ при условии $\Delta_{j_i}^{(2)} \cap$ $\cap E(N) \neq \varnothing$, используя предложение 1, получим

$$\Delta_{j_i}^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing \Rightarrow \nabla_{j_i}^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing \Rightarrow \Delta_{j_i}^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta_{j_{i+1}}^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing. \tag{3.22}$$

Так как $\Delta_{j_0}^{(2)} \cap E(N) \neq \varnothing$, то условие (3.22) получим для любого $i$, $i = 1, 2, \cdots, N-r-1$. Отсюда учитывая, что $\nabla_{j_0}^{(2)} \subset E(N) \cup G(M)$, используя предложения 1 и 2, из (2.10) вытекает

$$\nabla_{j_0}^{(2)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow \nabla_{j_0}^{(1)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow \Delta_{j_1}^{(2)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \nabla_{j_1}^{(2)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow \Delta_{j_1}^{(1)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow \cdots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \nabla_{j_{N-r-2}}^{(2)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow \nabla_{j_{N-r-2}}^{(1)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta_{j_{N-r-1}}^{(2)} \cap G(N, M) = \varnothing \Rightarrow \Delta_{j_{N-r-1}}^{(1)} \cap G(N, M) = \varnothing,$$

и из (3.21) $\Delta_j^{(1)} \subset E(N) \cup G(M)$, откуда $\Delta_j \subset E(N) \cup G(M)$. Следовательно, $n \in A_3^{(M,N)}$, при $n \in \{n: n > j, \ \Delta_n \subset \Delta_j\}$, отсюда $P_j^{(M,N)}(x) = 0$, при $x \in \Delta_j$. Предложение 3 полностью доказано.

Предложение 4. *Пусть* $m \in A_2^{(M,N)}$, $m = 2^l + k$, $1 \leqslant k < 2^l$. *Тогда*

$$P_{2^j+1}^{(M,N)}(t) = P_{2^j+1}^{(M,N)}(t + \mu(\nabla_m^{(1)})), \text{ где } j \geqslant i+2,\ t \subset \nabla_m^{(1)}. \tag{3.23}$$

Доказательство. Из (3.18) имеем $i \leqslant N-2$. При $j \geqslant N$ полагаем $P_{2^j+1}(x)=0$ на $[0,1]$. Пусть при некотором $n$, $n > m$ имеем $\Delta_n \subset \nabla_m^{(1)}$, тогда, используя предложение 2, получим

$$[G(N, M) \cap \Delta_n^{(i)}] + \mu(\nabla_m^{(1)}) = G(N, M) \cap [\Delta_n^{(i)} + \mu(\nabla_m^{(1)})] =$$

$$= G(N, M) \cap \nabla_{n+\alpha_n}^{(i)}, \text{где } \alpha_n = \frac{\mu(\nabla_m^{(1)})}{\mu(\Delta_n)},\ i = 1 \text{ или } 2. \tag{3.24}$$

Аналогично из (2.10) следует

$$E(N) \cap \Delta_n^{(i)} + \mu(\nabla_m^{(1)}) = E(N) \cap \Delta_{n+\alpha_n}^{(i)},\ i=1, 2. \tag{3.25}$$

Отсюда легко видеть, что при $n \in \{n: \Delta_n \subset \Delta_m^{(1)}\}$ числа $n$ и $n+\alpha_n$ принадлежат одному и тому же множеству $A_l^{(M,N)}$ $(l=1, 2, 3)$. Так как при $n \in \{n: 2^{N-1}+1 \leqslant n \leqslant 2^N,\quad \Delta_n \subset \nabla_m^{(1)}\}$, из (3.18) следует, что $n \in A_1^{(M,N)} \cup A_2^{(M,N)}$, то из вышесказанного получим $d_n^{(M,N)} = d_{n+\alpha_n}^{(M,N)}$, используя равенство $\chi_n(x) = \chi_{n+\alpha_n}(x + \mu(\nabla_n^{(1)}))$, где $x \in \nabla_n^{(1)}$, получим

$$P_{2^{N-1}+1}^{(M,N)}(t) = P_{2^{N-1}+1}^{(M,N)}(t + \mu(\nabla_n^{(1)})), \text{ при } t \in \nabla_n^{(1)}.$$

Предположим, что (3.23) имеет место для некоторого $j = l$, $l > i+2$ и докажем его для $j = l-1$. Сначала убедимся, что

$$d_n^{(M,N)} = d_{n+\alpha_n}^{(M,N)}, \text{ при } n \in \{n: 2^{l-1}+1 \leqslant n \leqslant 2^l,\ \nabla_n \subset \nabla_m^{(1)}\}. \tag{3.26}$$

Если $n \in A_1^{(M,N)} \cup A_3^{(M,N)}$, то (3.26) следует из (3.24) и (3.25). Предположим $n \in A_2^{(M,N)}$, $n + \alpha_n \in A_2^{(M,N)}$. Из определения коэффициентов $d_n^{(M,N)}$ имеем

$$d_n^{(M,N)} = [P_{2^l+1}^{(M,N)}(x) - P_{2^l+1}^{(M,N)}(t)] \cdot [2 \max_{0<x<1} |\chi_n(x)|]^{-1},$$

$$d_{n+\alpha_n}^{(M,N)} = [P_{2^l+1}^{(M,N)}(y) - P_{2^l+1}^{(M,N)}(z)] \cdot [2 \max_{0<x<1} |\chi_{n+\alpha_n}(x)|]^{-1},$$

где

$$x \in \Delta_n^{(2)} \cap E(N),\ t \in \Delta_n^{(1)} \cap E(N),\ y \in \Delta_{n+\alpha_n}^{(2)} \cap E(N),\ z \in \Delta_{n+\alpha_n}^{(1)} \cap E(N).$$

Отсюда, используя (3.14), (3.24), (3.25), предложение 3 и индукционное предположение при указанных $x$, $y$, $z$, $t$, получим

$$P_{2^l+1}^{(M,N)}(x) = P_{2^l+1}^{(M,N)}(y),\quad P_{2^l+1}^{(M,N)}(t) = P_{2^l+1}^{(M,N)}(z),$$

откуда легко вывести (4.26) и (3.23). Тем самым предложение 4 доказано.

Предложение 5. *Для произвольного* $m$, $2^l+1 \leqslant m \leqslant 2^N$ *справедливо условие*

$$d_m^{(M,N)} \geqslant 0. \tag{3.27}$$

Действительно, при $m \in A_1^{(M,N)} \cup A_3^{(M,N)}$ условие (3.27) следует из определения $d_m^{(M,N)}$. Из (3.18) имеем $m \in A_1^{(M,N)} \cup A_3^{(M,N)}$ при $m \in \{m: 2^{N-1}+1 \leqslant m \leqslant 2^N\}$ и (3.2) справедливо.

Предположим $m \in A_2^{(M,N)}$ и (2.27) имеет место при $n+1 \leqslant m \leqslant 2^N$. Пусть $n = 2^l + k$. Так как

$$\nabla_n^{(1)} = \left(\frac{4k-3}{2^{l+2}}, \frac{4k-2}{2^{l+2}}\right) = \Delta_{2^{l+2}+4k-2},$$

$$\nabla_n^{(2)} = \left(\frac{4k-2}{2^{l+2}}, \frac{4k-1}{2^{l+2}}\right) = \Delta_{2^{l+2}+4k-1},$$

то учитывая, что $\nabla_n^{(1)} + \mu(\nabla_n^{(1)}) = \nabla_n^{(2)}$, из (3.14), используя предложения 3 и 4, получим

$$P_{2^{l+2}+1}^{(M,N)}(t) = P_{2^{l+2}+1}^{(M,N)}(x) = \text{const}, \text{ при } x \in \nabla_n^{(1)} \cup E(N), \tag{3.28}$$

$$t \in \nabla_n^{(2)} \cap E(N).$$

Принимая во внимание, что $\nabla_n^{(1)} = \Delta_{2^{l+1}+2k-1}^{(2)}$, $\nabla_n^{(2)} = \Delta_{2^{l+1}+2k}^{(1)}$ и индукционное предположение, из предложения 3 будем иметь

$$P_{2^{l+1}+1}^{(M,N)}(t) \leqslant P_{2^{l+1}+1}^{(M,N)}(x), \text{ при } t \in \Delta_n^{(1)} \cap E(N),\ x \in \Delta_n^{(2)} \cap E(N),$$

отсюда и из определения коэффициентов $d_n^{(M,N)}$ легко убедиться в справедливости условия (3.27).

Предложение 6. *Для любого* $m$, $m \in \{m: 2^l+1 \leqslant m \leqslant 2^N\}$ *справедливо условие*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |d_m^{(M,N)} \chi_m(x)| \leqslant \delta. \tag{3.29}$$

Действительно, в случае когда $m \in A_1^{(M,N)} \cup A_3^{(M,N)}$ (3.29) следует из определения $d_m^{(M,N)}$. При $m \in \{m: 2^{N-1}+1 \leqslant m \leqslant 2^N\}$ имеем $m \in A_1^{(M,N)} \cup A_3^{(M,N)}$ и (3.29) выполнено.

Предположим, что (3.29) установлено при $m$, $m > N$ и докажем его справедливость для $m = n$, $n \in A_2^{(M,N)}$.

Полагая $n = 2^l + k$, как и выше получим условие (3.28). Учитывая равенство $\mu(\nabla_n^{(1)}) = \mu(\nabla_n^{(2)}) = 2^{-(l+2)}$, легко убедиться, что для каждого из интервалов $\nabla_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, существует единственное число $k_i \in \{k: 2^{l+2} \geqslant k \geqslant 2^{l+1}+1\}$, для которого $\chi_{k_i}(x) \neq 0$, при $x \in \nabla_n^{(i)}$.

Отсюда, так как $|d_{k_i}^{(M,N)} \chi_{k_i}(x)| \leqslant \delta$ всюду на $[0,1]$, то из (3.28)

$$|P_{2^{l+1}+1}^{(M,N)}(t) - P_{2^{l+1}+1}^{(M,N)}(x)| \leqslant 2\delta \text{ при } x \in \Delta_n^{(1)} \cap E(N),\ t \in \nabla_n^{(2)} \cap E(N). \tag{3.30}$$

Из (3.14), используя предложение 3, получим справедливость (3.30), когда $t \in \Delta_n^{(2)} \cap E(N)$, $x \in \Delta_n^{(1)} \cap E(N)$. Отсюда, используя определение $d_n^{(M,N)}$ при $n \in A_2^{(M,N)}$, получим (3.29).

Рассмотрим следующий полином:

$$\sum_{n=2^N}^{2^s+1} d_n^{(M,N)} \chi_n(x) = P^{(M,N)}(x). \tag{3.31}$$

Из предложений 3, 5 и 6 имеем

$$P^{(M,N)}(x) = C(M, N), \text{ при } x \in E(N), \tag{3.32}$$

$$d_n^{(M,N)} \geqslant 0, \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |d_n^{(M,N)} \chi_n(x)| \leqslant \delta, \text{ при } 2^s + 1 \leqslant n \leqslant 2^N. \tag{3.33}$$

Полагая в (3.31) $M = s$, $G(s) = \varnothing$, получим, что полином (3.31) зависит только от $N$. Обозначим $d_n^{(s,N)} = d_n^{(N)}$, $P^{(s,N)}(x) = P_N(x)$, $C(s, N) = C(N)$, $A_i^{(s,N)} = A_i^{(N)}$, $i = 1, 2, 3$. Для завершения доказательства леммы 2 нам остается показать, что $C(N) \to \infty$, при $N \to \infty$. Вначале убедимся, что справедливо следующее

Предложение 7. *Пусть* $s < M < N$, *тогда*

$$P_N(x) = P_M(x) + P^{(M,N)}(x), \text{ при } x \in [0,1], \tag{3.34}$$

$$d_n^{(N)} = d_n^{(M)} + d_n^{(M,N)}, \text{ при } 2^{s+1} \leqslant n \leqslant 2^N. \tag{3.35}$$

Доказательство. Если $G(N, M) = \varnothing$, то (3.34) и (3.35) тривиальны. Пусть $G(N, M) \neq \varnothing$. При $n > 2^M$ имеем, либо $\Delta_n \subset G(M)$, либо $\Delta_n \cap G(M) = \varnothing$. В обоих случаях $n \in A_3^{(M)}$ и $d_n^{(M)} = 0$. Если $\Delta_n \cap G(M) = \varnothing$, то из условий $\Delta_n^{(1)} \cap E(N) = \varnothing$ или $\Delta_n \subset G(N) \Rightarrow \Delta_n \subset \Delta_n \cap G(M, N)$ получим $n \in A_3^{(M,N)}$, $n \in A_3^{(N)}$. Пусть $\Delta_n^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing$, тогда (здесь пока $n > 2^M$)

$$\Delta_n^{(2)} \subset G(N) \Rightarrow \Delta_n^{(2)} \subset G(M, N), \ \Delta_n^{(2)} \cap G(N) = \Delta_n^{(2)} \cap G(M, N), \tag{3.36}$$

откуда $n \in A_{i_0}^{(N)} \Rightarrow n \in A_{i_0}^{(M,N)}$ ($i_0 = 1, 2$ или 3) и получим (3.35), при $n > 2^M$. Когда $n \in A_1^{(N)}$ или $n \in A_1^{(N)}$, при $2^s < n \leqslant 2^M$ легко убедиться в справедливости (3.35). Из (3.14) имеем $n \in A_1^{(N)} \cup A_3^{(N)}$, при $2^{N-1} + 1 \leqslant n \leqslant 2^N$, таким образом, (3.35) установлено. Предположим, что формула (3.35) имеет место при $n$, $n > m > 2^s + 1$. Легко убедиться в справедливости следующего соотношения:

$$m \in A_2^{(N)} \Rightarrow \left| \begin{array}{ll} \text{либо} & m \in \{n:\ n \in A_2^{(M)},\ \ n \in A_2^{(M,N)}\}, \\ \text{либо} & m \in \{n:\ n \in A_1^{(M)},\ \ n \in A_2^{(M,N)}\}, \\ \text{либо} & m \in \{n:\ n \in A_2^{(M)},\ \ n \in A_3^{(M,N)}\}. \end{array} \right. \tag{3.37}$$

Действительно

$$m \in A_2^{(N)} \Rightarrow m \in \{n:\ \Delta_n^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing,\ \Delta_n^{(2)} \cap G(N) \neq \varnothing,\ \Delta_n^{(2)} \subset G(N)\}-$$

Имеем

$$\Delta_n^{(1)} \cap E(M) \supset \Delta_n^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing.$$

$$\Delta_n^{(2)} \supseteq G(N) \Rightarrow \Delta_n^{(2)} \supseteq G(M) \cup G(N, M),$$

$$\Delta_n^{(2)} \cap G(N) = \Delta_n^{(2)} \cap [G(M) \cup G(N, M)] \neq \varnothing.$$

Из последнего условия следует, что хотя бы одно из множеств $G(M) \cap \Delta_n^{(2)}$ и $G(N, M) \cap \Delta_n^{(2)}$ не пусто, откуда получим справедливость соотношения (3.37)*. Из сделанного предположения следует

$$P_{m+1}^{(N)}(x) = P_{m+1}^{(M)}(x) + P_{m+1}^{(M,N)}(x), \quad x \in [0,1]. \tag{3.38}$$

Из определения коэффициентов $d_m^{(n)}$ из (3.38) получим

$$\left. \begin{aligned} d_m^{(N)} &= \frac{P_{m+1}^{(M)}(t) - P_{m+1}^{(M)}(x)}{2 \max\limits_{0 \le x \le 1} |\chi_m(x)|} + \frac{P_{m+1}^{(M,N)}(t) - P_{m+1}^{(M,N)}(x)}{2 \max\limits_{0 \le x \le 1} |\chi_m(x)|}, \text{ где} \\ x &\in \Delta_m^{(1)} \cap E(N) \subset \Delta_m^{(1)} \cap E(M), \; t \in \Delta_m^{(2)} \cap E(N) \subset \Delta_m^{(2)} \cap E(M) \end{aligned} \right| . \tag{3.39}$$

При $m \in \{n:\ n \in A_2^{(M)},\ n \in A_2^{(M,N)}\}$ из (3.39) получим справедливость формулы (3.35). Если $m \in A_1^{(M)}$, то имеем $n \in A_3^{(M)}$, при $n \in \{n: \Delta_n \subset \Delta_m\}$, откуда $P_{m+1}^{(M)}(x) = 0$, при $x \in [0,1]$, и условие (3.35) выполнено. Тем же путем докажем равенство (3.35) при $m \in \{n:\ n \in A_3^{(M)},\ n \in A_2^{(M,N)}\}$. Остается доказать условие (3.35) при $2^s + 1 \leqslant n \leqslant 2^M$ и $n \in A_1^{(N)} \cup A_3^{(N)}$.

Ясно, что

$$n \in A_3^{(N)} \Rightarrow n \in [\{n:\ \Delta_n^{(2)} \cap G(N) = \varnothing\} \cup \{n:\ \Delta_n^{(1)} \cap E(N) = \varnothing\}].$$

Так как $n \leqslant 2^M$, то из (3.1) последует

$$n \in \{n:\ \Delta_n^{(1)} \cap E(N) = \varnothing\} \Rightarrow n \in \{n:\ \Delta_n^{(1)} \cap E(M) = \varnothing\},$$

$$n \in \{n:\ \Delta_n^{(2)} \cap G(N) = \varnothing\} \Rightarrow n \in \{n:\ \Delta_n^{(2)} \cap [G(N, M) \cup G(M)] = \varnothing\}.$$

Отсюда в обоих случаях $n \in A_3^{(M)}$, $n \in A_3^{(M,N)}$, откуда получим (3.35). Легко убедиться, что при $2^s + 1 \leqslant n \leqslant 2^M$

$$n \in A_1^{(N)} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{либо } n \in \{n:\ n \in A_3^{(M)},\ n \in A_1^{(M,N)}\} \\ \text{либо } n \in \{n:\ n \in A_1^{m},\ n \in A_3^{(M,N)}\}, \end{array} \right.$$

откуда вытекает (3.35).

Теперь покажем, что $C(N) \to \infty$, когда $N \to \infty$. Для этого достаточно доказать, что для произвольного целого числа $M$, $M > 0$ существует натуральное число $N_0$, $N_0 > M$, такое, что $C(N) > C(M) + \frac{\delta}{2}$ как только $N > N_0$.

---

* Используя соотношение $G(M, N) = \varnothing$ можно показать, что $\{n:\ n \in A_2^{(M)},\ n \in A_3^{(M)}\} = \varnothing$, но легче установить справедливость формулы (3.35) при $m \in \{n:\ n \in A_2^{(M)},\ n \in A_3^{(M,N)}\}$.

Для $M$, $M > s$ выберем $N_0$ так, чтобы

$$\mu\{G(M, N_0)\} \geqslant \frac{\mu\{E(M)\}}{2}.$$

Пусть $B$ будет множеством натуральных чисел, для которого справедливо следующее условие:

$$G(M, N) = \bigcup_{i \in B} \Delta_i^{(2)}, \text{ где } N \text{ некоторое целое число.}$$

Ясно, что $i \in \{i: 2^{M} + 1 \leqslant i \leqslant 2^N\}$, при $i \in B$.

Через $B_0$ обозначим подмножество множества $B$, для которого

$$G(M, N) \subset \bigcup_{i \in B_0} \Delta_i, \ \Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing, \text{ при } i \neq j, \ i, j \in B_0. \tag{3.40}$$

Введем следующие обозначения:

$$e_n = \begin{cases} d_n^{(M, N)}, & \text{при } n \in \{n: \Delta_n \subset \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i\} \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{3.41}$$

$$e_n' = \begin{cases} d_n^{(M, N)}, & \text{при } n \in \{n: d_n^{(M, N)} \neq e_n\} \\ 0, & \text{при } n \in \{n: d_n^{(M, N)} = e_n\}. \end{cases} \tag{3.42}$$

Ясно, что

$$e_n + e_n' = d_n^{(M, N)}, \ 2^s + 1 \leqslant n \leqslant 2^N, \tag{3.43}$$

$$\sum_{n=2^N}^{2^s+1} e_n \chi_n(x) + \sum_{n=2^N}^{2^s+1} e_n' \chi_n(x) = P^{(M, N)}(x), \text{ при } x \in [0,1]. \tag{3.44}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{n=2^N}^{2^s+1} e_n \chi_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ при } x \overline{\subset} \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i \\ k_i, \text{ при } x \in \Delta_i \cap E(N), \ i \in B_0. \end{cases}$$

Убедимся, что $k_i \geqslant \delta$ при любом $i$, $i \in B_0$. Действительно, из условия $B_0 \subset B$ следует, что $\Delta_i^{(2)} \subset G(M, N)$, при $i \in B_0$. Отсюда и из (2.5), (2.8) и (3.1) легко вытекает, что $\Delta_i^{(1)} \cap E(N) \neq \varnothing$ и $i \in A_1^{(M, N)}$, при $i \in B_0$. Следовательно, $e_i \chi_i(x) = d_i^{(M, N)} \chi_i(x) = \delta$, при $x \in \Delta_i^{(1)}$, $i \in B_0$.

Учитывая, что $e_n \geqslant 0$, при $n \in \{n: n \geqslant i, \Delta_n \subset \Delta_i, i \in B_0\}$ и $e_n \chi_n(x) = 0$ при $x \in \Delta_i$, $n \in \{n: n < i, \Delta_n \cap \Delta_i \neq \varnothing, i \in B_0\}$, используя предложение 1

$$\int\limits_{E(N) \cap \Delta_i} \sum_{n=2^N}^{2^s+1} e_n \chi_n(x)\, dx = \int\limits_{E(N) \cap \Delta_i} e_i \chi_i(x)\, dx + \sum_{n=2^N}^{i-1} \int\limits_{E(N) \cap \Delta_i} e_n \chi_n(x)\, dx \geqslant$$

$$\geqslant \delta\mu(E(N) \cap \Delta_i), \text{ откуда } k_i \geqslant \delta.$$

Определим функцию $F(x)$ следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} k_i, \text{ при } x \in E(M) \cap \Delta_i, \ i \in B_0 \\ \sum\limits_{n=2^N}^{2^s+1} e_n \chi_n(x), \text{ при } x \overline{\in} E(M) \cap \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i. \end{cases} \tag{3.45}$$

Ясно, что

$$E(M) = E(N) \cup \{E(M) \cap G(M, N)\} = E(N) \cup \{E(M) \cap \bigcup_{i \in B_0} \Delta_i\}.$$

Учитывая, что $e_n' = 0$, при $n \in \{n\colon \Delta_n \overline{\subset} \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i\}$ и следовательно,

$$\left.\sum_{n=2^N}^{2^s+1} e_n' \chi_n(x)\right| = \text{const на каждом интервале } \Delta_i, \ i \in B_0,$$

то используя предложение 3, нетрудно убедиться в справедливости следующего соотношения:

$$F(x) + \sum_{i=2^N}^{2^s+1} e_n' \chi_n(x) = P^{(M, N)}(t) - C(M, N),$$

при $x \in E(M)$, $t \in E(N)$.

Так как $e_n' \geqslant 0$, то из предложения 1

$$\int\limits_{E(M)} e_n' \chi_n(x)\, dx \geqslant 0, \ 2^s + 1 \leqslant n \leqslant 2^M,$$

откуда, из условий $F(x) \geqslant \delta$ при $x \in E(M) \cap \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i$, $F(x) = 0$, при $x \overline{\in} \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i$, получим

$$C(M, N) = \frac{1}{\mu(E(M))} \int\limits_{E(M)} \left| F(x) + \sum_{n=2^N}^{2^s+1} e_n' \chi_n(x) \right| dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\mu\,[E(M)]} \int\limits_{E(M) \cap \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i} F(x)\, dx \geqslant \frac{\delta \cdot \mu\,[E(M) \cap \bigcup\limits_{i \in B_0} \Delta_i]}{\mu\,[E(M)]} \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

Из предложения 6 имеем

$$C(N) = C(M) + C(N, M) \geqslant C(M) + \frac{\delta}{2} \text{ как только } N > N_0.$$

Тем самым лемма 2 полностью доказана.

Пусть $\Omega$ — некоторое конечное подмножество натуральных чисел, а $(\ni)\,\Omega$ есть множество $\Omega$, упорядоченное некоторым способом, то есть $(\ni)$ — некоторый закон, устанавливающий порядок между произвольными парами элементов из $\Omega$, удовлетворяющий условиям

i) если $\{m, n, k\} \subset \Omega$ и $m \dashv n$, $n \dashv k$, то $m \dashv k$,

ii) $m \in \Omega$, $n \in \Omega$, $m \neq n$, $m \prec n$, то $n \not\prec m$,

iii) если $m \in \Omega$, то $m < m$.

Пусть

$$(\sigma)\ T(x) = \sum_{i \in (\sigma)\ \Omega} a_i \chi_i(x).$$

Обозначим

$$(\sigma)\ T^*(x) = \sup_{j \in \Omega} |S_j(x)|,\ \Omega(T) = \Omega,$$

где $S_j(x)$ — частные суммы полинома $(\sigma)\ T(x)$, согласованные с упорядочением $(\sigma)$, то есть

$$S_j(x) = \sum_{i \in \{i:\, i \in \Omega,\ i \prec j\}} a_i \chi_i(x).$$

Замечание 1. Из определения множеств $A_1^{(N)}$, $A_2^{(N)}$, $A_3^{(N)}$ следует, что

$$P_N(x) = \sum_{n \in A_1^{(N)} \cup A_2^{(N)}} d_n^{(N)} \chi_n(x).$$

Если $(\sigma_N)$ — упорядочение множества $(2^s + 1, 2^s + 2, \cdots, 2^N)$ в лемме 1,

$$M = \{n:\, n \in (2^s + 1, 2^s + 2, \cdots, 2^N),\ b_n \neq 0,\ \Delta_n \cap G_{(N)} \neq \varnothing\},$$

$$(\sigma_N) Q_N(x) = \sum_{i \in (\sigma_N)\ M} b_i \chi_i(x),\ \text{при } x \in G_{(N)},$$

то легко убедиться, что $M = A_1^{(N)} \cup A_2^{(N)}$, откуда $\Omega(P_N) = \Omega(Q_N)$.

## § 4. Построение примера

Вначале докажем следующее

Предложение 8. Пусть $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{l} \omega_i$

$$f(x) = \{c_i,\ \text{при } x \in \omega_i,\ 1 \leqslant i \leqslant l\}$$
$$g(x) = \{\alpha_i,\ \text{при } x \in \omega_i,\ 1 \leqslant i \leqslant l\},$$

где $\omega_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$ — интервал Хаара и $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$, при $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant l$. Тогда для произвольных положительных чисел $\delta$, $N_0$ существуют множества $G$, $E$ и полиномы

$$(\sigma)\ Q(x) = \sum_{j=1}^{M} (\sigma_j)\ Q_j(x),\ P(x) = \sum_{j=1}^{M} P_j(x),$$

обладающие свойствами

1) множества $G$ и $E$ являются объединениями конечного числа интервалов Хаара

$$G \cap E = \varnothing,\ E \cup G \subset \Gamma,\ \bar{G} \cup \bar{E} \supset \bar{\Gamma},$$

2) $(\sigma_j)\ Q_j^*(x) \leqslant \delta$ и $(\sigma)\ Q(x) \leqslant \sup\limits_{x \in \Gamma} |f(x)| + \delta$, при $x \in G$,

3) $f(x) + (\sigma)\ Q(x) = 0$, при $x \in G$,

4) $\Omega(Q_j) = \Omega(P_j)$, $j = 1, 2, \cdots, M$; $\Omega(Q_j) \cap \Omega(Q_i) = \varnothing$, при $i \neq j$,

5) $g(x) = P(x)$, при $x \in E$,

6) $|d_n \chi_n(x)| \leqslant \delta$, при $x \in [0,1]$, $n \in \Omega(P_j)$, $j = 1, 2, \cdots, M$,

где $d_n$ — коэффициент при функции $\chi_n(x)$ в полиноме $P_j(x)$,

7) $(\sigma)\ Q_j^*(x) = P_j^*(x) = 0$, при $x \bar{\in} \Gamma$.

Доказательство. Не нарушая общности, можем полагать $\mu(\omega_i) < N^{-1}$. Выберем натуральное число $M$ так, чтобы $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant l} |c_i| \times M^{-1} < \delta$. Для интервала $\omega_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$ существуют множества $G(N(i, 1))$, $E(N(i, 1))$ и полиномы $(\sigma_i^{(1)})\ Q_{N(i,1)}(x)$, $P_{N(i,1)}(x)$, которые удовлетворяют условиям лемм 1 и 2, где $\varepsilon = \delta$, причем $N(i, 1)$ можно взять настолько большим, чтобы $C(N(i, 1)) > |\alpha_i|$. Обозначим

$$(\sigma_1)\ Q_1(x) = -\sum_{i=1}^{l} \frac{c_i}{M} (\sigma_i^{(1)})\ Q_{N(i,1)}(x),$$

$$P_1(x) = \sum_{i=1}^{l} \frac{\alpha_i}{C(N(i, 1))} P_{N(i,1)}(x),$$

$$G_1 = \bigcup_{i=1}^{l} G(N(i, 1)), \quad E_1 = \bigcup_{i=1}^{l} E(N(i, 1)).$$

Предположим, что уже построены полиномы $Q_j(x)$, $P_j(x)$, $1 \leqslant j < m < M$ и множества $\{G_i, E_i\}_{i=1}^{m}$, удовлетворяющие условиям

1') множества $G_i$, $E_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$ являются объединениями конечного числа интервалов Хаара

$$G_i \cup E_i \subset G_{i-1};\ G_i \cap E_i = \varnothing;\ G_{i-1} \subset \bar{G}_i \cup \bar{E}_i;\ E_i \cap E_j = \varnothing,$$
$$\text{при } i \neq j\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant m,$$

2') $\Omega(Q_j) = \Omega(P_j)$; $j = 1, 2, \cdots, m$; $\Omega(Q_j) \cap \Omega(Q_i) = \varnothing$, при $i \neq j$,

3') $Q_j(x) = -\dfrac{c_i}{M}$, при $x \in G_j \cap \omega_i$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant l$,

4') $(\sigma_j)\ Q_j^*(x) \leqslant \delta$, при $x \in G_j$,

5') $|d_n \chi_n(x)| \leqslant \delta$, при $x \in [0,1]$, $n \in \Omega(P_j)$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $d_n$ — коэффициент при функции $\chi_n(x)$ в полиноме $P_j(x)$,

6') $Q_j^*(x) = P_j^*(x) = 0$, при $x \bar{\in} \bar{G}_{j-1} \subset \bar{\Gamma}$,

$$7')\ \sum_{j=1}^{m} P_j(x) = g(x), \text{ при } x \in \bigcup_{j=1}^{m} E_j.$$

Множество $G_m$ можно представить в следующем виде:

$$G_m = \bigcup_{i=1}^{l_m} \omega_i^{(m)}, \quad \omega_i^{(m)} \cap \omega_j^{(m)} = \varnothing, \text{ при } i \neq j,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant l_m,$$

где $\omega_i^{(m)}$, $1 \leqslant i \leqslant l_m$ является интервалом Хаара и такой, что если

$$\omega_i^{(m)} = \left(\frac{q_i}{2^{p_i}}, \frac{q_i+1}{2^{p_i}}\right) \text{ и } n > 2^{p_i+1}, \text{ то } n \in \bigcup_{l=1}^{l} \Omega(Q_l),$$

$$f(x) = \text{const, при } x \in \omega_i^{(m)},$$

$$g(x) = \text{const, при } x \in \omega_i^{(m)}.$$

Для интервала $\omega_i^{(m)}$ и числа $\delta$ существуют полиномы

$$(\sigma_i^{(m+1)})\, Q_{N(i,\, m+1)}(x), \quad P_{N(i,\, m+1)}(x)$$

и множества $G_{N(i,\, m+1)}$, $E_{N(i,\, m+1)}$, удовлетворяющие условиям лемм 1 и 2, причем $N(i,\, m+1)$ можно взять настолько большим, чтобы

$$P_{N(i,\, m+1)}(x) > \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |g(t)| + \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \sum_{j=1}^{m} |P_j(t)|, \text{ при } x \in E_{N(i,\, m+1)}.$$

Выберем из каждого множества $\omega_i^{(m)} \cap E_{N(i,\, m+1)}$ некоторую точку $x_i$ и обозначим

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_{m+1})\, Q_{m+1}(x) &= -\sum_{i=1}^{l_m} (\sigma_i^{(m+1)})\, Q_{N(i,\, m+1)}(x)\, \frac{f(x_i)}{M} \\ P_{m+1}(x) &= \sum_{i=1}^{l_m} \frac{g(x_i) - \sum\limits_{j=1}^{m} P_j(x_i)}{P_{N(i,\, m+1)}(x_i)}\, P_{N(i,\, m+1)}(x) \\ G_{m+1} &= \bigcup_{i=1}^{l_m} G_{N(i,\, m+1)},\quad E_{m+1} = \bigcup_{i=1}^{l_m} E_{N(i,\, m+1)} \end{aligned}\right| . \tag{4.1}$$

Используя условия лемм 1 и 2, определения числа $M$ и интервалов $\omega_i^{(m)}$, из (4.1) легко получить, что полиномы $(\sigma_i)\, Q_i(x)$, $P_i(x)$ и множества $G_i$, $E_i$ удовлетворяют условиям 1′) — 7′) при $1 \leqslant i \leqslant m+1$.

Предположим, что указанным способом построены полиномы $(\sigma_i)\, Q_i(x)$, $P_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant M$ и множества $G_i$, $E_i$, $1 \leqslant i \leqslant M$, удовлетворяющие условиям 1′)—7′).

Обозначим

$$(\sigma)\, Q(x) = \sum_{i=1}^{M} (\sigma_i)\, Q_i(x), \quad P(x) = \sum_{i=1}^{M} P_i(x), \tag{4.2}$$

$$G = \bigcap_{i=1}^{M} G_i = G_M,\quad E = \bigcup_{i=1}^{M} E_i .$$

Отсюда и из 1') — 7') легко показать, что полиномы и множества в (4.2) удовлетворяют условиям предложения 8.

Пусть $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность монотонно убывающих положительных чисел, такая, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i < 1$.

Пусть $f(x) = \chi_1(x)$, $\delta = \delta_1$, $g(x) = \chi_1(x)$, $\Gamma = (0, 1)$, тогда существуют полиномы

$$(\varepsilon)\, Q(x) = \sum_{i=1}^{M} (\varepsilon_i)\, Q_i(x),\quad P(x) = \sum_{i=1}^{M} P_i(x)$$

и множества $G$ и $E$, удовлетворяющие условиям предложения 8. Обозначим

$$\left.\begin{array}{l} (\varepsilon_i)\, Q_i(x) = (\varepsilon_i^{(1)})\, Q_i^{(1)}(x),\ P_i(x) = P_i^{(1)}(x),\ P(x) = P_1(x) \\ (\varepsilon)\, Q(x) = (\varepsilon_1)\, Q_1(x),\ M = M_1,\ G = G_1,\ E = E_1 \end{array}\right| , \tag{4.3}$$

$$(\varepsilon_1)\, R_1(x) = \chi_1(x) + (\varepsilon_1)\, Q_1(x). \tag{4.4}$$

Из условий предложения 8 имеем

$$(\varepsilon_1)\, R_1(x) = 0,\ \text{при}\ x \in G_1,$$

$$(\varepsilon_1)\, R_1(x) = P_1(x) + (\varepsilon_1)\, Q_1(x),\ \text{при}\ x \in E_1,$$

$$(\varepsilon_1)\, R_1^{*}(x) \leqslant 1 + \delta,\ x \in G_1,$$

$$\Omega(Q_i^{(1)}) = \Omega(P_i^{(1)}),\ \Omega(Q_i^{(1)}) \cap \Omega(Q_j^{(1)}) = \varnothing,\ \text{при}\ i \neq j,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant M_1.$$

Предположим определены полиномы

$$\{(\varepsilon_i)\, R_i(x)\}_{i=1}^{n},\ P_n(x) = \sum_{i=1}^{M_n} P_i^{(n)}(x),\ (\varepsilon_n)\, Q_n(x) = \sum_{i=1}^{M_n} (\varepsilon_i^{(n)})\, Q_i^{(n)}(x)$$

и множества $\{G_i\}_{i=1}^{n}$, $\{E_i\}_{i=1}^{n}$, обладающие свойствами

а) каждое из множеств $G_i$, $E_i$, $i=1, 2, \cdots, n$ можно представить в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся интервалов Хаара,

б) $\overline{G}_1 \cup \overline{E}_1 = [0,1]$, $G_i \cap E_i = \varnothing$, при $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$G_i \cup E_i \subset G_{i-1},\quad \overline{G}_i \cup \overline{E}_i \supset G_{i-1},\ \text{при}\ 1 < i \leqslant n,$$

в) $(\varepsilon_i)\, R_i^{*}(x) = 0$, при $x \in \overline{G}_{i-2}$,

г) $R_i(x) = R_{i+1}(x)$, при $x \in E_i$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$,

$$R_i(x) = 0,\ \text{при}\ x \in G_i,\ i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$R_i^{*}(x) \leqslant 3(\delta_{i-1} + \delta_i),\ \text{при}\ x \in G_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

д) $(\varepsilon_i^{(n)})\, Q_i^{*(n)}(x) \leqslant \delta_n$, при $x \in G_n$,

е) $|d_m^{(n)}\chi_m(x)| \leqslant \delta_n$, при $x \in [0,1]$, $m \in \Omega(P_n)$, где

$d_m^{(n)}$ — коэффициент при функции $\chi_m(x)$ в полиноме $P_n(x)$,

ж) $\Omega(P_i^{(n)}) = \Omega(Q_i^{(n)})$, $i = 1, 2, \cdots, M_n$,

з) $R_n(x) = (\varepsilon_n)\, Q_n(x) + P_n(x)$, при $x \in E_n$,

и) $\max\{m: m \in \Omega(R_n)\} = \max\{m: m \in \Omega(Q_n)\}$,

к) $\Omega(R_i) \cap \Omega(R_j) = \varnothing$, при $j \geqslant i+2$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$.

Взяв

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma = G_{i-1}^{(n+1)},\ f(x) = Q_i^{(n)}(x),\ g(x) = Q_n(x) + P_n(x) - \sum\limits_{j=1}^{i-1}\overline{P}_j^{(n+1)}(x)\\ \delta = \delta_{n+1},\ N = \max\left\{n:\ n \in \bigcup\limits_{j=1}^{i-1}\Omega(Q_j^{(n+1)})\right\}\\ \quad (\text{при } i = 1 \text{ полагаем } \Gamma = G_n,\ g(x) = Q_n(x) + P_n(x)\\ \qquad N = \max\{n:\ n \in \Omega(Q_n)\}),\end{array}\right| \tag{4.5}$$

последовательно можно определить множества $\{G_i^{(n+1)}, E_i^{(n+1)}\}_{i=1}^{M_n}$ и полиномы

$$\left.\begin{array}{l}(\varepsilon_i^{(n+1)})\,\overline{Q}_i^{(n+1)}(x) = \sum\limits_{j=1}^{M_i^{(n+1)}}(\varepsilon_{i,j}^{(n+1)})\, Q_{i,j}^{(n+1)}(x),\ i = 1, 2, \cdots, M_n\\ \overline{P}_i^{(n+1)}(x) = \sum\limits_{j=1}^{M_i^{(n+1)}} P_{i,j}^{(n+1)}(x),\ i = 1, 2, \cdots, M_n\end{array}\right|, \tag{4.6}$$

удовлетворяющие всем условиям предложения 8.

Пусть

$$\Omega(P_n) = \{m_1, m_2, \cdots, m_r\}$$

и $d_{m_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ — коэффициент при функции $\chi_{m_i}(x)$ в полиноме $P_n(x)$. Положив

$$\Gamma = G_{M_n}^{(n+1)},\ f(x) = d_{m_1}\chi_{m_1}(x),\ \delta = \delta_{n+1},\ N = \max\left\{n: n \in \bigcup_{i=1}^{M_n}\Omega(P_i^{(n+1)})\right\}, \tag{4.7}$$

$$g(x) = Q_n(x) + P_n(x) - \sum_{i=1}^{M_n} P_i^{(n+1)}(x),$$

можно указать множества $G_{m_1}^{'(n+1)}$, $E_{m_1}^{'(n+1)}$ и полиномы

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_{m_1}^{'(n+1)})\, Q_{m_1}^{'(n+1)}(x) &= \sum_{i=1}^{M'_{m_1}} (\sigma_{m_1,i}^{'(n+1)})\, Q_{m_1,i}^{'(n+1)}(x)\\ P_{m_1}^{'(n+1)}(x) &= \sum_{i=1}^{M'_{m_1}} P_{m_1,i}^{'(n+1)}(x)\end{aligned}\right\}, \tag{4.8}$$

удовлетворяющие всем условиям предложения 8.

Предположим, что уже построены множества $\{G_{m_j}^{'(n+1)},\ E_{m_j}^{'(n+1)}\}_{j=1}^{l}$ и полиномы

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_{m_j}^{'(n+1)})\, Q_{m_j}^{'(n+1)}(x) &= \sum_{i=1}^{M_{m_j}} (\sigma_{m_j,i}^{'(n+1)})\, Q_{m_j,i}^{'(n+1)}(x)\\ &\qquad\qquad j = 1, 2, \cdots, l\\ P_{m_j}(x) &= \sum_{i=1}^{M'_{m_j}} P_{m_j,i}^{'(n+1)}(x)\end{aligned}\right\}. \tag{4.9}$$

Взяв

$$\Gamma = G_{m_l}^{'(n+1)},\ f(x) = d_{m_{l+1}} \chi_{m_{l+1}}(x),\ \delta = \delta_{n+1},$$

$$g(x) = Q_n(x) + P_n(x) - \sum_{i=1}^{M_n} P_i^{(n+1)}(x) - \sum_{j=1}^{l} P_{m_j}^{'(n+1)}(x), \tag{4.10}$$

$$N = \max\ \{n:\ n \in \Omega\,(P_{m_l}^{'(n+1)}(x))\},$$

согласно предложению 8 существуют множества $G_{m_{l+1}}^{'(n+1)}$, $E_{m_{l+1}}^{'(n+1)}$ и полиномы

$$(\sigma_{m_{l+1}}^{'(n+1)})\, Q_{m_{l+1}}^{'(n+1)}(x) = \sum_{i=1}^{M_{m_{l+1}}} (\sigma_{m_{l+1}}^{'(n+1)})\ Q_{m_{l+1}}^{'(n+1)}(x),$$

$$P_{m_{l+1}}^{'(n+1)}(x) = \sum_{i=1}^{M_{m_{l+1}}} P_{m_{l+1}}^{'(n+1)}(x), \tag{4.11}$$

удовлетворяющие условиям предложения 8.

Пусть указанным способом для каждой функции $d_{m_j} \chi_{m_j}(x)$, $j = 1, 2, \cdots, r$, построены множества $G_{m_j}^{'(n+1)}, E_{m_j}^{'(n+1)}$ и полиномы $P_{m_j}^{'(n+1)}(x)$, $Q_{m_j}^{'(n+1)}(x)$. Далее, пусть

$$(\sigma_n)\, Q_i^{(n)}(x) = \sum_{m \in (\sigma_i^{(n)})\, \Omega\,(Q_i^{(n)})} a_m\, \chi_m(x),\quad P_i^{(n)}(x) = \sum_{m \in \Omega\,(P_i^{(n)})} d_m\, \chi_m(x). \tag{4.12}$$

Учитывая равенство $\Omega\,(Q_i^{(n)}) = \Omega\,(P_i^{(n)})$, обозначим

$$(\sigma_{n+1})\, R_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{M_n}\Big\{ \sum_{m\in(\sigma_i^{(n)})\cup(Q_i^{(n)})} [(a_m+d_m)\chi_m(x) + (\sigma_m'^{(n+1)})\, Q_m'^{(n+1)}(x)] + (\sigma_i^{(n+1)})\overline{Q}_i^{(n+1)}(x)\Big\}, \tag{4.13}$$

$$\left.\begin{aligned} G_{n+1} &= \bigcap_{i=1}^{M_n} G_i^{(n+1)} \cap \bigcap_{i=1}^{r} G_{m_i}'^{(n+1)} = G_{m_r}'^{(n+1)} \\ E_{n+1} &= \bigcup_{i=1}^{M_n} E_i^{(n+1)} \cup \bigcup_{i=1}^{r} E_{m_i}'^{(n+1)} \end{aligned}\right\}. \tag{4.14}$$

Пусть

$$\{(\sigma_i^{(n+1)})\, Q_i^{(n+1)}(x)\}_{i=1}^{M_{n+1}}, \text{ где } M_{n+1} = \sum_{i=1}^{M_n} M_i^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{r} M_{m_k}' \tag{4.15}$$

есть некоторая нумерация следующего множества полиномов:

$$\{(\sigma_{i,j}^{(n+1)})\, \overline{Q}_{i,j}^{(n+1)}(x)\};\ (\sigma_{m_k,l}'^{(n+1)})\, Q_{m_k,l}'^{(n+1)}(x);\ 1 \leqslant i \leqslant M_n;\ 1 \leqslant j \leqslant M_i^{(n+1)},$$

$$k = 1, 2, \cdots, r;\ l = 1, 2, \cdots, M_k'\}. \tag{4.16}$$

Далее, пусть

$$\{P_i^{(n+1)}(x)\}_{i=1}^{M_{n+1}} \tag{4.17}$$

будет нумерацией множества

$$\{\overline{P}_{i,j}^{(n+1)}(x);\quad P_{m_k,l}'^{(n+1)}(x),\ 1 \leqslant i \leqslant M_n;\ 1 \leqslant j \leqslant M_i^{(n+1)}, 1 \leqslant k \leqslant r, 1 \leqslant l \leqslant M_k'\} \tag{4.18}$$

такой, что при фиксированном $i$, $j$ (или $k$, $l$) полиномы

$$(\sigma_{i,j}^{(n+1)})\, \overline{Q}_{i,j}^{(n+1)} \text{ и } \overline{P}_{i,j}^{(n+1)}(x) \text{ (или } (\sigma_{m_k,l}'^{(n+1)})\, Q_{m_k,l}'^{(n+1)}(x),\ \ P_{m_k,l}'(x))$$

в (4.15) и (4.17) имеют одинаковые номера.

Положим

$$(\sigma_{n+1})\, Q_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{M_{n+1}} (\sigma_i^{(n+1)})\, Q_i^{(n+1)}(x);\ P_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{M_n} P_i^{(n+1)}(x). \tag{4.19}$$

Используя условия 2), 3) предложения 8 из д), е) и из (4.7)—(4.12), а также из определения полиномов $(\sigma_i^{(n+1)})\, Q_i^{(n+1)}(x)$, легко получить, что

$$(\sigma_{n+1})\, R_{n+1}(x) = 0, \text{ при } x \in G_{n+1},$$

$$(\sigma_{n+1})\, R_{n+1}^*(x) \leqslant 3(\delta_n + \delta_{n+1}), \text{ при } x \in G_{n+1}.$$

Ясно, что

$$(\sigma_{n+1})\, R_{n+1}(x) = (\sigma_n)\, Q_n(x) + P_n(x) + Q_{n+1}(x), \text{ при } x \in [0,1]. \tag{4.20}$$

Так как $Q_{n+1}(x) = 0$, при $x \in G_n$, то из з)

$$(\sigma_{n+1})\, R_{n+1}(x) = (\sigma_n)\, R_n(x), \text{ при } x \in E_n.$$

Докажем, что

$$(\sigma_{n+1})\, R_{n+1}(x) = (\sigma_{n+1})\, Q_{n+1}(x) + P_{n+1}(x), \text{ при } x \in E_{n+1}.$$

Из (4.20) следует, что достаточно установить следующее равенство:

$$(\sigma_n)\, Q_n(x) + P_n(x) = P_{n+1}(x), \text{ при } x \in E_{n+1}. \tag{4.21}$$

Рассмотрим множество $E_{i_0}^{(n+1)}$, $1 \leqslant i_0 \leqslant M_n$. Так как

$$G_{i_0}^{(n+1)} \cap E_{i_0}^{(n+1)} = \varnothing,\ G_{i_0}^{(n+1)} \supset G_i^{(n+1)} \supset G_{m_k}^{(n+1)}, \text{ при } i_0 < i \leqslant M_n,\ 1 \leqslant k \leqslant r,$$

то из определения множества Г, используя условия 7) и 5) предложения 8, при $x \in E_{i_0}^{(n+1)}$ имеем

$$P_{n+1}(x) = \sum_{l=1}^{i_0} P_l^{(n+1)}(x) = P_{i_0}^{(n+1)}(x) + \sum_{i=1}^{i_0-1} P_i^{(n+1)}(x) =$$

$$= (\sigma_n)\, Q_n(x) + P_n(x) - \sum_{l=1}^{i_0-1} P_l^{(n+1)}(x) + \sum_{i=1}^{i_0-1} P_i^{(n+1)}(x) =$$

$$= (\sigma_n)\, Q_n(x) + P_n(x).$$

Тем же способом легко установить равенство (4.21) при $x \in E_{m_{i_0}}^{(n+1)}$.
Из определения числа $N$ в (4.5), (4.7) (4.10) следует

$$\left.\begin{aligned} &\max\{m\colon m \in \Omega(R_{n+1})\} = \max\{m\colon m \in \Omega(Q_{n+1})\} \\ &\min\{m\colon m \in \Omega(Q_{n+1})\} > \max\{m\colon m \in \Omega(R_n)\} \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

и

Если теперь тем же путем определим полином $R_{n+2}(x)$, то из (4.22) получим

$$\Omega(R_n) \cap \Omega(R_{n+2}) = \varnothing.$$

Условия а), б), в), д), ж) при $1 \leqslant i \leqslant n+1$ легко проверить. Предположим, что указанным путем построены множества $\{G_i, E_i\}_{i=1}^{\infty}$ и полиномы $\{(\sigma_n)\, R_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, для которых имеют место условия а), б), в), г), к). Положим

$$L(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sigma_{2k})\, R_{2k}(x);\ T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sigma_{2k+1})\, R_{2k+1}(x), \tag{4.23}$$

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,\ E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Из условий б), в), г) следует равномерная сходимость к нулю на $G$ обоих рядов в (4.23), откуда $L(x) = T(x) = 0$, при $x \in G$. Рассмотрим множество $E_{n_0}$, $n_0 \geqslant 1$. Из условия б) имеем

$$E_{n_0} \subset G_{n_0-1} \subset G_{n_0-2} \subset \cdots \subset G_0,\ E_{n_0} \cap G_i = \varnothing, \text{ при } i \geqslant n_0.$$

Из в) и г) следует

$$(\sigma_i)\, R_i(x)=0, \text{ при } i \leqslant n_0,\ x \in E_{n_0},$$

$$(\sigma_i)\, R_i^*(x) = 0, \text{ при } i > n_0+2,\ x \in E_{n_0} \subset \overline{G}_{n_0},$$

$$(\sigma_{n_0})\, R_{n_0}(x) = (\sigma_{n_0+1})\, R_{n_0+1}(x), \text{ при } x \in E_{n_0},$$

откуда вытекает конечность функций $L(x)$ и $T(x)$ на $E_{n_0}$, а также, что

$$L(x) = T(x), \text{ при } x \in E_{n_0}, \text{ следовательно, и при } x \in E.$$

Остается доказать равенство $L(x) = T(x)$ на множестве $[0,1] \setminus (G \cup E)$. Вначале убедимся, что

$$[0,1] \subset \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{G}_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n\right), \text{ где } \overline{G}_0 = [0,1].$$

Действительно, пусть $x_0 \overline{\in} \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{G}_m$, тогда существует наименьшее число $m$, для которого $x_0 \overline{\in} \overline{G}_m$. Отсюда

$$x_0 \in \overline{G}_{m-1} \subset \overline{G}_m \cup \overline{E}_m \Rightarrow x_0 \in \overline{E}_m \Rightarrow x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n.$$

Пусть $x_0 \in G \cup E$*. Тогда имеет место одно из следующих трех условий:

I $\quad x_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{G}_n,\quad x_0 \overline{\in} \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n,$

II $\quad x_0 \in \bigcup_{n=0}^{\infty} \overline{G}_n,\quad x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n,$

III $\quad x_0 \overline{\in} \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{G}_n,\quad x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E}_n.$

Заметим, что поскольку

$$\chi_n(x_0) = \frac{1}{2}\,[\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} \chi_n(x) + \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \chi_n(x)], \text{ при } n = 1, 2, \cdots,$$

то

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_n)\, R_n(x_0) &= \frac{1}{2}\,[\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} (\sigma_n)\, R_n(x) + \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} (\sigma_n)\, R_n(x)]\ ,\ n = 1, 2, \cdots \\ (\sigma_n)\, R_n^*(x_0) &\leqslant \frac{1}{2}\,[\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} (\sigma_n)\, R_n^*(x) + \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} (\sigma_n)\, R_n^*(x)] \end{aligned}\right\} . \tag{4.24}$$

---

* Здесь мы предполагаем, что $x_0 \neq 1$ либо 0. В противном случае доказательство можно провести с небольшими изменениями приведенного.

Когда выполняется I, то $x_0$ является внутренней точкой множества $G_n$, $n=0, 1, 2, \cdots$. Действительно, при $n=0$ утверждение справедливо. Предположим оно имеет место, при $n=0, 1, \cdots, m$. Тогда $x_0$ является внутренней точкой множества $\overline{G}_{m+1} \cup \overline{E}_{m+1} = \overline{G}_m$. Учитывая соотношение $x_0 \overline{\in} E_m$, из а) легко получить существование интервалов $(\alpha_n, x_0)$ и $(x_0, \beta_n)$, для которых имеет место условие

$$\alpha_n < \beta_n, \ (\alpha_n, x_0) \subset G_n, \ (x_0, \beta_n) \subset G_n, \ n=0, 1, 2, \cdots.$$

Отсюда и из г) (4.23), (4.24) будем иметь $T(x_0) = L(x_0) = 0$.

Если имеет место II, то нетрудно убедиться, что существует единственное число $m$, для которого $x_0 \in \overline{E}_m$. Можно найти интервал $(\alpha, \beta) \subset E_m$, один конец которого совпадает с точкой $x_0$. Пусть для определенности $x_0 = \alpha$. Тогда из $x_0 \in \overline{G}_n$ следует существование интервала $(\gamma_n, x_0) \subset G_n$. Отсюда и из (4.24) б), в), г) получим

$$L(x_0) = T(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{R_m(x)}{2}.$$

При $x_0 = \beta$ рассуждения можно провести аналогично.

Пусть теперь имеет место III. Пусть $x_0 \in \overline{E}_m$, если $x_0$ является внутренней точкой множества $\overline{E}_m$, то равенство $T(x_0) = L(X_0)$ следует из г) и из того, что $E_m \cap E_n = \varnothing$ при $m \neq n$. Когда $x_0$ не является внутренней точкой множества $E_m$, то существует единственное число $n$, $n \neq m$, для которого $x_0 \in \overline{E}_n$. Отсюда нетрудно видеть, что $T(x_0) = L(x_0)$.

Тем самым установлено, что ряды в (4.23) всюду сходятся к одной и той же конечной функции.

Если коэффициент при функции $\chi_n(x)$ в полиноме $(\sigma_m)$ $R_m(x)$ обозначим через $a_n^{(m)}$, то из конструкции нетрудно видеть, что $|a_n^{(m)}| |\chi_n(x)| \leqslant \delta_m + \delta_{n+1}$, откуда $a_n^{(m)} = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, и тем самым наше утверждение полностью доказано.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 29.V.1978

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ. Հաարի սիստեմով տեղափոխված անդամներով ամենուրեք զուգամետ շարքերի գործակիցների մասին *(ամփոփում)*

*Աշխատանքում բերվում են Հաարի սիստեմով իրար հետ չհամընկնող շարքերի օրինակներ, որոնց գործակիցները ձգտում են զրոյի և անդամների որոշ, իրարից տարբեր դասավորության դեպքում ամենուրեք զուգամիտում են միևնույն ֆունկցիային։*

H. M. MOUSHEGHIAN. *On the coefficients of the series by Haar systems with displaced terms* (summary)

The paper gives an example of a pair of noncoinciding series by Haar systems with coefficients tending to zero and having the property that propper rearrangements of their terms result in the everywhere convergence to the same function.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян.* О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, Известия АН ССР, сер. матем., 28, 1964, 1391—1408.
2. *Ф. Г. Арутюнян.* О рядах по системам Хаара, ДАН Арм.ССР, LVII, № 2, 1973, 65—71.
3. *Ф. Г. Арутюнян.* Представление измеримых функций всюду сходящимися рядами, Мат. сборник, 90, 4, 1973, 483—500.
4. *М. Б. Петровская.* О нуль-рядах по системе Хаара и о множествах единственности, Известия АН СССР, сер. матем., 28, 1964, 773—798.
5. *Р. И. Овсепян.* О представлении функций ортогональными рядами, ДАН Арм.ССР LVII, № 1, 1973, 3—7.
6. *Г. М. Мушегян.* Об универсальности рядов относительно перестановок, Известия АН Арм.ССР, „Математика“, XII, № 4, 1977, 278—302.
7. *A. Haar.* Yesommelte Arbeiten, Budapest, 1959, 625.
8. *G. Faber.* Über die orthogonal fanktionen des Haar, Jahresericht Dautschen Math 19, 1910, 104—112.
9. *Г. М. Мушегян.* О единственности рядов по переставленным системам Хаара, Известия АН Арм.ССР, „Математика“, V, № 2, 1970, 138—153.