И. Г. ХАЧАТРЯН

ОБ ОПЕРАТОРАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В теории дифференциальных операторов второго порядка рассматриваются три типа операторов преобразования (см. [4]).

1) Пусть $y(x, \lambda)$ — решение уравнения

$$y'' - q(x)y + \lambda^2 y = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (0.1)$$

с $q(x) \in L_1(0, l)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0, \lambda) = 1$, $y'(0, \lambda) = h$. Тогда существует абсолютно непрерывная* функция $K(x, t)$ такая, что при всех значениях параметра λ справедлива формула

$$y(x, \lambda) = \cos \lambda x + \int_0^x K(x, t) \cos \lambda t dt, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (0.2)$$

Оператор $I + K$, определяемый правой частью формулы (0.2), называется оператором преобразования. Этот оператор преобразует решение $\varphi(x, \lambda) = \cos \lambda x$ уравнения

$$\varphi'' + \lambda^2 \varphi = 0 \quad (0.3)$$

с начальными условиями $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = 0$ в решение $y(x, \lambda)$ уравнения (0.1).

2) Пусть $\psi(x, \lambda)$ — произвольное решение уравнения (0.3), а $u(x, \lambda)$ — решение уравнения (0.1), удовлетворяющее начальным условиям $u(0, \lambda) = \psi(0, \lambda)$, $u'(0, \lambda) = \psi'(0, \lambda) + h\psi(0, \lambda)$. Тогда существует функция $M(x, t)$, не зависящая от $\psi(x, \lambda)$, такая, что

$$u(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + \int_{-x}^x M(x, t) \psi(t, \lambda) dt, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (0.4)$$

Если в уравнении (0.1) $q(x) \in L_1(-l, l)$, то формулы (0.2) и (0.4) справедливы при $-l \leq x \leq l$. В отличие от $I + K$, оператор $I + M$ преобразует всякое решение уравнения (0.3) в решение уравнения (0.1). Формулы (0.2) и (0.4) получены А. Я. Повзнером [1].

* Впредь функцию $f(x, t)$, непрерывную по совокупности аргументов и абсолютно непрерывную по каждому аргументу, вкратце будем называть абсолютно непрерывной.

3) Пусть в уравнении (0.1) функция $q(x)$ определена на полуоси $0 < x < \infty$ и $xq(x) \in L_1(0, \infty)$. Тогда уравнение (0.1) имеет решение $v(x, \lambda)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(x, \lambda) e^{-\lambda x} = 1, \quad \text{Im } \lambda \geq 0,$$

кроме того, существует функция $L(x, t)$ такая, что

$$v(x, \lambda) = e^{\lambda x} + \int_0^{\infty} L(x, t) e^{\lambda t} dt, \quad \text{Im } \lambda \geq 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (0.5)$$

Правая часть формулы (0.5) определяет введенный Б. Я. Левиным [3] оператор преобразования $I + L$, сохраняющий асимптотику решений.

Операторы преобразования для дифференциальных уравнений порядка $n > 2$ изучались в работах [5]—[15]. В этом случае операторы преобразования имеют более сложную структуру, чем для уравнений второго порядка, и только в случае уравнений с аналитическими коэффициентами (см. [8]—[10]) операторы преобразования имеют такой же вид, что и для уравнений второго порядка. Приведем результат, полученный Л. А. Сахновичем [8]. Пусть $y(x, \lambda)$ — решение уравнения

$$y^{(n)} + p_{n-2}(x) y^{(n-2)} + \dots + p_0(x) y = \lambda^n y, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (0.6)$$

$$y(0, \lambda) = 1, \quad y^{(v)}(0, \lambda) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n-1,$$

с целыми аналитическими коэффициентами $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$), а $\varphi(x, \lambda)$ — решение уравнения $\varphi^{(n)} = \lambda^n \varphi$ с начальными условиями $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi^{(v)}(0, \lambda) = 0$ ($v = 1, 2, \dots, n-1$), тогда существует аналитическая функция $K(x, t)$ такая, что имеет место формула

$$y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) \varphi(t, \lambda) dt, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (0.7)$$

В настоящей работе приводится простой вывод формулы (0.7) и одновременно эта формула обобщается на случай операторных уравнений. Доказывается, что для справедливости формулы (0.7) при $0 \leq x \leq l$ достаточно требовать принадлежность коэффициентов уравнения (0.6) классу H_l аналитических функций в четырехугольнике D_l^n с вершинами

$$0, l, l \left[1 - \exp\left(i \frac{2\pi}{n}\right) \right]^{-1}, l \left[1 - \exp\left(-i \frac{2\pi}{n}\right) \right]^{-1}.$$

При $l = \infty$ область D_l^n превращается в сектор $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$,

* Определение класса H_l аналитических функций содержится в книге И. И. Привалова [16]. В [16] обозначение H_l применяется для круговых областей, а для произвольных областей применяется обозначение E_l .

в этом случае требуется принадлежность коэффициентов классу $H_1(D_a^n)$ при каждом a ($0 < a < \infty$). Эти условия, наложенные на коэффициенты, в некотором смысле согласуются с условиями в случае уравнений второго порядка, поскольку замкнутая область $\bar{D}_1^n$ при $n=2$ превращается в отрезок $[0, 1]$. Аналогичные обобщения допускают и формулы (0.4) и (0.5), которым автор надеется посвятить отдельную статью. В работе используются следующие свойства функций класса $H_1(D_1^n)$ (см. [16], [17]). Пусть $f(z) \in H_1(D_1^n)$, тогда

а) Почти всюду на границе C области D_1^n существуют граничные значения функции $f(z)$, которые на C определяют суммируемую функцию. Если $f'(z) \in H_1(D_1^n)$, то функция $f(z)$ непрерывна вплоть до контура C и абсолютно непрерывна на C .

б) Если γ — произвольный прямолинейный отрезок, лежащий в $\bar{D}_1^n$, то

$$\sup_{\gamma} \int_{\gamma} |f(z)| |dz| < \infty. \quad (0.8)$$

в) Если Γ — произвольный треугольный контур, лежащий в $\bar{D}_1^n$, то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0. \quad (0.9)$$

1°. 1. Для формулировки результатов введем несколько обозначений. Обозначим через D_a замкнутую четырехугольную область на комплексной плоскости z с вершинами $0, a, a(1 - \omega_1)^{-1}, a(1 - \omega_{n-1})^{-1}$, где

$$\omega_s = e^{i \frac{2\pi s}{n}}, \quad s = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.1)$$

Обозначим $V = \{(\xi, z); z \in D_{l-\xi}, 0 \leq \xi \leq l\}$: область V в трехмерном пространстве (с горизонтальной комплексной плоскостью z и вертикальной вещественной осью ξ) представляет собой пирамиду с вершиной $(l, 0)$ и с основанием D_l . Обозначим через $\Phi(x, \lambda)$ решение следующего операторного уравнения относительно матрицы-функции $\Phi(x)$

$$\Phi^{(n)} - \lambda^n \Phi = 0, \quad (1.2)$$

$$\Phi(0, \lambda) = I, \quad \Phi^{(v)}(0, \lambda) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, n-1,$$

где I — единичная матрица. Заметим, что

$$\Phi(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) I, \quad (1.3)$$

где

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} e^{\omega_s \lambda x}. \quad (1.4)$$

Отметим следующие свойства функции $\varphi(x, \lambda)$:

$$\frac{1}{\lambda^n} \varphi^{(n-1-k)}(x, \lambda) = \frac{1}{k!} \int_0^x (x-u)^k \varphi(u, \lambda) du, \quad k=0, 1, \dots, n-2, \quad (1.5)$$

$$\varphi(x, \lambda) \varphi(t, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} \varphi(x + \omega_s t, \lambda), \quad (1.6)$$

$$\varphi(\omega_s x, \lambda) = \varphi(x, \lambda), \quad s=0, 1, \dots, n-1. \quad (1.7)$$

Обозначим через $Y(x, \lambda)$ решение следующего операторного уравнения относительно матрицы-функции $Y(x)$

$$Y^{(n)} + P_{n-2}(x) Y^{(n-2)} + \dots + P_0(x) Y - \lambda^n Y = F(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.8)$$

$$Y^{(\nu)}(0) = A_\nu, \quad \nu=0, 1, \dots, n-1. \quad (1.9)$$

Основным результатом настоящей работы является следующая Теорема 1. Если в уравнении (1.8) $P_k^{(k)}(z) \in H_1(D_l)$ ($k=0, 1, \dots, n-2$) и $F(x) \in L_1(0, l)^*$, то существует единственная матрица-функция $K(x, t)$ ($0 \leq t \leq x \leq l$), имеющая по обеим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-2$ и такая, что имеет место формула

$$Y(x, \lambda) = A_0 \Phi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) \Phi(t, \lambda) dt, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.10)$$

При этом $K(x, t) = K_0(x-t, t)$, где матрица-функция $K_0(\xi, z)$ определена в пирамиде V и все частные производные которой порядка $n-1$ при фиксированном ξ принадлежат классу $H_1(D_{l-\xi})$.

Доказательство. Непосредственной проверкой можно убедиться, что $Y(x, \lambda)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$Y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) A_0 + \int_0^x \varphi(t, \lambda) B(x-t) dt + \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-2} \int_0^x \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) Q_k(t) Y(t, \lambda) dt, \quad (1.11)$$

где

$$B(x) = A_1 + \sum_{k=0}^{n-3} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \left[A_{k+2} - \sum_{\nu=0}^k \sum_{j=0}^{\nu} C_{k-j}^{\nu-j} Q_j^{(\nu-j)}(0) A_{k-\nu} \right] +$$

* Эти условия нужно понимать как условия на элементы матриц $P_k(z)$ и $F(x)$. Рассматриваемые в работе матрицы являются квадратными и имеют конечный, причем одинаковый порядок.

$$+ \frac{1}{(n-2)!} \int_0^x (x-u)^{n-2} F(u) du, \quad (1.12)$$

$$Q_k(x) = \sum_{\nu=0}^k (-1)^{k-\nu+1} C_{n-2-\nu}^{k-\nu} P_{n-2-\nu}^{(k-\nu)}(x), \quad k=0, 1, \dots, n-2. \quad (1.13)$$

Действительно, если уравнение (1.11) n раз продифференцировать, предварительно заменив

$$\int_0^x \varphi(t, \lambda) B(x-t) dt = \int_0^x \varphi(x-t, \lambda) B(t) dt,$$

то с учетом формул $\varphi^{(n)}(x, \lambda) = \lambda^n \varphi(x, \lambda)$ и

$$P_{n-2-k}(x) = - \sum_{\nu=0}^k C_{n-2-\nu}^{k-\nu} Q_{\nu}^{(k-\nu)}(x), \quad k=0, 1, \dots, n-2,$$

получим уравнение (1.8). Аналогично проверяются и условия (1.9).

С учетом условий теоремы из (1.13) следует, что

$$Q_k^{(n-2-k)}(z) \in H_1(D_i), \quad k=0, 1, \dots, n-2. \quad (1.14)$$

Применяя метод последовательных приближений к уравнению (1.11), получим

$$Y(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j(x, \lambda), \quad (1.15)$$

где функции $R_j(x, \lambda)$ определяются из рекуррентных соотношений

$$R_0(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) A_0 + \int_0^x \varphi(t, \lambda) B(x-t) dt, \quad (1.16)$$

$$R_{j+1}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-2} \int_0^x \varphi^{(n-1-k)}(x-t, \lambda) Q_k(t) R_j(t, \lambda) dt, \quad j=0, 1, 2, \dots. \quad (1.17)$$

Покажем, что матрицы-функции $R_j(x, \lambda)$ можно представить в виде

$$R_j(x, \lambda) = \int_0^x \varphi(t, \lambda) K_j(x-t, t) dt, \quad j=1, 2, \dots. \quad (1.18)$$

С учетом формул (1.5), (1.16), (1.17) матрицу $R_1(x, \lambda)$ напомним в виде

$$R_1(x, \lambda) = T(x, \lambda) A_0 + \tilde{T}(x, \lambda), \quad (1.19)$$

где

$$T(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \int_0^x Q_k(t) \varphi(t, \lambda) \int_t^x (x-u)^k \varphi(u-t, \lambda) du dt, \quad (1.20)$$

$$\bar{T}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \int_0^x Q_k(t) \int_t^x (x-u)^k \varphi(u-t, \lambda) \int_0^t \varphi(v, \lambda) B(t-v) dv du dt. \quad (1.21)$$

Если в (1.20) поменять порядок интегрирования, то получим

$$T(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \int_0^x (x-u)^k \int_0^u \varphi(t, \lambda) \varphi(u-t, \lambda) Q_k(t) dt du. \quad (1.22)$$

В силу (1.6) формула (1.22) принимает вид

$$T(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \left[\int_0^x \varphi(t, \lambda) (x-t)^k \int_0^t Q_k(u) du dt + \right. \\ \left. + \sum_{s=1}^{n-1} \int_0^x (x-u)^k \int_0^u \varphi(u-t + \omega_s t, \lambda) Q_k(t) dt du \right]. \quad (1.23)$$

Однако

$$\int_0^u \varphi(u-t + \omega_s t, \lambda) Q_k(t) dt = \frac{1}{1-\omega_s} \int_{\omega_s u}^u \varphi(t, \lambda) Q_k\left(\frac{u-t}{1-\omega_s}\right) dt. \quad (1.24)$$

Согласно (1.14) и (0.9) имеем

$$\int_{\omega_s u}^u \varphi(t, \lambda) Q_k\left(\frac{u-t}{1-\omega_s}\right) dt = \int_{\omega_s u}^0 \varphi(t, \lambda) Q_k\left(\frac{u-t}{1-\omega_s}\right) dt + \\ + \int_0^u \varphi(t, \lambda) Q_k\left(\frac{u-t}{1-\omega_s}\right) dt. \quad (1.25)$$

Кроме того, в силу (1.7)

$$\int_{\omega_s u}^0 \varphi(t, \lambda) Q_k\left(\frac{u-t}{1-\omega_s}\right) dt = -\omega_s \int_0^u \varphi(t, \lambda) Q_k\left(\frac{u-\omega_s t}{1-\omega_s}\right) dt. \quad (1.26)$$

С учетом формул (1.24), (1.25) и (1.26) имеем

$$\int_0^x (x-u)^k \int_0^u \varphi(u-t + \omega_s t, \lambda) Q_k(t) dt du =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-\omega_s} \int_0^x (x-u)^k \int_0^u \varphi(t, \lambda) \left[Q_k \left(\frac{u-t}{1-\omega_s} \right) - \omega_s Q_k \left(\frac{u-\omega_s t}{1-\omega_s} \right) \right] dt du = \\
&= \frac{1}{1-\omega_s} \int_0^x \varphi(t, \lambda) \int_0^{x-t} (x-t-u)^k \left[Q_k \left(\frac{u}{1-\omega_s} \right) - \omega_s Q_k \left(t + \frac{u}{1-\omega_s} \right) \right] du dt.
\end{aligned}$$

Поэтому формула (1.23) принимает вид

$$T(x, \lambda) = \int_0^x \varphi(t, \lambda) H(x-t, t) dt, \quad (1.27)$$

где

$$\begin{aligned}
H(\xi, z) &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k! n} \xi^k \int_0^z Q_k(\zeta) d\zeta - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k! n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\omega_s}{1-\omega_s} \int_0^{\xi} (\xi-u)^k \times \\
&\times Q_k \left(z + \frac{u}{1-\omega_s} \right) du + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k! n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega_s} \int_0^{\xi} (\xi-u)^k Q_k \left(\frac{u}{1-\omega_s} \right) du. \quad (1.28)
\end{aligned}$$

Если в последних двух интегралах, стоящих в правой части (1.28), сделать замены переменных $z + u(1-\omega_s)^{-1} = \zeta$, $u(1-\omega_s)^{-1} = \zeta$ и учесть формулы

$$\xi^k = - \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s (1-\omega_s)^k \left(\frac{\xi}{1-\omega_s} + z - \zeta \right)^k, \quad k=0, 1, \dots, n-2,$$

то в силу (1.14) и (0.9) получим

$$\begin{aligned}
H(\xi, z) &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k! n} \sum_{s=1}^{n-1} (1-\omega_s)^k \int_0^{\frac{\xi}{1-\omega_s}} \left(\frac{\xi}{1-\omega_s} - \zeta \right)^k Q_k(\zeta) d\zeta - \\
&- \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k! n} \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s (1-\omega_s)^k \int_0^{\frac{\xi}{1-\omega_s} + z} \left(\frac{\xi}{1-\omega_s} + z - \zeta \right)^k Q_k(\zeta) d\zeta. \quad (1.29)
\end{aligned}$$

Сделав в (1.21) замену переменных $u_1 = u$, $t_1 = u - t$, $v_1 = u - t + v$, и опустив индексы у новых переменных, получим

$$\tilde{T}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \int_0^x (x-u)^k \int_0^u \int_0^v \varphi(t, \lambda) \varphi(v-t, \lambda) Q_k(u-t) B(u-v) dt dv du. \quad (1.30)$$

Повторяя рассуждения, сделанные при выводе (1.27), формулу (1.30) приведем к виду

$$\tilde{T}(x, \lambda) = \int_0^x \varphi(t, \lambda) \tilde{H}(x-t, t) dt, \quad (1.31)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\xi, z) = & \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} (1-\omega_s)^k \int_0^{\xi} \int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}} \left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s} - \zeta \right)^k Q_k(u+\zeta) B(u) d\zeta du - \\ & - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s (1-\omega_s)^k \int_0^{\xi} \int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s} + z} \left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s} + z - \zeta \right)^k Q_k(u+\zeta) B(u) d\zeta du. \end{aligned} \quad (1.32)$$

С учетом (1.19), (1.27) и (1.31) приходим к формуле

$$R_1(x, \lambda) = \int_0^x \varphi(t, \lambda) K_1(x-t, t) dt, \quad (1.33)$$

где

$$K_1(\xi, z) = H(\xi, z) A_0 + \tilde{H}(\xi, z). \quad (1.34)$$

В силу (1.14) из формул (1.29), (1.32), (1.34) следует, что матрица-функция $K_1(\xi, z)$ определена в пирамиде V и все частные производные порядка $n-1$ при фиксированном ξ принадлежат классу $H_1(D_{1-})$. Возможность представления матриц-функций $R_j(x, \lambda)$ ($j=1, 2, \dots$) в виде (1.18) докажем методом математической индукции. При $j=1$ такое представление уже получено. Предположим, что при некотором j формула (1.18) верна, причем соответствующая матрица-функция $K_j(\xi, z)$ обладает всеми свойствами, высказанными выше относительно $K_1(\xi, z)$. Тогда, согласно (1.17) и (1.5) имеем

$$\begin{aligned} R_{j+1}(x, \lambda) = & \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \int_0^x Q_k(t) \int_t^x (x-u)^k \varphi(u-t, \lambda) \times \\ & \times \int_0^t \varphi(v, \lambda) K_j(t-v, v) dv du dt. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Повторяя относительно (1.35) рассуждения, сделанные при выводе (1.33), получим формулу (1.18) для $R_{j+1}(x, \lambda)$, при этом

$$K_{j+1}(\xi, z) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} (1-\omega_s)^k \int_0^{\xi} \int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}} \left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s} - \zeta \right)^k Q_k(u+\zeta) K_j(u, \zeta) d\zeta du -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s (1-\omega_s)^k \int_0^{\xi} \int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s} + z} \left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s} + z - \zeta \right)^k Q_k(u+\zeta) K_j(u, \zeta) d\zeta du. \quad (1.36)$$

Из (1.36) следует, что $K_{j+1}(\xi, z)$ тоже обладает свойствами, высказанными относительно $K_1(\xi, z)$. Формулы (1.18) доказаны.

Из (1.14) и (0.8) следует, что

$$c = \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^{k+1}}{k!} \left[\sup_{z, z_1 \in D_l} \int_{z_1}^z |z - \zeta|^k |Q_k(\zeta)| |d\zeta| \right] < \infty, \quad (1.37)$$

где $|Q_k(z)|$ — сумма модулей всех элементов матрицы $Q_k(z)$. С учетом (1.37) из формул (1.29), (1.32), (1.34) легко получается оценка

$$|K_1(\xi, z)| \leq c [|A_0| + l \cdot \max_{0 < \xi < l} |B(\xi)|] = c_0. \quad (1.38)$$

В силу (1.37) и (1.38) из формулы (1.36) по индукции получим оценки

$$|K_{j+1}(\xi, z)| \leq c_0 c^j \frac{\xi^j}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Положим

$$K_0(\xi, z) = B(\xi) + \sum_{j=1}^{\infty} K_j(\xi, z). \quad (1.39)$$

В силу равномерной сходимости ряда (1.39) матрица-функция $K_0(\xi, z)$ при фиксированном ξ принадлежит классу $H_1(D_{l-\xi})$. Если формулы (1.36) просуммировать по значениям j и учесть (1.32), (1.34), то для $K_0(\xi, z)$ получим следующее интегральное уравнение

$$K_0(\xi, z) = B(\xi) + H(\xi, z) A_0 + \\ + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} (1-\omega_s)^k \int_0^{\xi} \int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}} \left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s} - \zeta \right)^k Q_k(u+\zeta) K_0(u, \zeta) d\zeta du - \\ - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s (1-\omega_s)^k \int_0^{\xi} \int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}} \left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s} + z - \zeta \right)^k Q_k(u+\zeta) K_0(u, \zeta) d\zeta du. \quad (1.40)$$

Если обозначить $K(x, t) = K_0(x-t, t)$, то с учетом формул (1.16), (1.18) и (1.3) из (1.15) получим формулу (1.10). В силу (1.14) из (1.40) следует, что матрицы-функции $K_0(\xi, z)$ и $K(x, t)$ обладают всеми свойствами, высказанными в теореме. Остается доказать единственность

матрицы-функции $K(x, t)$. Пусть суммируемая матрица-функция $\bar{K}(x, t)$ такая, что

$$Y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) A_0 + \int_0^x \varphi(t, \lambda) \bar{K}(x, t) dt. \quad (1.41)$$

Если из равенства (1.41) вычесть (1.10), то получим

$$\int_0^x \varphi(t, \lambda) [\bar{K}(x, t) - K(x, t)] dt = 0. \quad (1.42)$$

Разлагая функцию $\varphi(x, \lambda)$ в ряд по степеням λ ,

$$\varphi(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{nj}}{(nj)!} \lambda^{nj}, \quad (1.43)$$

из (1.42) получим

$$\int_0^x t^{nj} [\bar{K}(x, t) - K(x, t)] dt = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что $\bar{K}(x, t) = K(x, t)$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Если в начальных условиях (1.9) при некотором m ($1 \leq m \leq n-1$) $A_\nu = 0$ ($\nu = 0, 1, \dots, m-1$), то из уравнения (1.40) следует, что

$$\sum_{j=0}^m (-1)^j C_j^j \frac{\partial^{\nu}}{\partial \xi^{\nu-j} \partial z^j} K_0(\xi, z)|_{\xi=0} = A_{\nu+1}, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1, \quad (1.44)$$

и в частности

$$(-1)^\nu \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} K(x, t)|_{t=x} = A_{\nu+1}, \quad \nu = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1.45)$$

Замечание 2. Пусть в (1.9) при некотором m ($0 \leq m \leq n-1$) $A_\nu = 0$ ($\nu = 0, 1, \dots, m-1$). Тогда если правую часть формулы (1.10) m раз проинтегрировать по частям и учесть (1.45), то получим

$$Y(x, \lambda) = A_m \Phi_m(x, \lambda) + \int_0^x L(x, t) \Phi_m(t, \lambda) dt,$$

где

$$L(x, t) = (-1)^m \frac{\partial^m}{\partial t^m} K(x, t),$$

а $\Phi_m(x, \lambda)$ — решение уравнения (1.2) с начальными условиями $\Phi^{(m)}(0) = I$, $\Phi^{(\nu)}(0) = 0$ ($\nu \neq m$): при $m \geq 1$

$$\Phi_m(x, \lambda) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^x (x-t)^{m-1} \Phi(t, \lambda) dt.$$

Обозначим

$$L_0(\xi, z) = \sum_{j=0}^m (-1)^j C_m^j \frac{\partial^m}{\partial \xi^{m-j} \partial z^j} K_0(\xi, z).$$

С учетом (1.44) из (1.40) для $L_0(\xi, z)$ можно вывести следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} L_0(\xi, z) &= B^{(m)}(\xi) + H_m(\xi, z) A_m + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^m} \int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s}} \int_0^{\xi} \left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s} - \zeta \right)^k Q_k(u+\zeta) L_0(u, \zeta) d\zeta du - \\ &- \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s (1-\omega_s)^k \int_0^{\frac{\xi-u}{1-\omega_s} + z} \int_0^{\xi} \left(\frac{\xi-u}{1-\omega_s} + z - \zeta \right)^k Q_k(u+\zeta) L_0(u, \zeta) d\zeta du, \end{aligned} \quad (1.46)$$

где

$$\begin{aligned} H_m(\xi, z) &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{(1-\omega_s)^k}{\omega_s^m} \int_0^{\frac{\xi}{1-\omega_s}} \left(\frac{\xi}{1-\omega_s} - \zeta \right)^k Q_k(\zeta) d\zeta - \\ &- \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s (1-\omega_s)^k \int_0^{\frac{\xi}{1-\omega_s} + z} \left(\frac{\xi}{1-\omega_s} + z - \zeta \right)^k Q_k(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Если в уравнении (1.8) $P_*^{(k+r)}(z) \in H_1(D_I)$ ($k=0, 1, \dots, n-2$) и $F^{(m+r)}(x) \in L_1(0, l)^*$, то из (1.46) следует, что все частные производные порядка $n-1+r$ (порядка $n+r$) матрицы-функции $L_0(\xi, z)$ (матрицы-функции $L_0(\xi, z) - B^{(m)}(\xi) - H_m(\xi, z) A_m$) при фиксированном ξ принадлежат классу $H_1(D_{I-\xi})$, а матрицы-функции $L(x, t)$ и $L(x, t) - B^{(m)}(x-t) - H_m(x-t, t) A_m$ имеют по обоим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-2+r$ и $n-1+r$ соответственно.

Замечание 3. Из (1.47) следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1-j} \partial t^j} H_m(x-t, t) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{s=1}^{n-1} \frac{1}{\omega_s^m (1-\omega_s)^{n-1-k}} Q_k^{(n-2-k)} \left(\frac{x-t}{1-\omega_s} \right). \end{aligned} \quad (1.48)$$

* Впредь $f^{(\nu)}(x) \in L_1(0, l)$ при $\nu \geq 1$ будет означать лишь абсолютную непрерывность функций $f^{(j)}(x)$ ($j=0, 1, \dots, \nu-1$).

Поэтому матрица-функция, стоящая в левой части (1.48), зависит только от разности $x - t$.

2. Обозначим через $Y(x, \lambda)$ и $\bar{Y}(x, \lambda)$ решения следующих уравнений

$$\Lambda(Y) - \lambda^n Y = F(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.49)$$

$$Y^{(\nu)}(0) = A_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.50)$$

$$\bar{\Lambda}(\bar{Y}) - \lambda^n \bar{Y} = \bar{F}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.51)$$

$$\bar{Y}^{(\nu)}(0) = \bar{A}_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.52)$$

где дифференциальные выражения $\Lambda(Y)$ и $\bar{\Lambda}(\bar{Y})$ определяются по формулам

$$\Lambda(Y) \equiv Y^{(n)} + P_{n-2}(x) Y^{(n-2)} + \dots + P_0(x) Y, \quad (1.53)$$

$$\bar{\Lambda}(\bar{Y}) \equiv \bar{Y}^{(n)} + \bar{P}_{n-2}(x) \bar{Y}^{(n-2)} + \dots + \bar{P}_0(x) \bar{Y}. \quad (1.54)$$

Теорема 2. Пусть в начальных условиях (1.50), (1.52) при некотором m ($0 < m \leq n-1$)

$$A_\nu = \bar{A}_\nu = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots, m-1) \text{ и } \det A_m \neq 0.$$

Если в уравнениях (1.49), (1.51)

$$P_k^{(k+r)}(z), \bar{P}_k^{(k+r)}(z) \in H_1(D_l) \quad (k=0, 1, \dots, n-2),$$

$$F^{(m+r)}(x), \bar{F}^{(m+r)}(x) \in L_1(0, l),$$

то существует единственная матрица-функция $K(x, t)$ ($0 \leq t \leq x \leq l$), имеющая по обоим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-2+r$ и такая, что имеет место формула

$$\bar{Y}(x, \lambda) = \bar{A}_m A_m^{-1} Y(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) Y(t, \lambda) dt, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.55)$$

При этом $K(x, t) = K_0(x-t, t)$, где матрица-функция $K_0(\xi, z)$ определена в пирамиде V и все частные производные которой порядка $n-1+r$ при фиксированном ξ принадлежат классу $H_1(D_{l-\xi})$.

Доказательство. Согласно замечанию 2 имеем

$$Y(x, \lambda) = A_m \Phi_m(x, \lambda) + \int_0^x L(x, t) \Phi_m(t, \lambda) dt, \quad (1.56)$$

$$\bar{Y}(x, \lambda) = \bar{A}_m \Phi_m(x, \lambda) + \int_0^x \bar{L}(x, t) \Phi_m(t, \lambda) dt. \quad (1.57)$$

Формулу (1.56) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно $\Phi_m(x, \lambda)$, решение которого, в силу $\det A_m \neq 0$, имеет вид

$$\Phi_m(x, \lambda) = A_m^{-1} Y(x, \lambda) - \int_0^x M(x, t) Y(t, \lambda) dt, \quad (1.58)$$

при этом матрица-функция $M(x, t)$ удовлетворяет каждому из следующих интегральных уравнений

$$M(x, t) = A_m^{-1} L(x, t) A_m^{-1} - \int_t^x A_m^{-1} L(x, u) M(u, t) du, \quad (1.59)$$

$$M(x, t) = A_m^{-1} L(x, t) A_m^{-1} - \int_t^x M(x, u) L(u, t) A_m^{-1} du. \quad (1.60)$$

Если выражение $\Phi_m(x, \lambda)$ из (1.58) подставить в (1.57) и обозначить

$$K(x, t) = \bar{L}(x, t) A_m^{-1} - \bar{A}_m M(x, t) - \int_t^x \bar{L}(x, u) M(u, t) du, \quad (1.61)$$

то получим формулу (1.55). Из (1.59), (1.60) и (1.61) следует, что $K(x, t)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$K(x, t) = \bar{L}(x, t) A_m^{-1} - \bar{A}_m A_m^{-1} L(x, t) A_m^{-1} - \int_t^x K(x, t) L(u, t) A_m^{-1} du. \quad (1.62)$$

Поскольку к уравнению (1.62) применим метод последовательных приближений, то остальные утверждения теоремы следуют из (1.62) с учетом замечания 2. Теорема 2 доказана.

Замечание 4. В силу замечаний 2 и 3 из (1.62) следует, что матрица-функция

$$K(x, t) = B^{(m)}(x-t) - H_m(x-t, t) A_m - \bar{B}^{(m)}(x-t) - \\ - \bar{H}_m(x-t, t) A_m$$

имеет по обеим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-1+r$, где $B(x)$ и $H_m(\xi, z)$ определяются соответственно по формулам (1.12) и (1.47), а $\bar{B}(x)$ и $\bar{H}_m(\xi, z)$ строятся аналогично, исходя из уравнения (1.51), (1.52).

Замечание 5. При условиях теоремы 2 существует еще матрица-функция $K_1(x, t)$ такая, что

$$\bar{Y}(x, \lambda) = Y(x, \lambda) A_m^{-1} \bar{A}_m + \int_0^x Y(t, \lambda) K_1(x, t) dt, \quad 0 \leq x \leq l.$$

Замечание 6. Основываясь на идеях работ [2] и [11] можно построить дифференциальные уравнения с неаналитическими коэффициентами, решения которых связаны соотношением (1.55). Построение таких уравнений приводится ниже.

Приведем несколько свойств матрицы-функции $K(x, t)$. Обозначим

$$\Lambda^*(Y) \equiv (-1)^n Y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k [Y P_k(x)]^{(k)}. \quad (1.63)$$

Лемма. Если в условиях теоремы 2 $r \geq 1$, то $K(x, t)$ удовлетворяет следующим соотношениям

$$\bar{\Lambda}_x [K(x, t)] - \Lambda_t^* [K(x, t)] = 0,^* \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned} & \bar{P}_k(x) S - S P_k(x) + \sum_{\nu=k}^{n-1} \bar{P}_{\nu+1}(x) \sum_{j=k}^{\nu} C_j^k \left[\frac{\partial^{\nu-j}}{\partial x^{\nu-j}} K(x, t) \Big|_{t=x} \right]^{(j-k)} - \\ & - \sum_{\nu=k}^{n-1} (-1)^{\nu-k} \frac{\partial^{\nu-k}}{\partial t^{\nu-k}} [K(x, t) P_{\nu+1}(t)] \Big|_{t=x} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \end{aligned} \quad (1.65)$$

$$\begin{aligned} & SF(x) - \bar{F}(x) + \int_0^x K(x, t) F(t) dt + \\ & + \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=\nu}^{n-1} (-1)^{j-\nu} \frac{\partial^{j-\nu}}{\partial t^{j-\nu}} [K(x, t) P_{j+1}(t)] \Big|_{t=0} \right\} Y^{(\nu)}(0, \lambda) = 0, \end{aligned} \quad (1.66)$$

где $S = \bar{A}_m A_m^{-1}$, $P_n(x) = \bar{P}_n(x) = I$, $P_{n-1}(x) = \bar{P}_{n-1}(x) = 0$. Обратное**, пусть $Y(x, \lambda)$ — некоторое решение уравнения (1.49) с коэффициентами $P_k^{(k)}(x) \in L_1(0, l)$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$). Если матрица-функция $K(x, t)$, имеющая по обоим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-1$, удовлетворяет соотношениям (1.64), (1.65), (1.66) с некоторым S , то матрица-функция $\bar{Y}(x, \lambda)$, определяемая по формуле

$$\bar{Y}(x, \lambda) = SY(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) Y(t, \lambda) dt, \quad (1.67)$$

является решением уравнения (1.51).

* В символе Λ_x индекс означает, что Λ действует по переменной x .

** Обратное утверждение леммы установлено в работе [11].

Доказательство. Если выражение $\bar{Y}(x, \lambda)$ из (1.55) подставить в тождество

$$\bar{\Lambda}[\bar{Y}(x, \lambda)] - \lambda^n \bar{Y}(x, \lambda) - F(x) = 0 \quad (1.68)$$

и учесть, что $Y(x, \lambda)$ — решение уравнения (1.49), то получим

$$\begin{aligned} SF(x) - \bar{F}(x) + \int_0^x K(x, t) F(t) dt + \bar{\Lambda}[SY(x, \lambda)] - S\Lambda[Y(x, \lambda)] + \\ + \bar{\Lambda}\left[\int_0^x K(x, t) Y(t, \lambda) dt\right] - \int_0^x K(x, t) \Lambda[Y(t, \lambda)] dt = 0. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Обозначим через $G(x, t)$, $M_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$) и $N(x)$ правые части формул (1.64), (1.65) и (1.66) соответственно. Если учесть, что при $r \geq 1$ $K(x, t)$ имеет по обеим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-1$, то тождество (1.69) легко приводится к виду

$$N(x) + \int_0^x G(x, t) Y(t, \lambda) dt + \sum_{k=0}^{n-2} M_k(x) Y^{(k)}(x, \lambda) = 0. \quad (1.70)$$

Однако, согласно теореме 1

$$Y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) A_0 + \int_0^x \varphi(t, \lambda) \Gamma(x, t) dt. \quad (1.71)$$

С учетом замечания 1 из (1.71) следует, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} n \lambda^{m-k} e^{-\lambda x} Y^{(k)}(x, \lambda) = A_m, \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \quad (1.72)$$

причем сходимость равномерна по x ($0 \leq x \leq l$). В силу (1.72) из (1.70) с учетом $\det A_m \neq 0$ получаются равенства $M_k(x) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$),

$$N(x) + \int_0^x G(x, t) Y(t, \lambda) dt = 0. \quad (1.73)$$

Таким образом, соотношения (1.65) доказаны. Далее, выражение $Y(x, \lambda)$ из (1.71) подставим в (1.73)

$$N(x) + \int_0^x \varphi(t, \lambda) \left[G(x, t) A_0 + \int_0^x G(x, u) \Gamma(u, t) du \right] dt = 0. \quad (1.74)$$

Если в (1.74) взять $\lambda = 0$, то получим

$$N(x) = - \int_0^x \left[G(x, t) A_0 + \int_i^x G(x, u) \Gamma(u, t) du \right] dt, \quad (1.75)$$

в силу чего (1.74) принимает вид

$$\int_0^x [\varphi(t, \lambda) - 1] \left[G(x, t) A_0 + \int_i^x G(x, u) \Gamma(u, t) du \right] dt = 0. \quad (1.76)$$

Разлагая $\varphi(t, \lambda)$ в ряд по степеням λ (см. (1.43)), из (1.76) получим

$$\int_0^x t^j \left[G(x, t) A_0 + \int_i^x G(x, u) \Gamma(u, t) du \right] dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$G(x, t) A_0 + \int_i^x G(x, u) \Gamma(u, t) du = 0. \quad (1.77)$$

Если формулу (1.77) продифференцировать m раз по t и учесть замечание 1, то получим

$$(-1)^m G(x, t) A_m + \int_i^x G(x, u) \frac{\partial^m}{\partial t^m} \Gamma(u, t) du = 0. \quad (1.78)$$

Однако, в силу условия $\det A_m \neq 0$ уравнение (1.78) имеет только тривиальное решение $G(x, t) = 0$. Но тогда из (1.75) следует, что $N(x) = 0$. Итак соотношения (1.64) и (1.66) доказаны. Обратное утверждение леммы получается из следующих соображений. По предположению имеет место равенство (1.70), которое эквивалентно равенству (1.69). Но, согласно определению $\bar{Y}(x, \lambda)$ (формула (1.67)), равенство (1.69) принимает вид (1.68). Лемма доказана.

Замечание 7. Формулы (1.65) и (1.66) остаются верными и при $r = 0$, а формула (1.64) в этом случае, вообще говоря, теряет свой обычный смысл. Однако, нетрудно убедиться, что при $r = 0$ лемма остается верной (при этом в обратном утверждении леммы достаточно потребовать абсолютную непрерывность частных производных порядка $n-2$ матрицы-функции $K(x, t)$), если (1.64) заменить формулой

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^n}{\partial x^n} [K(x, t) - M(x, t)] - (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} [K(x, t) - M(x, t)] + \\ & + \sum_{k=0}^{n-2} \bar{P}_k(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k} K(x, t) - \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial t^k} [K(x, t) P_k(t)] = 0, \end{aligned}$$

где матрица-функция $M(x, t)$ такая, что $K(x, t) - M(x, t)$ имеет по обоим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-1$, а матрица-функция

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1-j} \partial t^j} M(x, t)$$

зависит только от разности $x - t$. Отметим, что на основании замечаний 3 и 4 для $K(x, t)$ такая матрица-функция $M(x, t)$ всегда существует.

Следствие. Пусть уравнения (1.49), (1.50) и (1.51), (1.52) удовлетворяют условиям теоремы 2, а матрица-функция $K(x, t)$ соответствует решениям $Y(x, \lambda)$ и $\tilde{Y}(x, \lambda)$ по формуле (1.55). Если $Y_1(x, \lambda)$ — решение уравнения

$$\Lambda(Y_1) - \lambda^n Y_1 = F_1(x), \quad Y_1^{(\nu)}(0) = A'_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.79)$$

то матрица-функция $\bar{Y}_1(x, \lambda)$, определяемая по формуле

$$\bar{Y}_1(x, \lambda) = \bar{A}_m A_m^{-1} Y_1(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) Y_1(t, \lambda) dt,$$

является решением уравнения

$$\bar{\Lambda}(\bar{Y}_1) - \lambda^n \bar{Y}_1 = \bar{F}_1(x), \quad (1.80)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{F}_1(x) = & \bar{A}_m A_m^{-1} F(x) + \int_0^x K(x, t) F_1(t) dt + \\ & + \sum_{\nu=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=\nu}^{n-1} (-1)^{j-\nu} \frac{\partial^{j-\nu}}{\partial t^{j-\nu}} [K(x, t) P_{j+1}(t)] \Big|_{t=0} \right\} A'_\nu. \end{aligned}$$

Это непосредственно следует из леммы, причем в случае $r = 0$ нужно учесть замечание 7. Отметим, что если в уравнениях (1.49), (1.51) и (1.79) $F(x) = \bar{F}_1(x) = F_1(x) = 0$, то из этого еще не следует, что в уравнении (1.80) $\bar{F}_1(x) = 0$ (по этому поводу см. [11], [12]).

3. Перейдем теперь к построению дифференциальных уравнений, о которых было сказано в замечании 6. Пусть дифференциальные выражения Λ и Λ^* определены по формулам (1.53) и (1.63) соответственно, при этом предполагается, что коэффициенты выражения Λ подчинены только условиям $P_R^{(k)}(x) \in L_1(0, l)$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$). Рассмотрим следующие две краевые задачи (краевые условия берутся в точке $x = 0$):

$$\Lambda(Y_1) - \lambda^n Y_1 = 0, \quad (1.81)$$

$$U_\nu(Y_1) = 0, \nu = 0, 1, \dots, s; s \leq n-2, \quad (1.82)$$

$$\Lambda^*(Y_2) - \lambda^n Y_2 = 0, \quad (1.83)$$

$$U_\nu^*(Y_2) = 0, \nu = 0, 1, \dots, n-2-s, \quad (1.84)$$

при этом краевые условия (1.82) и (1.84) выбираются так*, чтобы для любых функций $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$, удовлетворяющих соответственно условиям (1.82) и (1.84), имело место соотношение

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=\nu}^{n-1} (-1)^{j-\nu} \frac{\partial^{j-\nu}}{\partial t^{j-\nu}} [Y_2(t) P_{j+1}(t)] \Big|_{t=0} \right\} Y_1^{(\nu)}(0) = 0.$$

Пусть матрица-функция $F(x, t)$, имеющая по обоим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-1$, удовлетворяет следующим условиям **:

$$а) \quad \Lambda_x [F(x, t)] = \Lambda_t^* [F(x, t)]; \quad (1.85)$$

б) $F(x, t)$ относительно t удовлетворяет условиям (1.84)

$$U_{\nu,t}^*(F) = 0, \nu = 0, 1, \dots, n-2-s; \quad (1.86)$$

в) Интегральное уравнение

$$H(x, t) = \int_0^x H(x, u) F(u, t) du$$

при каждом x ($0 \leq x \leq l$) имеет только тривиальное решение $H(x, t) = 0$.

Матрицу-функцию $K(x, t)$ определим как решение интегрального уравнения

$$K(x, t) = F(x, t) + \int_0^x K(x, u) F(u, t) du. \quad (1.87)$$

В силу условия в) решение $K(x, t)$ существует и имеет по обоим переменным абсолютно непрерывные частные производные порядка $n-1$ (см. [2]). С учетом (1.86) из (1.87) следует, что

$$U_{\nu,t}^*(K) = 0, \nu = 0, 1, \dots, n-2-s. \quad (1.88)$$

Пусть $Y(x, \lambda)$ — некоторое решение краевой задачи (1.81), (1.82). Согласно выбору краевых условий (1.82) и (1.84) из (1.88) вытекает, что

* Можно взять, например, $U_\nu(Y_1) \equiv Y_1^{(\nu)}(0) = 0$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-2$) $U_0^*(Y_2) \equiv Y_2(0) = 0$.

** Можно взять, например, $F(x, t) = Y_1(x, \lambda_0) Y_2(t, \lambda_0)$, где $Y_1(x, \lambda)$ и $Y_2(x, t)$ — некоторые решения краевых задач (1.81), (1.82) и (1.83), (1.84) соответственно.

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \left\{ \sum_{j=\nu}^{n-1} (-1)^{j-\nu} \frac{\partial^{j-\nu}}{\partial t^{j-\nu}} [K(x, t) P_{j+1}(t)]|_{t=0} \right\} Y^{(0)}(0, \lambda) = 0. \quad (1.89)$$

Теперь из соотношений (1.65), взяв $S = I$, определим матрицы-функции $\tilde{P}_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n-2$) и по формуле (1.54) составим дифференциальное выражение $\tilde{\Lambda}$. Покажем, что функция $\tilde{Y}(x, \lambda)$, определяемая по формуле

$$\tilde{Y}(x, \lambda) = Y(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) Y(t, \lambda) dt, \quad (1.90)$$

является решением уравнения

$$\tilde{\Lambda}(\tilde{Y}) - \lambda^n \tilde{Y} = 0. \quad (1.91)$$

Для этого достаточно показать, что матрицы-функции $Y(x, \lambda)$ и $K(x, t)$ удовлетворяют условиям леммы. Отметим, что согласно формуле (1.89) и определению матриц-функций $\tilde{P}_k(x)$ ($k=0, 1, \dots, n-2$) соотношения (1.65) и (1.66) выполнены. Остается показать справедливость соотношения (1.64). С учетом формул (1.85), (1.89) и (1.65) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_x [K(x, t)] - \Lambda_t^* [K(x, t)] &= \tilde{\Lambda}_x [F(x, t)] - \Lambda_t^* [F(x, t)] + \\ &+ \tilde{\Lambda}_x \left[\int_0^x K(x, u) F(u, t) du \right] - \int_0^x K(x, u) \Lambda_t^* [F(u, t)] du = \\ &= \tilde{\Lambda}_x [F(x, t)] - \Lambda_x [F(x, t)] + \tilde{\Lambda}_x \left[\int_0^x K(x, u) F(u, t) du \right] - \\ &- \int_0^x K(x, u) \Lambda_u [F(u, t)] du = \int_0^x \{ \tilde{\Lambda}_x [K(x, u)] - \Lambda_u [K(x, u)] \} F(u, t) du. \end{aligned}$$

Таким образом, получили уравнение

$$\tilde{\Lambda}_x [K(x, t)] - \Lambda_t^* [K(x, t)] = \int_0^x \{ \tilde{\Lambda}_x [K(x, u)] - \Lambda_u [K(x, u)] \} F(u, t) du. \quad (1.92)$$

Однако согласно условию в), уравнение (1.92) имеет только тривиальное решение. Значит условие (1.64) леммы тоже выполнено. Таким образом построены уравнения (1.81) и (1.91) с неаналитическими коэффициентами, решения которых связаны соотношением (1.90).

2°. Приведем аналоги формул (1.10) и (1.55) для дифференциальных уравнений в пространстве вектор-функций. Рассмотрим следующие уравнения относительно вектор-функций $\hat{y}(x)$ и $\hat{y}_1(x)$:

$$\hat{y}^{(n)} + P_{n-2}(x) \hat{y}^{(n-2)} + \dots + P_0(x) \hat{y} - \lambda^n \hat{y} = \hat{f}(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.1)$$

$$\hat{y}^{(\nu)}(0) = \hat{a}_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.2)$$

$$\hat{y}_1^{(n)} + \tilde{P}_{n-2}(x) \hat{y}_1^{(n-2)} + \dots + P_0(x) \hat{y}_1 - \lambda^n \hat{y}_1 = \hat{f}_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2.3)$$

$$\hat{y}_1^{(\nu)}(0) = \hat{a}'_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.4)$$

Вместе с этими уравнениями рассмотрим следующие операторные уравнения:

$$Y^{(n)} + P_{n-2}(x) Y^{(n-2)} + \dots + P_0(x) Y - \lambda^n Y = F(x), \quad (2.5)$$

$$Y^{(\nu)}(0) = A_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.6)$$

$$\tilde{Y}^{(n)} + \tilde{P}_{n-2}(x) \tilde{Y}^{(n-2)} + \dots + \tilde{P}_0(x) \tilde{Y} - \lambda^n \tilde{Y} = \tilde{F}(x), \quad (2.7)$$

$$\tilde{Y}^{(\nu)}(0) = \tilde{A}_\nu, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.8)$$

в которых матрицы $F(x)$, $\tilde{F}(x)$ и A_ν , $\tilde{A}_\nu$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$) являются диагональными и удовлетворяют соотношениям $F(x) \hat{1} = \hat{f}(x)$, $\tilde{F}(x) \hat{1} = \hat{f}_1(x)$, $A_\nu \hat{1} = \hat{a}_\nu$, $\tilde{A}_\nu \hat{1} = \hat{a}'_\nu$ ($\nu = 0, 1, \dots, n-1$), где $\hat{1}$ — единичный вектор. Обозначим через $\hat{\varphi}(x, \lambda)$ решение уравнения

$$\hat{\varphi}^{(n)} - \lambda^n \hat{\varphi} = 0, \quad \hat{\varphi}(0) = \hat{1}, \quad \hat{\varphi}^{(\nu)}(0) = 0, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Заметим, что

$$\hat{\varphi}(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) \hat{1}, \quad (2.9)$$

где $\varphi(x, \lambda)$ определяется по формуле (1.4).

Теорема 3. Пусть $\hat{y}(x, \lambda)$ — решение уравнения (2.1), (2.2). Если уравнение (2.5) удовлетворяет условиям теоремы 1, то существует единственная диагональная матрица-функция $E(x, t)$ ($0 \leq t \leq x \leq l$) такая, что имеет место формула

$$\hat{y}(x, \lambda) = A_0 \hat{\varphi}(x, \lambda) + \int_0^x E(x, t) \hat{\varphi}(t, \lambda) dt, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (2.10)$$

При этом $E(x, t)$ обладает всеми свойствами, высказанными в теореме 1 относительно $K(x, t)$.

Доказательство. Пусть $Y(x, \lambda)$ — решение уравнения (2.5).
(2.6). Тогда, согласно теореме 1, справедлива формула

$$Y(x, \lambda) = A_0 \Phi(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) \Phi(t, \lambda) dt. \quad (2.11)$$

Если обе части формулы (2.11) применить к вектору $\hat{1}$ и учесть соотношения $\hat{y}(x, \lambda) = Y(x, \lambda) \hat{1}$, $\hat{\varphi}(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda) \hat{1}$, то получим

$$\hat{y}(x, \lambda) = A_0 \hat{\varphi}(x, \lambda) + \int_0^x K(x, t) \hat{\varphi}(t, \lambda) dt. \quad (2.12)$$

Определим диагональную матрицу $E(x, t)$ по формуле

$$E(x, t) \hat{1} = K(x, t) \hat{1}. \quad (2.13)$$

В силу (2.9) из (2.13) следует, что $E(x, t) \hat{\varphi}(t, \lambda) = K(x, t) \hat{\varphi}(t, \lambda)$. Поэтому формула (2.12) принимает вид (2.10). Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Пусть $\hat{y}(x, \lambda)$ и $\hat{y}_1(x, \lambda)$ — решения уравнений (2.1), (2.2) и (2.3), (2.4) соответственно. Если уравнения (2.5), (2.6) и (2.7), (2.8) удовлетворяют условиям теоремы 2, то существует единственная диагональная матрица-функция $E(x, t)$ ($0 \leq t \leq x \leq l$) такая, что имеет место формула

$$\hat{y}_1(x, \lambda) = \bar{A}_m A_m^{-1} \hat{y}(x, \lambda) + \int_0^x E(x, t) \hat{y}(t, \lambda) dt, \quad 0 \leq x \leq l.$$

При этом $E(x, t)$ обладает всеми свойствами, высказанными в теореме 2 относительно $K(x, t)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 26.V.1977

Ի. Փ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Բարձր կարգի դիֆերենցիալ եավասարումների համար ձևափոխության օպերատորների մասին (ամփոփում)

Հոդվածում դիտարկվում է հետևյալ օպերատորային հավասարումը $Y(x)$ մասրից-ֆունկցիայի նկատմամբ.

$$Y^{(n)} + P_{n-2}(x) Y^{(n-2)} + \dots + P_0(x) Y - \lambda^n Y = F(x), \quad 0 \leq x \leq l;$$

Իրարից $Y(x, \lambda)$ -ն ալի հավասարման լուծումն է. որը բավարարում է $Y^{(v)}(0, \lambda) = A_v$,
($v=0, 1, \dots, n-1$) սկզբնական պայմաններին: Նշանակենք

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} e^{\omega_s x}, \quad \omega_s = e^{i \frac{2\pi}{n} s}, \quad s = 0, 1, \dots, n-1;$$

Հողվածում ապացուցվում է, որ եթե $P_k^{(k)}(z)$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$) մատրից-ֆունկցիաներն անալիտիկ են $0, l, l(1-\omega_1)^{-1}, l(1-\omega_{n-1})^{-1}$ գագաթներն ունեցող բառանկյուն տիրույթում և պատկանում են H_1 դասին, իսկ $F(x) \in L_1(0, l)$, ապա գոյություն ունի $K(x, t)$ ($0 < t < x < l$) մատրից-ֆունկցիա այնպիսին, որ տեղի ունի հետևյալ բանաձևը

$$Y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) A_0 + \int_0^x \varphi(t, \lambda) K(x, t) dt, \quad 0 \leq x \leq l:$$

I. G. KHACHATRIAN. *On the transformation operators for high order differential equations (summary)*

The following operator equation with respect to matrix-function $Y(x)$ is considered:

$$Y^{(n)} + P_{n-2}(x) Y^{(n-2)} + \dots + P_0(x) Y - \lambda^n Y = F(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Let $Y(x, \lambda)$ be the solution of this equation, satisfying initial conditions

$$Y^{(v)}(0, \lambda) = A_v, \quad (v = 0, 1, \dots, n-1).$$

Put

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} e^{\omega_s \lambda x}, \quad \omega_s = e^{i \frac{2\pi s}{n}}, \quad s = 0, 1, \dots, n-1.$$

It is proved, that if the matrix-functions $P_k^{(k)}(z)$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$) belong to the class H_1 of analytic functions in the quadrangle with the vertices $0, l, l(1-\omega_1)^{-1}, l(1-\omega_{n-1})^{-1}$, and $F(x) \in L_1(0, l)$, then there exists a matrix-function $K(x, t)$ ($0 < t < x < l$), such that the formula

$$Y(x, \lambda) = \varphi(x, \lambda) A_0 + \int_0^x \varphi(t, \lambda) K(x, t) dt, \quad 0 \leq x \leq l$$

is valid.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Я. Познер. О дифференциальных уравнениях типа Штурма-Лиувилля на полуоси, Матем. сб. 23 (65), 1948, 3—52.
2. И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР, серия матем., 15, № 1, 1951, 309—360.
3. Б. Я. Левин. Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР, 106, № 2, 1956, 187—190.
4. В. А. Марченко. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля, Киев, 1972.
5. М. К. Фаие. Решение одной задачи Коши путем увеличения числа независимых переменных, Труды 3 Всесоюз. матем. съезда, 1, 1956, 71—72.
6. М. К. Фаие. Операторно-аналитические функции одной независимой переменной, Труды ММО, 7, 1958, 227—268.

7. М. К. Фазе. Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной, Труды ММО, 8, 1959, 3—48.
8. Л. А. Сахнович. Обратная задача для дифференциальных операторов порядка $n > 2$ с аналитическими коэффициентами, Матем. сб., 46 (88), № 1, 1958, 61—76.
9. В. И. Мацаев. О существовании оператора преобразования для дифференциальных уравнений высших порядков, ДАН СССР, 130, № 3, 1960, 499—502.
10. Л. А. Сахнович. Необходимые условия наличия оператора преобразования для уравнения четвертого порядка, УМН, 16, вып. 5, 1961, 199—204.
11. Л. А. Сахнович. Метод оператора преобразования для уравнений высших порядков, Матем. сб., 55 (97), № 3, 1961, 347—360.
12. Л. А. Сахнович. Об обратной задаче для уравнений четвертого порядка, Матем. сб., 56 (98), № 2, 1962, 137—146.
13. А. Ф. Леонтьев. Оценка роста решения одного дифференциального уравнения при больших по модулю значениях параметра и ее применения к некоторым вопросам теории функций, Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 456—487.
14. Ю. Н. Валицкий. Об операторе преобразования для интегро-дифференциальных операторов типа Вольтерра, Сб. „Матем. физика“, Киев, 1965, 23—36.
15. А. П. Хромов. Об одном представлении ядер резольвент вольтерровских операторов и его применениях, Матем. сб., 89 (131), № 2 (10), 1972, 207—226.
16. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, М., 1950.
17. С. А. Виноградов, В. П. Хавин. Свободная интерполяция в H^∞ и некоторых других классах функций, Записки науч. сем. ЛОМИ, 47, 1974, 15—44.