

С. К. ПОГОСЯН

# АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ЛОГАРИФМА СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ

## В в е д е н и е

Рассмотрим конфигурационную непрерывную систему одинаковых частиц, находящихся в некоторой ограниченной области (сосуде)  $\Lambda \subset R^v$   $v$ -мерного пространства и взаимодействующих с помощью парного потенциала  $U(x)$ ,  $x \in R^v \setminus \{0\}$ . Пространством состояний такой системы служит пространство  $C(\Lambda)$  всех конечных подмножеств (конфигураций) сосуда  $\Lambda$  с некоторой, естественно определенной в  $C(\Lambda)$ ,  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{A}(\Lambda)$  и лебеговой мерой с элементом  $dc$  (подробнее см. в [3]). Аналогично этому через  $C(R^v)$  мы будем обозначать пространство всех конечных конфигураций  $c \subset R^v$  с  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{A}(R^v)$  и лебеговой мерой с элементом  $dc$  такими, что их сужения на пространство  $C(\Lambda) \subset C(R^v)$ , где  $\Lambda \subset R^v$  — произвольный ограниченный сосуд, совпадают с  $\sigma$ -алгеброй  $\mathcal{A}(\Lambda)$  и лебеговой мерой на  $C(\Lambda)$ . Распределение вероятностей на  $C(\Lambda)$ , задаваемое плотностью относительно лебеговой меры на  $C(\Lambda)$

$$p_{\Lambda, \beta, z}(c) = \frac{z^{N(c)} e^{-\beta H(c)}}{\Xi(\Lambda, \beta, z)}, \quad (0.1)$$

называется распределением Гиббса. Здесь  $N(c)$  — число точек в конфигурации  $c$ ,  $H(c)$  — энергия этой конфигурации, задаваемая формулой

$$H(c) = \sum_{\{x, y\} \subset c, x \neq y} U(x - y), \quad (0.2)$$

$z$  (активность) и  $\beta$  (обратная температура) — некоторые положительные параметры и, наконец, нормирующий множитель (статистическая сумма)  $\Xi(\Lambda, \beta, z)$  равен

$$\Xi(\Lambda, \beta, z) = \int_{C(\Lambda)} z^{N(c)} e^{-\beta H(c)} dc. \quad (0.3)$$

Как известно, при довольно общих предположениях относительно потенциала  $U$  и расширяющейся последовательности сосудов  $\Lambda_1 \subset \Lambda_2 \subset \dots \subset \Lambda_j \subset \dots$  верна следующая асимптотика (теорема Ван-Хова или теорема Ли и Янга)

$$\ln \Xi(\Lambda_k) = c_0 |\Lambda_k| + o(|\Lambda_k|), \quad k \rightarrow \infty, \quad (0.4)$$

где  $c_0 = c_0(U, \beta, z)$  — константа, зависящая от параметров  $z, \beta$  и потенциала  $U$ , а  $|\Lambda_k|$  —  $\nu$ -мерный объем сосуда  $\Lambda_k, k=1, 2, \dots$ .

В предлагаемой работе, вводя некоторые дополнительные предположения о потенциале взаимодействия, а также о границе сосуда  $\Lambda$ , мы получаем — при малых значениях параметра  $z$  — дальнейшие члены в асимптотике (0.4). В статье [2] точно описан класс потенциалов  $U(x), x \in R^v \setminus \{0\}$ , для которых верны приводимые ниже теоремы. Этот класс состоит, грубо говоря, из функций  $U(x), x \in R^v \setminus \{0\}$ ,  $k+1$ -раз дифференцируемых,  $k=0, 1, 2, \dots$ , при всех  $x \neq 0$ , достаточно быстро убывающих на бесконечности вместе со своими производными

$$(D^\alpha U)(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} U}{\prod_1 \partial (\xi^{(i)})^{\alpha_i}} \Big|_{\xi=x}, \quad |\alpha| \leq k+1,$$

где  $\xi = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(v)})$  — некоторая прямоугольная система координат в

$R^v$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_v)$  — мультииндекс,  $|\alpha| = \sum_{i=1}^v \alpha_i$ , и принимающих в некоторой окрестности нуля достаточно большие положительные значения

и при том так, что для любого мультииндекса  $\alpha, |\alpha| \leq k+1$  выполняется оценка

$$|(D^\alpha U)(x)| \leq C |U(x)|^\gamma, \quad |x| > d, \quad d > 0, \quad (0.5)$$

где  $d, C$  и  $\gamma$  — некоторые константы (вообще говоря, зависящие от  $k$ ).

Перейдем теперь к описанию рассматриваемого нами класса сосудов. Обозначим через  $\Gamma = \Gamma(\Lambda)$  границу выпуклого ограниченного сосуда  $\Lambda$ , которую мы будем предполагать  $k+2$ -гладким,  $k=0, 1, 2, \dots$ ,  $\nu-1$ -мерным подмногообразием в  $R^v$ . Для любой точки  $x \in \Gamma(\Lambda)$  через  $T_\Gamma(x)$  обозначим касательную гиперплоскость к  $\Gamma$  в точке  $x$  и выберем затем прямоугольную систему координат  $(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(v-1)}, \eta)$  в  $R^v$  с началом в точке  $x$  так, что ось  $\eta$  направлена по внутренней нормали к поверхности  $\Gamma$  в точке  $x$ , а оси  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(v-1)}$  лежат в гиперплоскости  $T_\Gamma(x)$  и их направления совпадают с направлениями главных кривизн поверхности  $\Gamma$  в точке  $x$ . Далее, полагая  $(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(v-1)}, \eta) = (\xi, \eta)$ , обозначим через  $(x_\Gamma)_i(x), i=1, \dots, v-1, x \in \Gamma$  главные кривизны поверхности  $\Gamma$  в точке  $x$  и через  $D_\Gamma(x) \subset T_\Gamma(x)$  — множество

$$D_\Gamma(x) = \{\xi \in T_\Gamma(x) : |\xi| < \delta_\Gamma\}, \quad (0.6)$$

где  $\delta_\Gamma = \inf_{x \in \Gamma} \{[2 \max_i (x_\Gamma)_i(x)]^{-1}\}$  и  $|\xi|$  — эвклидова норма вектора

$\xi \in R^{v-1}$ . Пусть  $E_\Gamma(x)$  — связная компонентна множества  $\{(\xi, \eta) \in \Gamma : \xi \in D_\Gamma(x)\}$ , содержащая точку  $x \in \Gamma$ . Очевидно, для любого  $x \in \Gamma, E_\Gamma(x)$  задается уравнением

$$\eta = f_{\Gamma, x}(\xi), \xi \in D_{\Gamma}(x), \quad (0.7)$$

где  $f_{\Gamma, x}$  —  $k+2$ -гладкая функция на  $D_{\Gamma}(x)$  со следующим разложением в ряд Тейлора по  $\xi$

$$f_{\Gamma, x}(\xi) = \sum_{|s| \leq k+1} a_{\Gamma, s}(x) \xi^s + r_{\Gamma, k+2}(\xi, x), \quad (0.8)$$

где  $s_1 = (s_1, \dots, s_{v-1})$  — мультииндекс,

$$a_{\Gamma, s}(x) = \frac{f_{\Gamma, x}^{(s)}(0)}{s!} \quad (0.9)$$

и использованы обозначения:

$$\xi^s = \prod_{l=1}^{v-1} (\xi^{(l)})^{s_l}, \quad f_{\Gamma, x}^{(s)}(0) = \left. \frac{\partial^{|s|} f_{\Gamma, x}}{\prod_{l=1}^{v-1} \partial (\xi^{(l)})^{s_l}} \right|_{\xi=0},$$

$$|s| = \sum_{l=1}^{v-1} s_l \quad \text{и} \quad s! = \prod_{l=1}^{v-1} s_l!,$$

наконец, остаточный член  $r_{\Gamma, k+2}(\xi, x)$  допускает оценку, равномерную по  $x \in \Gamma$

$$|r_{\Gamma, k+2}(\xi, x)| \leq F_{\Gamma}(v, k) |\xi|^{k+2}, \quad (0.10)$$

где  $|\xi|$  — эвклидова норма вектора  $\xi \in R^{v-1}$  и

$$F_{\Gamma}(v, k) = (v-1)^{k+2} \sup_{x \in \Gamma} \left\{ \sup_{\xi \in D_{\Gamma}(x), |s|=k+2} |f_{\Gamma, x}^{(s)}(\xi)| \right\}. \quad (0.11)$$

Введем для любого выпуклого ограниченного сосуда  $\Lambda \subset R^v$  величину  $L_*(\Lambda) = |\Lambda|^{1/v}$ , называемую средним линейным размером сосуда  $\Lambda$ , и, дополнительно предполагая границу  $\Gamma(\Lambda)$   $k+2$ -гладкой, положим

$$I_k(\Lambda) = \sup_{x \in \Gamma} \max_{|s| \leq k+1} |a_{\Gamma, s}(x)| (L_*(\Lambda))^{v-1-|s|}, \quad |s| \leq k+1; F_{\Gamma}(v, k) (L_*(\Lambda))^{k+1} \quad (0.12)$$

Заметим, что для двух гомотетичных сосудов  $\Lambda$  и  $\tilde{\Lambda}$  (т. е. получающихся один из другого линейным растяжением или сжатием относительно некоторого центра) величины  $I_k(\Lambda)$  и  $I_k(\tilde{\Lambda})$  совпадают.

Пусть  $V_a^k$ ,  $a > 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  — класс выпуклых ограниченных сосудов  $\Lambda \subset R^v$  с  $k+2$ -гладкой границей  $\Gamma$ , удовлетворяющих условию

$$I_k(\Lambda) \leq a. \quad (0.13)$$

Из  $\Lambda \in V_a^k$  вытекает следующая оценка для величины  $\delta_{\Gamma} = \delta_{\Gamma(\Lambda)}$ :

$$\delta_{\Gamma} \geq \frac{L_*(\Lambda)}{4a}. \quad (0.14)$$

Действительно, если заметить, что коэффициенты при квадратичных членах в разложении (0.8) равны половинам кривизн, то из (0.12) и (0.13) следует, что

$$(\kappa_\Gamma)_i(x) \leq 2a(L, (\Lambda))^{-1}, \quad i = 1, \dots, \nu - 1,$$

откуда и вытекает (0.14).

Функционал  $\Phi(\Lambda)$ , определенный на совокупности всех ограниченных сосудов  $\Lambda \subset R^*$  (или на некоторой части этой совокупности, инвариантной относительно гомотетичных преобразований  $R^*$ ) мы назовем  $k$ -однородным,  $k$ -вещественное число, если при любых  $\Lambda$  и  $\lambda > 0$

$$\Phi(E_\lambda(\Lambda)) = \lambda^k \Phi(\Lambda),$$

где  $E_\lambda: x \rightarrow \lambda x$  — гомотетия  $R^*$  с коэффициентом  $\lambda$ .

Обозначим через  $Z_+^{-1}$  полугруппу (относительно покомпонентного сложения всех мультииндексов  $(s_1, \dots, s_{\nu-1})$ , а через  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(Z_+^{-1})$  — совокупность всех неотрицательных целочисленных финитных функций, определенных на  $Z_+^{-1}$ , и для любого  $Z \subset Z_+^{-1}$  положим  $\mathfrak{M}(Z) = \{m \in \mathfrak{M}: \text{supp } m \subseteq Z\}$ . Пусть, далее,  $Z_k = \{s \in Z_+^{-1}: 2 \leq |s| \leq k+1\}$  и, наконец,

$$\mathfrak{M}_l(Z_k) = \left\{ m \in \mathfrak{M}(Z_k): \sum_s (|s|-1) m(s) = l \right\}, \quad l = 1, 2, \dots$$

**Теорема 1.** Пусть потенциал  $U$  удовлетворяет указанным выше условиям и активность  $z$  достаточно мала. Тогда для любого сосуда  $\Lambda$  из класса  $V_a^*$ ,  $1 \leq k \leq \nu$  величина  $\ln \Xi(\Lambda, \beta, z)$  имеет следующее разложение:

$$\ln \Xi(\Lambda, \beta, z) = c_0(U)|\Lambda| + \sum_{l=1}^k c_l(\Lambda; U, \beta, z) + R_k(\Lambda; U, \beta, z), \quad (0.15)$$

где  $c_0(U) = c_0(U, \beta, z)$  — та же константа, что и в (0.4), а величины  $c_l(\Lambda; U, \beta, z)$ ,  $l = 1, \dots, k$  являются соответственно  $\nu-l$ -однородными функционалами от  $\Lambda$  и имеют вид: в случае  $1 \leq l \leq \nu-1$

$$c_l(\Lambda; U, \beta, z) = \frac{1}{\nu-l} \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{n=1}^{l-j} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{m \in \mathfrak{M}_l(Z_k)} \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle \times \\ \times g_{n,m}^j(x) \prod_{s \in Z_+^{\nu-1}} (a_{\Gamma,s}(x))^{m(s)} d\sigma(x), \quad (0.16)$$

где  $|m| = \sum_s m(s)$ ,  $n(x)$  — внешняя единичная нормаль в точке  $x \in \Gamma$ ,

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $R^*$ ,  $d\sigma$  — элемент  $\nu-1$ -мерной площади  $\Gamma$  (индуцированный вложением  $\Gamma \subset R^*$ ), а явный вид коэф-

коэффициентов  $g_{n,m}^j(x) = g_{n,m}^j(x; U, \beta, z)$ ,  $j = 0, 1, \dots, l-1$ ,  $m \in \mathfrak{M}_l(\mathbb{Z}_k)$  будет указан ниже:  
в случае  $l = \nu$

$$c_\nu(\Lambda; U, \beta, z) = \ln(L_\nu(\Lambda)) \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{n=1}^{\nu-j} \frac{(-1)^n}{n!} \times \\ \times \sum_{\substack{m \in \mathfrak{M}_l(\mathbb{Z}_k): \\ |m|=j+n}} \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle g_{n,m}^j(x) \left( \prod_s (a_{\Gamma,s}(x))^{m(s)} \right) d\sigma(x), \quad (0.17)$$

а величина  $R_k(\Lambda, U)$  допускает оценку

$$|R_k(\Lambda, U)| \leq \begin{cases} D_1 (L_\nu(\Lambda))^{\nu-k-1} & \text{при } k < \nu-1 \\ D_2 \ln(L_\nu(\Lambda)) & \text{при } k = \nu-1 \\ D_3 & \text{при } k = \nu, \end{cases} \quad (0.18)$$

где  $D_i = D_i(U, \beta, z, a)$ ,  $i = 1, 2, 3$  — положительные константы зависящие от потенциала  $U$  и параметров  $\beta, z, a$ .

Отметим, однако, что в случае эвклидова-инвариантного потенциала  $U^*$  коэффициенты  $g_{n,m}^j(x)$  не зависят от  $x \in \Gamma$ , и поэтому выражения для  $c_l(\Lambda, U)$ ,  $l = 1, \dots, k$  можно упростить по сравнению с общим случаем. Для примера приведем выражения для  $c_1(\Lambda, U)$  и  $c_2(\Lambda, U)$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия предыдущей теоремы, и потенциал  $U$  дополнительно обладает свойством эвклидовой инвариантности. Тогда величины  $c_1(\Lambda; U, \beta, z)$  и  $c_2(\Lambda; U, \beta, z)$  в (0.15) примут вид

$$c_1(\Lambda; U, \beta, z) = d_1(U, \beta, z) \cdot S(\Gamma(\Lambda)), \quad (0.19)$$

$$c_2(\Lambda; U, \beta, z) = \begin{cases} \frac{1}{\nu-2} [d_2(U, \beta, z) M(\Gamma(\Lambda)) + \bar{d}_2(U, \beta, z) \bar{M}(\Gamma(\Lambda))], \\ \frac{1}{2} d_2(U, \beta, z) M(\Gamma(\Lambda)) \ln |\Lambda|, \end{cases} \quad (0.20)$$

где  $d_1, d_2$  и  $\bar{d}_2$  — константы, зависящие от потенциала  $U$  и параметров  $\beta$  и  $z$ ,  $S(\Gamma(\Lambda))$  — площадь поверхности  $\Gamma(\Lambda)$ , а величины  $M$  и  $\bar{M}$  равны

$$M(\Gamma(\Lambda)) = \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle \left( \sum_{i=1}^{\nu-1} (x_\Gamma)_i^2(x) \right) d\sigma(x), \quad (0.21)$$

$$M(\Gamma(\Lambda)) = \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle \left( \sum_{1 \leq i < j \leq \nu-1} (x_\Gamma)_i(x) (x_\Gamma)_j(x) \right) d\sigma(x). \quad (0.22)$$

\* То есть  $U(x) = U(|x|)$ .

Аналогичные разложения верны и в решетчатом случае. (Подробнее это составит содержание отдельной публикации). Заметим, что в решетчатом случае второй член асимптотики был явно вычислен Добрушиным [5] и независимо получен в недавней работе Фишера и Кагиналла [6].

Наметим теперь вкратце основную линию наших построений. В § 1 мы выделим некоторый класс функций  $\psi(c)$ ,  $c \in C(R^*)$ , называемых нами кластерными, и рассмотрим его важный подкласс, состоящий из функций, названных нами кластерно-гладкими. Мы покажем (теорема 4), что для таких функций и любого ограниченного сосуда  $\Lambda$  существует интеграл

$$Q(\Lambda, \psi) = \int_{C(\Lambda)} \psi(c) dc \quad (0.23)$$

и, в случае сосуда с достаточно гладкой границей, этот интеграл имеет асимптотическое разложение вида (0.15) с коэффициентами  $g_{n,m}^j(x)$ , зависящими от  $\psi$ . Далее, как показано в работе [2], при указанных выше предположениях относительно потенциала взаимодействия  $U$  и малых значениях активности  $z$  найдется такая измеримая функция  $\psi_{z,\beta}(c)$ ,  $c \in C(R^*)$ , называемая функцией Урселла, которая является кластерно-гладкой и такой, что для любого ограниченного сосуда  $\Lambda \subset R^*$

$$\ln \Xi(\Lambda, \beta, z) = Q(\Lambda, \psi_{z,\beta}). \quad (0.24)$$

Тем самым теорема 1 окажется следствием теоремы 4.

Далее, в § 2 мы приведем упрощения соответствующих коэффициентов разложения для величины  $Q(\Lambda, \psi)$  при условии эвклидовой инвариантности функции  $\psi$  (теорема 5) и получим отсюда теорему 2. В заключение заметим, что существует следующее представление для интеграла  $Q(\Lambda, \psi)^*$ :

$$Q(\Lambda, \psi) = \int_{\Lambda} dx \int_{C(\Lambda)} \frac{\psi(x \cup c)}{N(c)+1} dc, \quad (0.25)$$

которое легко следует из тождества

$$\int_{C(\Lambda)} \left( \sum_{c_1 \subseteq c} \varphi(c_1) \right) f(c) dc = \int_{C(\Lambda)} \varphi(c_1) dc_1 \int_{C(\Lambda)} f(c_1 \cup c_2) dc_2 \quad (0.26)$$

(см. [3]). В дальнейшем мы будем также часто пользоваться формулой

$$\int_{C(\Lambda)} \int_{C(\Lambda)} \psi(c_1 \cup c_2) dc_1 dc_2 = \int_{C(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)} \psi(c) dc, \quad (0.27)$$

\* Впредь, для удобства мы будем писать  $x \cup c$  вместо  $\{x\} \cup c$ .

где  $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset R^v$  — произвольные сосуды, удовлетворяющие условию  $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ . (Эта формула следует из определения меры  $dc$ ).

### § 1. Кластерно-гладкие функции и разложение $Q(\Lambda, \psi)$ для этих функций

Для любого вектора  $s \in R^v$  через  $\tau_s(c)$  обозначим сдвиг конфигурации  $c \in C(R^v)$  на вектор  $s$ :  $\tau_s(c) = \{x + s: x \in c\}$ . Функцию  $\psi(c)$ ,  $c \in C(R^v)$  назовем трансляционно-инвариантной, если для любых  $c \in C(R^v)$  и  $s \in R^v$  выполняется равенство  $\psi(\tau_s(c)) = \psi(c)$ . Введем обозначения: через  $W_c$ ,  $c \in C'(R^v)$ , где  $C'(R^v) = C(R^v) \setminus \{\emptyset\}$ , обозначим совокупность всех цепей (цепью мы называем совокупность неориентированных ребер, соединяющих последовательно все точки (вершины) данного множества) с множеством вершин  $c$ , через  $F(\gamma)$ ,  $\gamma \in W_c$  — множество ребер цепи  $\gamma$  и через  $[x_1, x_2]$ ,  $x_1, x_2 \in c$  — ребро с концами  $x_1$  и  $x_2$ . Заметим попутно, что число элементов множества  $W_c$  равно  $\frac{N(c)!}{2}$ . Далее, пусть  $M^+$  есть класс всех неотрицательных, ограниченных и суммируемых функций на неотрицательной вещественной полуоси  $[0, \infty)$ . Для любого положительного числа  $p$  через  $M_p^+$  обозначим класс функций  $f$  на  $R^v$ , определяемых по формуле:  $f(x) = \tilde{f}(|x|)(1 + |x|)^{-p}$ ,  $x \in R^v$ ,  $\tilde{f} \in M^+$ , и через  $N_p^i \subset M_p^+$ ,  $i = 1, 2, \dots$  обозначим подмножество

$$N_p^i = \left\{ q \in M_p^+ : \int_{R^v} q(x) dx < \frac{1}{i}, \sup_{x \in R^v} q(x) < 2^{-i} \right\}.$$

Лемма 1. Пусть  $q \in N_p^1$ , тогда уравнение

$$\int_{R^v} f(y) q(x-y) dy = f(x) - q(x) \quad (1.1)$$

имеет единственное решение  $f \equiv Vq$ , причем  $Vq \in M_p^+$  и

$$\int_{R^v} (Vq)(x) dx = \int_{R^v} q(x) dx \left[ 1 - \int_{R^v} q(x) dx \right]^{-1}. \quad (1.2)$$

Доказательство леммы дано в приложении. Заметим, что если  $q \in N_p^n$ , то определены функции  $V^k q \in M_p^+$ ,  $k = 1, \dots, n$ , причем

$$\int_{R^v} (V^k q)(x) dx = \int_{R^v} q(x) dx \left[ 1 - k \int_{R^v} q(x) dx \right]^{-1}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Для любой функции  $q \in M_p^+$ ,  $p > v$  и любого положительного числа  $A$  обозначим через  $L_{q,A}^p$  класс функций  $\psi(c)$ ,  $c \in C'(R^v)$ , удовлетворяющих оценке

$$|\psi(c)| \leq A \sum_{\gamma \in W_c} \prod_{\{x_1, x_2\} \in F(\gamma)} q(x_1 - x_2), \quad c \in C'(R^v). \quad (1.3)$$

Функцию  $\psi(c)$ ,  $c \in C'(R^v)$  назовем кластерной, если она принадлежит классу  $L_{q,A}^p$  при некоторых  $A > 0$ ,  $p > v$  и  $q \in M_p^+$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\psi \in L_{q,A}^p$ , где  $q \in N_p^1$ , тогда для любого (ограниченного или неограниченного) сосуда  $\Lambda \subset R^v$  интеграл

$$\omega_\Lambda(c) = \int_{C(\Lambda)} \psi(c \cup \bar{c}) d\bar{c}, \quad c \in C'(R^v) \quad (1.4)$$

сходится и  $\omega_\Lambda \in L_{vq,A_1}^p$ , где константа  $A_1$  равна

$$A_1 = A \left( 1 - \int_{R^v} q(x) dx \right)^{-2}. \quad (1.5)$$

Доказательство леммы 2 состоит в дословном повторении рассуждений доказательства теоремы 2 из [2]. Сформулируем ряд следствий. Для любого сосуда  $\Lambda \subset R^v$  введем оператор  $H_\Lambda$ , определенный на множестве  $L_{q,A}^p$  кластерных функций таких, что  $q \in N_p^1$  и действующий по формуле

$$(H_\Lambda \psi)(c) = \omega_\Lambda(c), \quad c \in C'(R^v). \quad (1.6)$$

**Следствие 1.** Пусть  $\psi \in L_{q,A}^p$ , где  $q \in N_p^1$ , тогда при любом  $x \in R^v$

$$\int_{C(R^v)} \frac{\psi(x \cup c)}{N(c)+1} dc < A_1, \quad (1.7)$$

где константа  $A_1$  определена в (1.5).

**Следствие 2.** Пусть  $\psi \in L_{q,A}^p$ , где  $q \in N_p^1$ , тогда для любого ограниченного сосуда  $\Lambda \subset R^v$  интеграл  $Q(\Lambda, \psi)$  сходится и удовлетворяет оценке

$$|Q(\Lambda, \psi)| \leq A_1 |\Lambda|, \quad (1.8)$$

где константа  $A_1$  введена в (1.5).

**Следствие 3.** Пусть  $\psi \in L_{q,A_0}^p$ , где  $q \in N_p^1$ ,  $n$ -натуральное число, тогда для произвольных сосудов  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n \subset R^v$  функция  $H_{\Lambda_n} H_{\Lambda_{n-1}} \dots H_{\Lambda_1} \psi$  принадлежит классу  $L_{v^n q, A_n}^p$ , где константа  $A_n$  имеет вид

$$A_n = A_0 \prod_{k=0}^{n-1} \left[ 1 - \int_{R^v} q(x) dx \left( 1 - k \int_{R^v} q(x) dx \right)^{-1} \right]^{-2}. \quad (1.9)$$

Заметим, что при  $n = 1$  мы приходим к утверждению леммы 2, а далее следует применить математическую индукцию.

Следствие. 4. Пусть  $\psi \in L_{q, A_0}^p$ , где  $q \in N_p^{n+1}$ ,  $n$ -натуральное число, тогда для произвольных сосудов  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n \subset R^n$  и любой точки  $x \in R^n$  имеет место оценка

$$\int_{c \cap S'_x(r) \neq \emptyset} (H_{\Lambda_n} \dots H_{\Lambda_1} |\psi|)(x \cup c) dc \leq A_{n+1} \lambda_{n+1}(r), \quad (1.1)$$

где  $S'_x(r) = R^n \setminus S_x(r)$ ,  $S_x(r)$  — шар радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $x$ ,  $A_{n+1}$  — константа, введенная в (1.9), а функция  $\lambda_{n+1}(r)$ ,  $r \geq 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  равна

$$\lambda_{n+1}(r) = \int_{y \in R^n: |y| > r} (V^{n+1} q)(y) dy. \quad (1.11)$$

Аналогично, если  $\psi \in L_{q, A_0}^p$  и  $q \in N_p^1$ , то для любого  $x \in R^n$

$$\int_{c \cap S'_x(r) \neq \emptyset} |\psi(x \cup c)| dc \leq A_1 \lambda_1(r). \quad (1.10')$$

Доказательство. Пользуясь следствием 3 и формулой (0.27), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{c \cap S'_x(r) \neq \emptyset} (H_{\Lambda_n} \dots H_{\Lambda_1} |\psi|)(x \cup c) dc = \int_{c' \cap S'_x(r)} dc_1 \times \\ & \times \int_{c \cap S_x(r)} (H_{\Lambda_n} \dots H_{\Lambda_1} |\psi|)(x \cup c_1 \cup c_2) dc_2 = \int_{c' \cap S'_x(r)} (H_{S_x(r)} (H_{\Lambda_n} \dots \\ & \dots H_{\Lambda_1} |\psi|)(x \cup c)) dc = \int_{S'_x(r)} dy \int_{c \cap S'_x(r)} (N(c)+1)^{-1} (H_{S_x(r)} H_{\Lambda_n} \dots \\ & \dots H_{\Lambda_1} |\psi|)(x \cup y \cup c) dc \leq \int_{S'_x(r)} (H_{R^n} H_{\Lambda_n} \dots H_{\Lambda_1} |\psi|)(x, y) dy \leq A_{n+1} \lambda_{n+1}(r). \end{aligned}$$

Замечание 1. Если функция  $\psi \in L_{q, A_0}^p$  трансляционно-инвариантна и  $q \in N_p^1$ , то интеграл

$$c_0(\psi) = c_0(x, \psi) = \int_{R^n} \frac{\psi(x \cup c) dc}{N(c)+1} \quad (1.12)$$

не зависит от точки  $x \in R^n$ .

Обозначим через  $V(\Lambda)$  приграничную полосу в сосуде  $\Lambda$  ширины 1:  $V(\Lambda) = \{x \in \Lambda: \rho(x, \Lambda') < 1\}$ , где  $\Lambda' = R^n \setminus \Lambda$ , а  $\rho(x, \Lambda') = \inf_{y \in \Lambda'} |x - y|$  — расстояние точки  $x$  до границы  $\Gamma(\Lambda)$ .

Теорема 3. Пусть функция  $\psi \in L_{q, \Lambda}^p$ , где  $q \in \mathbb{N}_p^1$  и  $p > 2v + 1$  — трансляционно-инвариантна. Тогда для любого выпуклого ограниченного сосуда  $\Lambda \subset R^v$  имеет место равенство

$$Q(\Lambda, \psi) = c_0(\psi) |\Lambda| + R(\Lambda), \quad (1.13)$$

где  $c_0(\psi)$  определяется формулой (1.12), а слагаемое  $R(\Lambda)$  допускает оценку

$$|R(\Lambda)| \leq K |V(\Lambda)|,$$

где  $K = K(q, A_0) > 0$  — константа.

Доказательство. В силу (0.25) и замечания 1 имеем

$$Q(\Lambda, \psi) = \int_{\Lambda} dx \int_{R^v} \frac{\psi(x \cup c)}{N(c) + 1} dc - \int_{\Lambda} dx \int_{c \cap \Lambda' + \mathbb{Z}} \frac{\psi(x \cup c)}{N(c) + 1} dc = c_0(\psi) |\Lambda| + R(\Lambda),$$

где через  $R(\Lambda)$  обозначено второе слагаемое. Отсюда, пользуясь (1.10') и монотонностью функции  $\lambda_1(r)$ , получаем, что

$$\begin{aligned} |R(\Lambda)| &\leq A_1 \int_{V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, \Lambda')) dx + A_1 \int_{\Lambda \setminus V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, \Lambda')) dx \leq \\ &\leq A_1 \lambda_1(0) \cdot |V(\Lambda)| + A_1 \int_{\Lambda \setminus V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, \Lambda')) dx. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Пусть, далее,  $S_x(\rho(x, \Lambda')) \subset R^v$  — шар радиуса  $\rho(x, \Lambda')$  с центром в точке  $x$ , тогда, как легко видеть, при любых  $x \in \Lambda \setminus V(\Lambda)$  и  $y \in V(\Lambda) \cap S_x(\rho(x, \Lambda'))$  имеет место неравенство

$$\lambda_1(\rho(x, \Lambda')) \leq \lambda_1(\rho(x, y)).$$

откуда вытекает, что для любого  $x \in \Lambda \setminus V(\Lambda)$

$$\begin{aligned} \lambda_1(\rho(x, \Lambda')) &\leq |V(\Lambda) \cap S_x(\rho(x, \Lambda'))|^{-1} \int_{V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, y)) dy \leq \\ &\leq \omega_v^{-1} \int_{V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, y)) dy, \end{aligned}$$

где  $\omega_v$  — объем шара в  $R^v$  радиуса  $1/2$ . Отсюда для второго слагаемого в (1.14) получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda \setminus V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, \Lambda')) dx &\leq \omega_v^{-1} \int_{V(\Lambda)} dy \int_{\Lambda \setminus V(\Lambda)} \lambda_1(\rho(x, y)) dx \leq \omega_v^{-1} |V(\Lambda)| \times \\ &\times \int_{R^v} \lambda_1(|x|) dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл в (1.15) сходится, в силу условия теоремы  $p \geq 2v + 1$ . Таким образом, из (1.14) и (1.15) следует, что

$$|R(\Lambda)| \leq K |V(\Lambda)|,$$

где

$$K = K(q, A_0) = A_1 \left( \lambda_1(0) + w_v^{-1} \int_{R^v} \lambda_1(|x|) dx \right).$$

Теорема доказана.

Оказывается, что при дополнительных предположениях относительно функции  $\psi$  и сосуда  $\Lambda$  можно уточнить вид остаточного члена  $R(\Lambda)$  в формуле (1.13). Для этого заметим, что на множестве  $C^N(R^v)$ ,  $N=1, 2, \dots$  ( $N$ -точечных конфигураций в  $R^v$ ) можно ввести топологию, а также структуру бесконечно-дифференцируемого  $v \times N$ -мерного многообразия. Рассмотрим с этой целью какую-нибудь ортогональную систему координат в  $R^v = (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(v)})$  и построим с ее помощью систему координат  $\{\xi_i^{(\alpha)}; i=1, \dots, N; \alpha=1, \dots, v\}$  в  $(R^v)^N$  ( $N$ -ая декартова степень  $R^v$ ), где  $\xi_i^{(\alpha)}$ ,  $\alpha=1, \dots, v$  — координаты компоненты  $x_i \in R^v$  в наборе  $(x_1, \dots, x_N) \in (R^v)^N$ . Пусть  $((R^v)^N)' \subset \subset (R^v)^{N \times v}$  — совокупность наборов  $(x_1, \dots, x_N)$ , состоящих из различных точек:  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ . Тогда каноническое отображение  $\pi: ((R^v)^N)' \rightarrow C^N(R^v)$ , действующее по формуле  $(x_1, \dots, x_N) \rightarrow |x_i|_i^N = c$ , позволяет ввести систему координат в достаточно малой окрестности  $O(c_0)$  любой конфигурации  $c_0 \in C^N(R^v)$ . А именно, пусть  $O(c_0)$  столь мала, что ее полный прообраз  $\pi^{-1}(O(c_0))$  состоит ровно из  $N!$  связных компонент, и пусть  $G$  — одна из них. Обозначим через  $\pi_G$  ограничение отображения  $\pi$  на  $G$ . Очевидно,  $\pi_G$  — взаимно-однозначное отображение, в силу чего существует обратное  $\pi_G^{-1}: O(c_0) \rightarrow G \subset ((R^v)^{N \times v})'$ , порождающее систему координат  $\{\eta_{ix}^{(\alpha)}; \alpha=1, \dots, v; x \in c\}$  в окрестности  $O(c_0)$  по формуле

$$\{\eta_{ix}^{(\alpha)} = \eta_{ix}^{(\alpha)}(c) = \xi_i^{(\alpha)} - (\xi_i^{(\alpha)})_0,$$

где

$$(\xi_i^{(1)}, \dots, \xi_i^{(v)}) = (\pi_G^{-1}(c))_i = x, \text{ а } ((\xi_i^{(1)})_0, \dots, (\xi_i^{(v)})_0) = (\pi_G^{-1}(c_0))_i,$$

$$i = 1, \dots, N.$$

Далее для любой  $k$ -гладкой,  $k=0, 1, \dots$  функции  $\psi(c)$ ,  $c \in C^N(R^v)$  и произвольной, определенной на конфигурации  $c_0 \in C^N(R^v)$ , функции  $m = m_c = |m^{(\alpha)}(x)| \in Z_+^v; \alpha=1, \dots, v; x \in c_0$ , определим величину

$$(D^m \psi)(c_0) = \frac{\partial^{|m|} \psi}{\prod_{\alpha, x} \partial (\eta_{ix}^{(\alpha)})^{m^{(\alpha)}(x)}} \Big|_{\eta_{ix}^{(\alpha)} = (\eta_{ix}^{(\alpha)})_0, \alpha=1, \dots, v; x \in c_0} \quad (1.16)$$

где  $\{(\eta_{ix}^{(\alpha)})_0; \alpha=1, \dots, v; x \in c_0\}$  — координаты точки  $c_0 \in C^N(R^v)$  в локальной системе координат, а  $|m| = \sum_{\alpha, x} m^{(\alpha)}(x)$ . Функцию  $\psi(c)$ ,  $c \in$

$\in C'(R^v)$  назовем  $k$ -гладкой,  $k = 0, 1, \dots$ , если  $k$ -гладкими ее сужения на подпространства  $C^N(R^v)$  для всех  $N = 1, 2, \dots$ , а величину  $(D^m \psi)(c)$ ,  $c \in C'(R^v)$ , положим равной  $(D^m \psi_{N(c)})(c)$ , где  $\psi_{N(c)}$  — сужение функции  $\psi$  на подпространство  $C^N(c)(R^v)$ . Для любых чисел  $k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ,  $A > 0$  и любой функции  $q \in M_p^+$ ,  $p > v$  через  $L_{k,q,A}^p$  обозначим класс  $k$ -гладких функций  $\psi(c)$ ,  $c \in C'(R^v)$ , все частные производные  $D^m \psi$ ,  $|m| \leq k$  которых принадлежат классу  $L_{q,A}^p$ . Функцию  $\psi(c)$ ,  $c \in C'(R^v)$  назовем кластерно- $k$ -гладкой, если  $\psi \in L_{k,q,A}^p$  при некоторых  $p > v$ ,  $q \in M_p^+$ ,  $A > 0$  и  $k = 0, 1, \dots$ .

**Лемма 3.** Пусть  $\psi \in L_{k,q,A}^p$ , где  $q \in N_p^+$ , и пусть  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$  — произвольные сосуды в  $R^v$ , тогда 1) функция  $H_{\Lambda_1} \dots H_{\Lambda_n} \psi$  принадлежит классу  $L_{k,v^q,q,\Lambda_n}^p$ , 2) для любой точки  $x_0 \in R^v$  и  $r > 0$  имеет место оценка

$$\int_{c \cap S_x(r)} |(D^m (H_{\Lambda_{n-1}} \dots H_{\Lambda_1} \psi))(x_0 \cup c)| dc \leq A_{n+1} \delta_n(r) \quad (1.17)$$

при  $|m| \leq k$  и  $m^{(z)}(x_0) = 0$ ,  $z = 1, \dots, v$ , где смысл обозначений тот же, что и в (1.10).

Утверждения этой леммы непосредственно вытекают из следствий 3 и 4.

Введем обозначения:  $(x)_n = (x_1, \dots, x_n) \in (R^v)^n$ ,  $(\xi)_n = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in (R^{v-1})^n$ ,  $(\eta)_n = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in (R^1)^n$  и  $(x)_n = ((\xi)_n, (\eta)_n)$ , где  $x_i = (\xi_i, \eta_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Кроме того, для любого единичного вектора  $v \in R^v$  положим

$$R_v^+ = \{x \in R^v : \langle x, v \rangle < 0\} \text{ и } \omega_v(c) = (H_{R_v^+} \psi)(c), \quad c \in C'(R^v).$$

При доказательстве теоремы 4 нам понадобится также следующая лемма

**Лемма 4.** Пусть  $\xi_0 = 0$ ,  $\xi_1, \dots, \xi_n \in R^{v-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots, (k+1)(v+2)$ , а  $r = (r_1, \dots, r_n)$  — произвольный мультииндекс такой, что  $|r_i| \leq k+1$ . Тогда при  $p > v + (k+1)^2(k+2)(v+2)$  имеет место оценка

$$\int_{(R^{v-1})^n} \prod_{i=1}^n (1 + |\xi_i - \xi_{i-1}|)^{-p} |K_{m,r}((\xi)_n)| d(\xi)_n \leq K_1, \quad (1.18)$$

где  $K_1 = K_1(k) > 0$  — константа, а величина  $K_{m,r}((\xi)_n)$  равна

$$K_{m,r}((\xi)_n) = \sum_{\substack{m_i \in \mathfrak{M}(Z_k) : |m_i| = r_i + 1, \\ i=1, \dots, n; m_1 + \dots + m_n = m}} \prod_{i=1}^n \prod_{s \in Z^{v-1}} \frac{\xi_i^{s \cdot m_i(s)}}{m_i!}, \quad (1.19)$$

где  $m! = \prod_{s \in Z^{v-1}} m_i(s)!$ .

Доказательство. Как легко видеть

$$\begin{aligned} & \int_{(R^v-1)_n} \prod_{i=1}^n (1 + |\xi_i - \xi_{i-1}|)^{-p} |K_{m,r}((\xi)_n)| d(\xi)_n \leq \\ & \leq \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{M}(Z_k): |m_i| = r_i + 1, \\ i=1, \dots, n; m_1 + \dots + m_n = m}} \prod_{i=1}^n \frac{1}{m_i!} \int_{(R^v-1)_n} \prod_{i=1}^n (1 + |\xi_i - \xi_{i-1}|)^{-p} \times \\ & \times \prod_{i=1}^n |\xi_i|^{(k+1)(r_i+1)} d(\xi)_n. \end{aligned} \quad (1.20)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n |\xi_i|^{(k+1)(r_i+1)} & \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\xi_i|^{n(k+1)(r_i+1)} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^i |\xi_j - \xi_{j-1}| \right)^{n(k+1)(r_i+1)} \leq \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{t_1, \dots, t_i \geq 0: \\ t_1 + \dots + t_i = n(k+1)(r_i+1)}} \frac{[n(k+1)(r_i+1)]!}{t_1! \dots t_i!} \prod_{j=1}^i |\xi_j - \xi_{j-1}|^{t_j}. \end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} & \int_{(R^v-1)_n} \prod_{i=1}^n (1 + |\xi_i - \xi_{i-1}|)^{-p} \prod_{i=1}^n |\xi_i|^{(k+1)(r_i+1)} d(\xi)_n \leq \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{t_1, \dots, t_i \geq 0: \\ t_1 + \dots + t_i = n(k+1)(r_i+1)}} \frac{[n(k+1)(r_i+1)]!}{t_1! \dots t_i!} \int_{(R^v-1)_n} \prod_{j=1}^i (1 + |\xi_j - \xi_{j-1}|)^{t_j - p} \times \\ & \times \prod_{j=i+1}^n (1 + |\xi_j - \xi_{j-1}|)^{-p} d(\xi)_n \leq \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n i^{n(k+1)(r_i+1)} \right) \left( \int_{R^v-1} (1 + |\xi|)^{-v} d\xi \right)^n < \infty \end{aligned}$$

для всех  $n = 1, 2, \dots, (k+1)(v+2)$ , откуда с учетом (1.20) следует оценка (1.18). Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть  $\Lambda \subset R^v$  — сосуд класса  $V_a^k$ ,  $1 \leq k \leq v$  а  $\psi$  — трансляционно-инвариантная, кластерно- $k+1$ -гладкая функция из класса  $L_{k+1,q,A_a}^r$ , где  $r \geq v + (k+1)^2(k+2)(v+2)$ , а  $q \in N_p^3$  такая, что ее верхняя грань  $\sup_{x \in R^v} q(x)$  достаточно мала. Тогда величина

$Q(\Lambda, \psi)$  имеет следующее разложение

$$Q(\Lambda, \psi) = c_0(\psi)|\Lambda| + \sum_{l=1}^k c_l(\Lambda, \psi) + R_k(\Lambda, \psi). \quad (1.21)$$

где  $c_0(\psi)$  определено в (1.12), величины  $c_l(\Lambda, \psi)$  равны: при  $1 \leq l \leq v-1$

$$c_l(\Lambda, \psi) = \frac{1}{v-l} \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{n=1}^{l-j} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\substack{m \in \mathfrak{M}_l(Z_k) \\ |m|=j+n}} \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle g_{n,m}^j(x, \psi) \times \\ \times \left( \prod_s (a_{\Gamma,s}(x))^{m(s)} \right) d\sigma(x), \quad (1.22)$$

при  $l = v$

$$c_v(\Lambda, \psi) = \ln(L_v(\Lambda)) \sum_{j=0}^{v-1} \sum_{n=1}^{v-j} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\substack{m \in \mathfrak{M}_l(Z_k) \\ |m|=j+n}} \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle g_{n,m}^j(x) \times \\ \times \left( \prod_s (a_{\Gamma,s}(x))^{m(s)} \right) d\sigma(x), \quad (1.23)$$

где  $n(x)$  — внешняя единичная нормаль к  $\Gamma(\Lambda)$  в точке  $x$

$$g_{n,m}^j(x, \psi) = \sum_{|r|=l} \int_{(\Gamma_\Gamma(x))^n} (D_\eta^r \omega_n(x))(x, (\xi)_n, (0)_n) K_{m,r}((\xi)_n) d(\xi)_n \quad (1.24)$$

и, наконец, величина  $R_k(\Lambda, \psi)$  допускает оценку

$$|R_k(\Lambda, \psi)| \leq \begin{cases} B_{10}(q, A_0, a)(L_\Lambda(\Lambda))^{v-k-1} & \text{если } k < v-1 \\ B_{11}(q, A_0, a) \ln L_v(\Lambda) & \text{если } k = v-1 \\ B_{12}(q, A_0, a) & \text{если } k = v, \end{cases} \quad (1.25)$$

где  $B_{10}, B_{11}, B_{12}$  — положительные константы.

Замечание 1. Величины  $g_{n,m}^j(x; U, \beta, z)$ , участвующие в (0.16) и (0.17), равны:  $g_{n,m}^j(x; U, \beta, z) = g_{n,m}^j(x, \psi_{z,\beta})$ , где  $\psi_{z,\beta}$  — функция Урселла, соответствующая потенциалу  $U$  (см. введение).

Прежде чем приступить к доказательству самой теоремы сформулируем и покажем несколько вспомогательных лемм. В силу трансляционной инвариантности, впредь, не ограничивая общности, будем считать, что  $\Lambda$  содержит начало координат пространства  $R^v$ . Рассмотрим семейство сосудов  $\{\Lambda_L = E_L \Lambda_1; L \geq 1\}$ , где  $E_L$  — гомотетия пространства  $R^v$  с коэффициентом  $L$ , а  $\Lambda_1 = E_{(L_\Lambda(\Lambda))^{-1}} \Lambda$ .

Лемма 5. В условиях теоремы 4 производная интеграла  $Q(\Lambda_L, \psi)$  по  $L$  имеет вид

$$\frac{d}{dL} Q(\Lambda_L, \psi) = L^{-1} \int_{\Gamma_L} \langle n(x), x \rangle \omega_L(x) d\sigma_L(x), \quad (1.26)$$

где  $n(x)$  — внешняя единичная нормаль к границе  $\Gamma(\Lambda)$  сосуда  $\Lambda$ , а  $\omega_L \equiv \omega_{\Lambda_L}$ .

Доказательство. Пусть  $K_{\Delta L} = \Lambda_{L+\Delta L} \setminus \Lambda_L$ ,  $\Delta L > 0$ , тогда из (0.27) получим, что

$$Q(\Lambda_{L+\Delta L}, \psi) = \int_{C(K_{\Delta L})} \omega_L(c) dc = Q(\Lambda_L, \psi) + \int_{K_{\Delta L}} \omega_L(x) dx + R, \quad (1.27)$$

где  $R = \sum_{n=2}^{\infty} \int_{C^n(K_{\Delta L})} \omega_L(c) dc$ . Но, как легко видеть

$$R = o(\Delta L), \text{ при } \Delta L \rightarrow 0. \quad (1.28)$$

Действительно, в силу леммы 2

$$|R| \leq A_1 \sum_{n=2}^{\infty} \int_{C^n(K_{\Delta L})} \sum_{\gamma \in W_c} \prod_{|x_1, x_2| \in F(\gamma)} (Vq)(x_1 - x_2) dc \leq \frac{A_1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} M_1^n |K_{\Delta L}|^n, \quad (1.29)$$

где  $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}^v} (Vq)(x)$ , а  $|K_{\Delta L}|$  —  $v$ -мерный объем множества  $K_{\Delta L}$ , который равен

$$|K_{\Delta L}| = (L + \Delta L)^v |\Lambda| - L^v |\Lambda| = v L^{v-1} \Delta L + o(\Delta L), \text{ при } \Delta L \rightarrow 0. \quad (1.30)$$

Из (1.29) и (1.30) следует (1.28). Преобразуем теперь второе слагаемое в (1.27), имеем

$$\begin{aligned} \int_{K_{\Delta L}} \omega_L(x) dx &= \int_L^{L+\Delta L} \frac{du}{u} \int_{\Gamma_u} \omega_L(x) \langle n(x), x \rangle d\tau_u(x) = \\ &= \Delta L \frac{1}{L} \int_{\Gamma_L} \omega_L(x) \langle n(x), x \rangle d\tau_L(x) + o(\Delta L), \text{ при } \Delta L \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью подынтегральной функции по  $u$ , что следует из непрерывности функции  $\psi$ . Таким образом, из (1.31), (1.28) и (1.27) окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} Q(\Lambda_L, \psi) &= \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta L} [Q(\Lambda_{L+\Delta L}, \psi) - Q(\Lambda_L, \psi)] = \\ &= L^{-1} \int_{\Gamma_L} \langle n(x), x \rangle \omega_L(x) d\tau_L(x), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Для любых  $L > 1$  и  $x \in \Gamma_L$  обозначим

$$\tilde{D}_L(x) = \{\xi \in T_{\Gamma_L}(x) : |\xi| < \delta_{\Gamma_1} L^{1/v+2}\},$$

где для  $\delta_{\Gamma_1}$ , в силу (0.14) и  $L_*(\Lambda_1) = 1$ , имет место оценка

$$\delta_{\Gamma_1} \geq \frac{1}{4a}. \quad (1.32)$$

Положим также

$$\Phi_L(x) = \{(\xi, \eta) \in R^v: \xi \in \tilde{D}_L(x), 0 < \eta < f_{L,x}(\xi)\},$$

где  $f_{L,x} \equiv f_{\Gamma_L, x}$  (см. (0.7)). Заметим, что функции  $f_{L,x}$  и  $f_{1,x'}$  при  $x' = E_L^{-1}(x)$ ,  $x \in \Gamma_L$  связаны соотношением

$$f_{L,x}(\xi) = L f_{1,x'}(L^{-1}\xi), \quad \xi \in \tilde{D}_L(x). \quad (1.33)$$

Формула (0.8) для случая  $f_{L,x}$  примет вид

$$f_{L,x}(\xi) = p_{L,x}(\xi) + r_{k,L}(\xi, x), \quad \xi \in \tilde{D}_L(x),$$

где многочлен Тейлора  $p_{L,x}(\xi)$  функции  $f_{L,x}(\xi)$  равен

$$p_{L,x}(\xi) = \sum_{|s| \leq k+1} a_{L,s}(x) \cdot \xi^s \quad (1.34)$$

с коэффициентами  $a_{L,s}(x) = a_{\Gamma_L, s}(x)$ ,  $x \in \Gamma_L$ , введенным в (0.9), а остаточный член  $r_{L,k} \equiv r_{\Gamma_L, k}$ , в силу (0.11) и (1.33), допускает оценку

$$|r_{L,k}(\xi, x)| \leq F(k) L^{-k-1} |\xi|^{k+2}, \quad (1.35)$$

где  $F(k) = F_{\Gamma_1}(\nu, k)$ . Далее, пусть

$$P(x) = \{(\xi, \eta) \in R^v: \xi \in T_{\Gamma_L}(x), 0 < \eta < p_{L,x}(\xi)\}.$$

**Лемма 6.** В предположениях теоремы 4 для функции  $\omega_L(x)$   $x \in \Gamma_L$ ,  $L \geq 1$  имеет место равенство

$$\omega_L(x) = \sum_{n=0}^{(k+1)(\nu+2)} (-1)^n \int_{C^n(P(x))} \omega_n(x)(x \cup c) dc + J(x, L, k), \quad (1.36)$$

где  $n(x)$  — внешняя единичная нормаль к  $\Gamma_1$  в точке  $x$ , а слагаемое  $J(x, L, k)$  допускает оценку

$$|J(x, L, k)| \leq BL^{-k-1} \quad (1.37)$$

с константой  $B = B(q, A_0, \alpha) > 0$ .

**Доказательство.** Пользуясь тождеством (0.24), легко показать, что имеет место равенство

$$\omega_L(x) = \int_{C(\Lambda'_L(x))} (-1)^{N(C)} \omega_n(x)(x \cup c) dc, \quad (1.38)$$

где  $\Lambda'_L(x) = \tilde{R}_{n(x)}^v \setminus \Lambda_L(x)$ . Отсюда

$$\omega_L(x) = \int_{C(\Phi_L(x))} (-1)^{N(C)} \omega_n(x)(x \cup c) dc + J_1(x, L) \quad (1.39)$$

где  $J_1(x, L)$  имеет вид

$$J_1(x, L) = \int_{\substack{c \in \Lambda'_L(x) \\ c \cap \Phi_L(x) = \emptyset}} (-1)^{N(c)} \omega_n(x)(x \cup c) dc$$

и удовлетворяет оценке

$$|J_1(x, L)| \leq B_1 L^{-k-1}, \quad (1.4)$$

где  $B_1 = B_1(q, A_0, a) > 0$ , а  $\Phi'_L(x) = \Lambda'_L(x) \setminus \Phi_L(x)$ . В самом деле, из (1.10) получаем, что

$$|J_1(x, L)| \leq A_2 \lambda_2(\delta_{\Gamma}, L^{\frac{1}{v+1}}) \leq A_2 (1 + \delta_{\Gamma}, L^{\frac{1}{v+2}})^{-p} \int_{R^v} (1 + |y|)^p (V^2 q)(y) dy,$$

откуда, обозначая последний интеграл (сходящийся в силу  $V^2 q \in M_p^+$  через  $K_1(q)$  и пользуясь (1.32), находим, что

$$|J_1(x, L)| \leq A_2 K_1(q) (4a)^p L^{-\frac{p}{v+2}} \leq B_1 L^{-k-1}.$$

Пусть, далее, для любых  $L \geq 1$  и  $x \in \Gamma_L$

$$P_L(x) = \{(\xi, \eta) \in P(x) : \xi \in \bar{D}_L(x)\},$$

$$A_L(x) = \Phi_L(x) \setminus P_L(x) \text{ и } B_L(x) = P_L(x) \setminus \Phi_L(x),$$

тогда, так как  $\Phi_L(x) = (P_L(x) \cup A_L(x)) \setminus B_L(x)$ , то в силу (0.27)

$$\int_{C(\Phi_L(x))} (-1)^{N(c)} \omega_n(x)(x \cup c) dc = \int_{C(P_L(x) \cup A_L(x))} (-1)^{N(c)} \omega_n(x)(x \cup c) dc + J_2(x, L), \quad (1.41)$$

где

$$J_2(x, L) = - \int_{C(B_L(x))} (-1)^{N(c_1)} dc_1 \int_{C(\bar{\Phi}_L(x))} (-1)^{N(c_2)} \omega_n(x)(x \cup c_1 \cup c_2) dc_2,$$

причем имеет место оценка

$$|J_2(x, L)| \leq B_2 L^{-k-1}, \quad (1.42)$$

где  $B_2 = B_2(q, A_0, a) > 0$ . Действительно, с помощью (0.26) и (0.27) находим, что

$$\begin{aligned} |J_2(x, L)| &\leq \int_{C(B_L(x))} (H_{\Phi_L(x)} H_{R^v_{n(x)}} |\psi|)(x \cup c) dc = \\ &= \int_{B_L(x)} dy \int_{C(B_L(x))} (N(c) + 1)^{-1} (H_{\Phi_L(x)} H_{R^v_{n(x)}} |\psi|)(x \cup y \cup c) dc \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int_{B_L(x)} (H_{B_L(x) \cup \Phi_L(x)} H_{R^{\nu_n}(x)} |\psi|(x, y) dy,$$

отсюда, пользуясь следствием 3, оценкой (1.35), по аналогии с (1.40) получаем при  $p > \nu + k + 1$  оценку (1.42).

Аналогично

$$\int_{C(P_L(x) \cup A_L(x))} (-1)^{N(c)} \omega_n(x) (x \cup c) dc = \int_{C(P_L(x))} (-1)^{N(c)} \omega_n(x) (x \cup c) dc + J_2(x, L), \quad (1.43)$$

где величина  $J_2(x, L)$  равна

$$J_2(x, L) = \int_{C(A_L(x))} (-1)^{N(c)} dc_1 \int_{C(P_L(x))} (-1)^{N(c_2)} \omega_n(x) (x \cup c_1 \cup c_2) dc_2$$

и удовлетворяет оценке

$$|J_2(x, L)| \leq B_3 L^{-k-1} \quad (2.44)$$

с константой  $B_3 = B_3(q, A_0, a) > 0$ . Таким образом, из (1.39)–(1.44) вытекает равенство

$$\omega_L(x) = \int_{C(P_L(x))} (-1)^{N(c)} \omega_n(x) (x \cup c) dc + J_4(x, L), \quad x \in \Gamma_L, \quad (1.45)$$

причем

$$|J_4(x, L)| \leq B_4 L^{-k-1}, \quad (1.46)$$

где  $B_4 = B_4(q, A_0, a) > 0$ . Пусть теперь

$$J_5(x, L, k) = \sum_{n=(k+1)(\nu+2)+1}^{\infty} (-1)^n \int_{C^n(P_L(x))} \omega_n(x) (x \cup c) dc, \quad x \in \Gamma_L, \quad (1.47)$$

тогда, учитывая, что

$$|P_L(x)| \leq K_2(a) L^{-\frac{1}{\nu+2}}, \quad (1.48)$$

где  $|P_L(x)|$  —  $\nu$ -мерный объем области  $P_L(x)$ , с помощью леммы 2 получаем, что

$$\begin{aligned} |J_5(x, L, k)| &\leq A_1 \sum_{n=(k+1)(\nu+2)+1}^{\infty} \times \\ &\times \int_{C^n(P_L(x))} \sum_{T \in W_n \cup x} \prod_{\{x_1, x_2\} \in F(T)} (Vq)(x_1 - x_2) dc \leq \end{aligned}$$

$$\leq \frac{A_1}{2} \sum_{n=(k+1)(v+2)+1}^{\infty} M_1^n (n+1) |P_L(x)|^n \leq B_5 L^{-k-1}, \quad (1.49)$$

где  $M_1 = \sup_{x \in R^v} (Vq)(x)$ , а  $B_5 = B_5(q, A_0, a) > 0$  — константа.

Таким образом, из (1.45) — (1.49) следует равенство

$$\omega_L(x) = \sum_{n=0}^{(k+1)(v+2)} (-1)^n \int_{C^n(P_L(x))} \omega_{n(x)}(x \cup c) dc + J_6(x, L), \quad x \in \Gamma_L,$$

причем

$$|J_6(x, L)| \leq B_6 L^{-k-1},$$

где  $B_6 = B_6(q, A_0, a)$  — константа.

Отсюда утверждения леммы (1.36) и (1.37) получаются повторением рассуждений, с помощью которых были выше получены (1.39) и (1.40). Лемма доказана.

**Лемма 7.** Пусть выполнены все условия теоремы 4, тогда для функции  $\omega_L(x)$ ,  $x \in \Gamma_L$ ,  $L \geq 1$ , имеет место разложение

$$\omega_L(x) = \sum_{l=0}^k \tilde{c}_l(x, \Lambda_L, \psi) + J(x, L, k), \quad (1.50)$$

где величина  $J(x, L, k)$  допускает оценку

$$|J(x, L, k)| \leq B_7 L^{-k-1}, \quad (1.51)$$

а величины  $\tilde{c}_l(x, \Lambda_L, \psi)$  равны

$$c_0(x, \Lambda_L, \psi) = \int_{C(R^v n(x))} \psi(x \cup c) dc, \quad (1.52)$$

$$\tilde{c}_l(x, \Lambda_L, \psi) = \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{n=1}^{l-j} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{\substack{m \in \mathfrak{M}_l(Z_k) \\ |m| = j+n}} \left( \prod_s (a_{L,s}(x))^{m(s)} \right) g_{n,m}^l(x), \quad (1.53)$$

$l = 1, \dots, k$ ,

где величина  $g_{n,m}^l(x)$  определена в (1.24).

**Доказательство.** Пусть

$$J_n(x, L) = \int_{C^n(P(x))} \omega_{n(x)}(x \cup c) dc, \quad n = 1, 2, \dots,$$

тогда, разлагая функцию  $\omega_{n(x)}(x, (\xi)_n, (\eta)_n)$  в ряд Тейлора по переменным  $(\eta)_n$  в окрестности точки  $(x, (\xi)_n, (0)_n)$  и полагая для  $n = 1, 2, \dots$ ,

$$J_n(x, L, k) = \frac{1}{n!} \sum_{|r| \leq k} \frac{1}{r!} \int_{(T_L(x))_n} d(\xi)_n \int_0^{p_{L,x}(\xi_1)} d\eta_1 \dots \int_0^{p_{L,x}(\xi_n)} \times$$

$$\times (D_{\eta}^r \omega_n(x))(x, (\xi)_n, (0)_n)(\eta)_n^r d\eta_n$$

и

$$J_n'(x, L, k) = \frac{1}{n!} \sum_{|r| \leq k+1} \frac{1}{r!} \int_{(T_{\Gamma}(x))_n} d(\xi)_n \int_0^{p_{L,x}(\xi_1)} d\eta_1 \cdots \int_0^{p_{L,x}(\xi_n)} \times \\ \times (D_{\eta}^r \omega_n(x))(x, (\xi)_n, \theta(\eta)_n)(\eta)_n^r d\eta_n,$$

где  $r = (r_1, \dots, r_n)$  — мультииндекс,  $(\eta)_n^r = \prod_{l=1}^n \eta_l^{r_l}$ , а  $\theta(\eta)_n = (\theta_1 \eta_1, \dots, \theta_n \eta_n)$ ,

в силу (1.36), мы приходим к равенству

$$\omega_L(x) = \tilde{c}_0(x, \Lambda_L, \psi) + \sum_{n=1}^{(k+1)(\nu+2)} (-1)^n J_n'(x, L, k) + \sum_{n=1}^{(k+1)(\nu+2)} (-1)^n J_n''(x, L, k). \quad (1.54)$$

Преобразуем первую сумму в (1.54), с этой целью проинтегрируем по переменным  $(\eta)_n$  в  $J_n'(x, L, k)$

$$J_n'(x, L, k) = \frac{1}{n!} \sum_{|r| \leq k} \left( \prod_{l=1}^n (r_l + 1)! \right)^{-1} \int_{(T_{\Gamma}(x))_n} \times \\ \times (D_{\eta}^r \omega_n(x))(x, (\xi)_n, (0)_n) \prod_{l=1}^n (p_{L,x}(\xi_l))^{r_l+1} d(\xi)_n. \quad (1.55)$$

С другой стороны из (1.34) нетрудно получить, что

$$\prod_{l=1}^n (p_{L,x}(\xi_l))^{r_l+1} = \prod_{l=1}^n (r_l + 1)! \sum_{\substack{m \in \mathcal{M}_L(Z_k): \\ |m| = |r| + n}} \left( \prod_s (a_{L,s}(x))^{m(s)} \right) K_{m,r}((\xi)_n), \quad (1.56)$$

где величина  $K_{m,r}((\xi)_n)$  введена в (1.19), или, в силу (1.33), формулу (1.56) можно переписать в виде

$$\prod_{l=1}^n (p_{L,x}(\xi_l))^{r_l+1} = \prod_{l=1}^n (r_l + 1)! \sum_{l=|r|+n}^{k(|r|+n)} L^{-l} \sum_{\substack{m \in \mathcal{M}_L(Z_k): \\ |m| = |r| + n}} \times \\ \times \left( \prod_s (a_{L,s}(x'))^{m(s)} \right) K_{m,r}((\xi)_n), \quad (1.57)$$

где  $x' = E_{L-1}(x)$ . Подстановка (1.56) в (1.55) дает

$$\sum_{n=1}^{(k+1)(\nu+2)} (-1)^n J_n'(x, L, k) = \sum_{l=1}^k \tilde{c}_l(x, \Lambda_L, \psi) + \tilde{J}'(x, L, k), \quad (1.58)$$

где величины  $\tilde{c}_l$ ,  $l=1, \dots, k$  определены в (1.53), а слагаемое  $\tilde{J}'(x, L, k)$ , в силу (1.57), допускает оценку

$$|\tilde{J}'(x, L, k)| \leq B_8 L^{-k-1}, \quad (1.59)$$

где  $B_8 = B_8(q, A_0, \alpha) > 0$ . Для завершения доказательства леммы осталось убедиться, что аналогичная оценка имеет место и для второй суммы в (1.54). С этой целью заметим, что для любых  $x_1, x_2 \in R^v$

$$(Vq)(x_1 - x_2) \leq M_1 (1 + |x_1 - x_2|)^{-\rho} \leq M_1 (1 + |\xi_1 - \xi_2|)^{-\rho},$$

где  $M_1 = \sup_{x \in R^v} (1 + |x|)^\rho (Vq)(x)$ , а  $x_i = (\xi_i, \eta_i)$ ,  $\xi_i \in R^{v-1}$ ,  $\eta_i \in R^1$ ,  $i=1, 2$ .

Отсюда, с помощью лемм 3 и 4, а также формулы (1.57), по аналогии с (1.49), получаем оценку

$$\left| \sum_{n=1}^{(k+1)(v+2)} (-1)^n J_n'(x, L, k) \right| \leq B_9 L^{-k-1}, \quad (1.60)$$

где  $B_9 = B_9(q, A_0, \alpha) > 0$ . Таким образом, лемма 7 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 4. Заметим, что в силу (1.57)

$$\tilde{c}_l(x, \Lambda_L, \psi) = L^{-l} \tilde{c}_l(x', \Lambda_1 \psi), \quad (1.61)$$

где  $x' = E_{L^{-1}}(x)$ . Далее, из (1.26) и (1.50) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d}{dL} Q(\Lambda_L, \psi) &= \sum_{l=0}^k L^{-1} \int_{\Gamma_L} \tilde{c}_l(x, \Lambda_L, \psi) \langle n(x), x \rangle d\sigma_L(x) + \\ &+ L^{-1} \int_{\Gamma_L} J(x, L, k) \langle n(x), x \rangle d\sigma_L(x), \end{aligned}$$

откуда интегрированием по  $L$ , с учетом (1.61), получаем

$$Q(\Lambda, \psi) = \int_{\Gamma(\Lambda)} \tilde{c}_0(x, \Lambda_L, \psi) \langle n(x), x \rangle d\sigma(x) + \sum_{l=1}^k c_l(\Lambda, \psi) + R_k(\Lambda, \psi), \quad (1.62)$$

где коэффициенты  $c_l(\Lambda, \psi)$ ,  $l=1, \dots, k$  введены в (1.22) и (1.23), а величина  $R_k(\Lambda, \psi)$  равна

$$\begin{aligned} R_k(\Lambda, \psi) &= Q(\Lambda_1, \psi) - \sum_{l=1}^k c_l(\Lambda_1, \psi) - \int_{\Gamma_1} \tilde{c}_0(x, \Lambda_1, \psi) \langle n(x), x \rangle d\sigma_1(x) + \\ &+ \int_1^{L_1(\Lambda)} L^{-1} dL \int_{\Gamma_L} J(x, L, k) \langle n(x), x \rangle d\sigma_L(x). \end{aligned}$$

Оценим  $R_k(\Lambda, \psi)$  для случая  $k=v$  (случай  $k < v$  рассматривается аналогично). Так как  $|\Lambda_1|=1$ , то в силу (1.8)

$$|Q(\Lambda_1, \psi)| \leq A_1. \quad (1.63)$$

Далее, нетрудно убедиться, пользуясь леммой 4, а также (0.12) и (0.13), в существовании константы  $K_2(a) > 0$  такой, что

$$|\bar{c}_l(x, \Lambda_l, \psi)| \leq K_2(a), \quad l = 1, \dots, k.$$

Откуда получаем, что

$$\left| \int_{\Gamma_l} \bar{c}_l(x, \Lambda_l, \psi) \langle n(x), x \rangle d\sigma_l(x) \right| \leq K_2(a) \int_{\Gamma_l} \langle n(x), x \rangle d\sigma_l(x) = \nu \cdot K_2(a) \quad (1.64)$$

для всех  $l = 1, \dots, \nu$ . Здесь в последнем равенстве мы воспользовались формулой Гаусса-Остроградского, согласно которой

$$\int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle d\sigma(x) = \nu |\Lambda|,$$

где  $\Lambda \subset R^n$  — произвольный выпуклый ограниченный сосуд с гладкой границей  $\Gamma(\Lambda)$ . Таким образом, из (1.63), (1.64) и (1.51) следует, что

$$|R_\nu(\Lambda, \psi)| \leq B_{12}(q, A_0, a),$$

где  $B_{12} > 0$ . Остается заметить, что из сравнения (1.62) и (1.13) вытекает, что

$$\int_{\Gamma(\Lambda)} \bar{c}_0(x, \Lambda, \psi) \langle n(x), x \rangle d\sigma(x) = c_0(\psi).$$

Теорема доказана.

## § 2. Разложение $(Q\Lambda, \psi)$ для эвклидово-инвариантных, кластерно-гладких функций

В этом параграфе мы докажем утверждения, аналогичные утверждениям теоремы 2, но для величин  $c_1(\Lambda, \psi)$  и  $c_2(\Lambda, \psi)$ , где  $\psi$  — эвклидово-инвариантная, кластерно-гладкая функция (теорема 5). Теорема 2 будет непосредственно вытекать из теоремы 5 в силу того, что функция Урселла  $\psi_{2,5}$ , соответствующая эвклидово-инвариантному потенциалу взаимодействия, очевидно, сама обладает тем же свойством.

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия теоремы 4, где условие трансляционной инвариантности заменено более сильным — эвклидовой инвариантностью. Тогда величины  $c_1(\Lambda, \psi)$  и  $c_2(\Lambda, \psi)$ , введенные в (1.22) равны

$$c_1(\Lambda, \psi) = d_1(\psi) \mathfrak{L}(\Gamma(\Lambda)), \quad (2.1)$$

$$c_2(\Lambda, \psi) = \begin{cases} \frac{1}{\nu-2} [d_2(\psi) M(\Gamma(\Lambda)) + \bar{d}_2(\psi) \bar{M}(\Gamma(\Lambda))], & \text{если } \nu > 2 \\ \frac{1}{2} d_2(\psi) M(\Gamma(\Lambda)) \ln |\Lambda|, & \text{если } \nu = 2, \end{cases} \quad (2.2)$$

где

$$d_1(\psi) = -\frac{1}{2} \int_{R^{v-1}} \langle \xi, e \rangle^2 \omega_v(0, \xi) d\xi, \quad (2.3)$$

$$d_2(\psi) = \frac{1}{8} \int_{R^{v-1}} \int_{R^{v-1}} \langle \xi_1, e \rangle^2 \langle \xi_2, e \rangle^2 \omega_v(0, \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$\bar{d}_2(\psi) = \frac{1}{4} \int_{R^{v-1}} \int_{R^{v-1}} \langle \xi_1, e_1 \rangle^2 \langle \xi_2, e_2 \rangle^2 \omega_v(0, \xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (2.3)$$

а величины  $M$  и  $\bar{M}$  равны

$$M(\Gamma(\Lambda)) = \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle \left( \sum_{i=1}^{v-1} (x_\Gamma)_i^2(x) \right) d\sigma(x), \quad (2.6)$$

$$\bar{M}(\Gamma(\Lambda)) = \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle \left( \sum_{1 \leq i < j \leq v-1} (x_\Gamma)_i(x) (x_\Gamma)_j(x) \right) d\sigma(x). \quad (2.7)$$

При этом использованы обозначения:  $e, v \in R^{v-1}$  — произвольные единичные векторы  $e_1, e_2 \in R^{v-1}$  — произвольная пара ортонормированных векторов (очевидно, интегралы (2.3), (2.4) и (2.5) не зависят от выбора этих векторов).

Доказательство. Заметим, что из эвклидовой инвариантности функции  $\psi$  следует, что при любом  $\Lambda \subset R^v$  функция  $\omega_\Lambda$  и ее частные производные также обладают этим свойством. Таким образом, величина  $g'_{n,m}(x, \psi)$ , введенная в (1.24), не зависит от точки  $x \in \Gamma(\Lambda)$ , поэтому

$$c_1(\Lambda, \psi) = -\frac{1}{v-1} \sum_{|s|=2} \frac{1}{s!} \int_{T_\Gamma(x)} \omega_{n(x)}(x, \xi) \xi^s d\xi \cdot \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle f_{\Gamma, x}^{(s)}(0) d\sigma(x).$$

Отсюда, ввиду того, что оси  $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{v-1}$  направлены по главным направлениям поверхности  $\Gamma(\Lambda)$  в точке  $x$ , получаем, что

$$\begin{aligned} c_1(\Lambda, \psi) &= -\frac{1}{2(v-2)} \sum_{i=1}^{v-1} \int_{T_\Gamma(x)} \omega_{n(x)}(x, \xi) (\xi^{(i)})^2 d\xi \cdot \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle (x_\Gamma)_i(x) d\sigma(x) = \\ &= d_1(\psi) \frac{1}{v-1} \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle \left( \sum_{i=1}^{v-1} (x_\Gamma)_i(x) \right) d\sigma(x). \end{aligned}$$

Теперь заметим, что согласно формуле Минковского для площади поверхности выпуклого тела с достаточно гладкой границей при  $v \geq 2$  имеем

$$\frac{1}{v-2} \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle \left( \sum_{i=1}^{v-1} (x_\Gamma)_i(x) \right) d\sigma(x) = S(\Gamma(\Lambda)),$$

что и заканчивает доказательство (2.1). Установим теперь справедливость (2.2). Пусть  $v \geq 2$ , тогда

$$\begin{aligned}
c_2(\Lambda, \psi) = & \frac{1}{v-2} \left\{ - \sum_{|s|=3} \frac{1}{s!} \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle f_{\Gamma, x}^{(s)}(0) d\sigma(x) \times \right. \\
& \times \int_{T_{\Gamma}(x)} \omega_n(x)(x, \xi) \xi^s d\xi + \frac{1}{2} \sum_{s_1, s_2: |s_1|=|s_2|=2} \frac{1}{s_1! s_2!} \times \\
& \times \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle f_{\Gamma, x}^{(s_1)}(0) f_{\Gamma, x}^{(s_2)}(0) d\sigma(x) \times \\
& \times \int_{T_{\Gamma}(x)} \int_{T_{\Gamma}(x)} \omega_n(x)(x, \xi_1, \xi_2) \xi_1^2 \xi_2^2 d\xi_1 d\xi_2 - \\
& - \sum_{s_1, s_2: |s_1|=|s_2|=2} \frac{1}{s_1! s_2!} \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle f_{\Gamma, x}^{(s_1)}(0) f_{\Gamma, x}^{(s_2)}(0) d\sigma(x) \times \\
& \times \left. \int_{T_{\Gamma}(x)} (D_{\eta} \omega_n(x))(x, \xi) \xi^{s_1+s_2} d\xi \right\}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, из евклидовой инвариантности функции  $\psi$ , как легко видеть, вытекают соотношения

$$\int_{T_{\Gamma}(x)} \omega_n(x)(x, \xi) \xi^s d\xi = 0 \text{ при } |s| = 3 \text{ и } D_{\eta} \omega_n(x)(x, \xi) = 0.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
c_2(\Lambda, \psi) = & \frac{1}{8(v-2)} \sum_{l, j=1}^{v-1} \int_{\Gamma(\Lambda)} \langle n(x), x \rangle (x_{\Gamma})_l(x) (x_{\Gamma})_j(x) d\sigma(x) \times \\
& \times \int_{T_{\Gamma}(x)} \int_{T_{\Gamma}(x)} \omega_n(x)(x, \xi_1, \xi_2) (\xi_1^{(l)})^2 (\xi_2^{(j)})^2 d\xi_1 d\xi_2 = \frac{1}{4(v-2)} M(\Gamma(\Lambda)) \times \\
& \times \int_{T_{\Gamma}(x)} \int_{T_{\Gamma}(x)} \omega_n(x)(x, \xi_1, \xi_2) \langle e, \xi_1 \rangle \cdots \langle e, \xi_2 \rangle^2 d\xi_1 d\xi_2 + \frac{1}{8(v-2)} \bar{M}(\Gamma(\Lambda)) \times \\
& \times \int_{T_{\Gamma}(x)} \int_{T_{\Gamma}(x)} \omega_n(x)(x, \xi_1, \xi_2) \langle e_1, \xi_1 \rangle \cdots \langle e_2, \xi_2 \rangle \cdots d\xi_1 d\xi_2,
\end{aligned}$$

Аналогичным образом устанавливается справедливость соотношения (2.2) в случае  $v = 2$ . Теорема доказана.

### П р и л о ж е н и е

Здесь мы приведем доказательство леммы 1. Пусть  $M$  есть пространство всех суммируемых и ограниченных функций на  $[0, \infty)$ , и пусть  $M_p$  — банахово пространство функций на  $R^+$ , представимых в виде  $f(x) = \bar{f}(|x|)(1+|x|)^{-p}$ ,  $x \in R^+$ ,  $\bar{f} \in M$ , с нормой

$$\|f\| = \max \left\{ \sup_{x \in R^v} |f(x)|, \int_{R^v} |f(x)| dx \right\} f \in M_p.$$

Для любого  $q \in M_p$  через  $A_q$  обозначим оператор, действующий в пространстве  $M_p$  по формуле

$$(A_q f)(x) = \int_{R^v} f(x) q(x-y) dy.$$

Нетрудно убедиться, что при любом  $q \in M_p$ ,  $A_q$  является линейным, ограниченным оператором, причем

$$\|A_q\| \leq \|q\|. \quad (1)$$

Уравнение (1.1) теперь можно записать в виде следующего операторного уравнения:

$$(E - A_q) f = q,$$

где  $E$  — единичный оператор. В силу (1) при  $\|q\| < 1$  оператор  $E - A_q$  имеет обратный  $(E - A_q)^{-1}$ , так что для завершения доказательства достаточно заметить, что  $M_p^+ \subset M_p$  и  $A_q(M_p^+) \subset M_p^+$  при любом  $q \in M_p^+$ .

В заключение приношу глубокую благодарность Р. А. Минлосу за постановку задачи и внимание к работе.

Институт математики  
АН Армянской ССР

Поступила 23.IX.1977

Ս. Կ. ՊՈԴՈՍՅԱՆ. Ստատիստիկ գումարի լոգարիթմի ասիմպտոտիկ վերլուծությունը (ամփոփում)

Սահմանափակ ուղղանկյուն  $\Lambda \subset R^v$ ,  $v=1, 2, \dots$  տիրույթում գտնվող միասնական մասնիկների կոնֆիգուրացիոն անընդհատ սխեմների դեպքում ստացված է այդ սխեմների ստատիստիկ գումարի լոգարիթմի ասիմպտոտիկ վերլուծությունը:

S. K. POGOSIAN. *The asymptotical expansion of the partition function logarithm (Summary)*

For the case of continuous configurational system of identical particles in the convex bounded region the asymptotic expansion of the partition function logarithm is obtained

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Д. Рюэль. Статистическая механика. Строгие результаты, Изд. „Мир“, 1971.
2. Р. А. Минлос, С. К. Погосян. Оценки функций Урсселла, групповых функций и их производных. Теоретическая и математическая физика, 31, № 2, 1977.
3. Р. А. Минлос. Лекции по статистической физике, УМН, 23, 139, 1968.
4. В. Бляшке. Круг и шар, Изд. „Наука“, 1967.

- 
5. Р. А. Добрушин. Асимптотическое поведение гиббсовских распределений для решетчатых систем в зависимости от формы сосуда, Теоретическая и математическая физика, 12, № 1, 1972.
  6. M. E. Fisher and G. Caglianp. Wall and Boundary Free Energies 1. Ferromagnetic Scalar Spin Systems (препринт).