Р. А. АЛЕКСАНДРЯН, Р. З. МКРТЧЯН

КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА С БЕСКОНЕЧНОКРАТНЫМ СПЕКТРОМ

Пусть A — самосопряженный оператор с областью определения D_A , действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H , E_λ — отвечающее ему спектральное семейство проекционных операторов, а R_λ — его резольвента.

В работе [1], изучая вопрос о полноте системы собственных элементов оператора A в предположении однократности его спектра, мы доказали необходимое и достаточное условие полноты, формулируемое исключительно в терминах резольвенты R_λ и заданной совокупности $\Lambda = \{\lambda_k\}$ его собственных значений.

В настоящей работе мы доказываем необходимое и достаточное условие полноты системы собственных элементов $\Phi = \{\varphi_k \in D_A; A\varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \lambda_k \in \Lambda\}$, без каких-либо предположений относительно кратности спектра рассматриваемого оператора A .

Отметим, что указываемое нами условие аналогично классическому равенству Парсеваля для полных ортонормированных систем. Кроме того это условие (как и условие содержащееся в [1]) формулируется лишь в терминах R_λ и совокупности Λ , поэтому при проверке его выполнимости для конкретного оператора A нет необходимости находить саму систему Φ , полнота которой исследуется.

Приводимое здесь условие в случае операторов с однократным спектром содержалось в числе результатов, доложенных нами в январе 1976 года на Всесоюзной конференции по дифференциальным уравнениям, посвященной 75-летию И. Г. Петровского.

1°. В этом пункте мы устанавливаем справедливость неравенства, которое можно рассматривать как аналог известного неравенства Бесселя для ортонормированных систем.

Ниже нам понадобится следующее вспомогательное предложение.

Лемма 1. Пусть в точке λ_0 неубывающая функция $\rho(t)$ имеет скачок $\Delta_0 = \rho(\lambda_0 + 0) - \rho(\lambda_0 - 0) > 0$, тогда для каждой функции $F(t) \in L_p(\mathbb{R}^1)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{F(t) d\rho(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} = F(\lambda_0) \cdot \Delta_0. \quad (1)$$

◀ Рассмотрим функцию $\tilde{\rho}(t) = \rho(t) - \Delta_0 \cdot \theta_{\lambda_0}(t)$ (здесь θ_{λ_0} — мера Хевисайда, сосредоточенная в точке $t = \lambda_0$, которая очевидно является неубывающей и непрерывной в точке λ_0 , поэтому в силу леммы 5 из [1] будем иметь

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_{\mathbb{R}^1} \frac{F(t) d\tilde{\rho}(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} = 0,$$

следовательно

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_{\mathbb{R}^1} \frac{F(t) d\rho(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} = \Delta_0 \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \int_{\mathbb{R}^1} \frac{F(t) d\theta_{\lambda_0}(t)}{(t - \lambda_0)^2 + \tau^2} = F(\lambda_0) \cdot \Delta_0.$$

Теорема 1. (аналог неравенства Бесселя). Пусть A — произвольный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H , а $\Lambda = \{\lambda_n\}$ — некоторая совокупность его собственных значений, тогда для любого элемента f из H имеет место неравенство

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 \leq \|f\|^2. \quad (2)$$

◀ Представим пространство H в виде нижеследующей ортогональной суммы инвариантных относительно A подпространств

$$H = \sum_{m=1}^{\infty} \oplus H_m$$

причем так, чтобы все сужения $A|_{H_m}$ имели простой спектр, и пусть $V_m: H_m \rightarrow L^2_{\rho_m}(\mathbb{R}^1)$ — изометрическое отображение, существующее по основной спектральной теореме, тогда легко понять, что для любого $f \in H$ будем иметь

$$\|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \sum_{(m)} \|R_{\lambda_k + i\tau} f_m\|^2 = \sum_{(m)} \int_{\mathbb{R}} \frac{|F_m(t)|^2 d\rho_m(t)}{(t - \lambda_k)^2 + \tau^2}, \quad (3)$$

где положено

$$f = \sum_{(m)} f_m, \quad f_m \in H_m, \quad F_m(t) = V_m f_m.$$

Поэтому ясно, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \sum_{(m)} \tau^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{|F_m(t)|^2 d\rho_m(t)}{(t - \lambda_k)^2 + \tau^2}, \quad (4)$$

но поскольку нижеследующий не зависящий от τ числовой ряд

$$\sum_{(m)} \int_{\mathbb{R}} |F_m(t)|^2 d\rho_m(t) = \sum_{(m)} \|f_m\|^2 \leq \|f\|^2 \quad (5)$$

очевидно является мажорантным для ряда (4), то переходя к пределу под знаком суммы и пользуясь доказанной выше леммой 1, без труда получим

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \sum_{(m)} |F_m(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho_m, \quad (6)$$

где обозначено $\Delta_k \rho_m = \rho_m(\lambda_k + 0) - \rho_m(\lambda_k - 0)$.

Наконец, пользуясь доказанным соотношением (6) и меняя порядок суммирования (все слагаемые неотрицательны), будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 &= \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \sum_{(m)} |F_m(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho_m = \\ &= \sum_{(m)} \left(\sum_{\lambda_k \in \Lambda} |F_m(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho_m \right) \leq \sum_{(m)} \int_{\mathbb{R}} |F_m(t)|^2 d\rho_m(t) = \sum_{(m)} \|f_m\|^2 \leq \|f\|^2, \end{aligned}$$

чем и завершается доказательство теоремы. ►

2°. В этом пункте мы доказываем необходимое и достаточное условие полноты системы Φ при дополнительном предположении однократности спектра оператора A .

Теорема 2. (критерий точечности спектра). Пусть спектр самосопряженного в H оператора A однократный, тогда система $\Phi = \{\varphi_k\}$ его собственных элементов, отвечающих собственным значениям λ_k , принадлежащим некоторому их набору $\Lambda = \{\lambda_k\}$, полна в H тогда и только тогда, когда для любого элемента $f \in H$

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \|f\|^2. \quad (7)$$

◀ **Необходимость.** Пусть система Φ полна в H , т. е. замыкание линейной оболочки, натянутой на элементы из Φ , совпадает с H .

Рассмотрим выражение $\|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2$, которое, в силу однократности спектра оператора A , может быть представлено в виде

$$\|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{|F(t)|^2 d\rho(t)}{(t - \lambda_k)^2 + \tau^2}, \quad (3')$$

где $F(t) = Vf$, а $V: H \rightarrow L^2_{\rho}$ — изометрический оператор, существующий по основной спектральной теореме.

Поскольку по предположению $\Delta_k \rho = \rho(\lambda_k + 0) - \rho(\lambda_k - 0)$, то принимая во внимание (3') и лемму 1, будем иметь

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = |F(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho. \quad (8)$$

С другой стороны, по предположению, система Φ полна во всем H , следовательно вся спектральная мера ρ сосредоточена на множестве Λ , т. е. $\rho(\Lambda) = \rho(\mathbb{R})$, поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} |F(t)|^2 d\rho(t) = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |F(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho. \quad (9)$$

Сопоставляя теперь (8) с (9) и суммируя по всем $\lambda_k \in \Lambda$, будем иметь

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |F(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho = \int_{\mathbb{R}} |F(t)|^2 d\rho(t) = \|f\|^2$$

для любого $f \in H$, т. е. необходимость доказана.

Достаточность. Пусть теперь для каждого $f \in H$ имеет место равенство (7), тогда прежде всего ясно, что Λ содержит все без исключения собственные значения оператора A . В самом деле, допустим, вопреки утверждению, что нашлось собственное значение λ_0 оператора A , не принадлежащее Λ , тогда для собственного элемента φ_0 , отвечающего этому λ_0 , имели бы $A\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0$ и $\|\varphi_0\| > 0$, следовательно

$$V(A\varphi_0) = \lambda_0 V\varphi_0$$

или, положив $F_0(t) = V\varphi_0$, имели бы $(t - \lambda_0)F_0(t) = 0$ почти всюду по мере ρ . С другой стороны, в каждой из точек $\lambda_k \neq \lambda_0$ сосредоточена положительная ρ -мера, поэтому из последнего соотношения непосредственно заключаем, что $F_0(\lambda_k) = 0$ при всех $\lambda_k \in \Lambda$. Теперь уже, записав левую часть соотношения (7) для элемента $\varphi_0 \in H$ и воспользовавшись леммой 1, получим:

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} \varphi_0\|^2 = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |F_0(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho = 0,$$

которое очевидно противоречит соотношению (7), ибо $\|\varphi_0\|^2 > 0$.

Полученное противоречие доказывает, что Λ — совокупность чисел всех без исключения собственных значений оператора A .

Предположим теперь, вопреки утверждению, что непрерывная составляющая $\rho_c(t)$ спектральной меры $\rho(t)$ отлична от нуля, причем $\rho_c(\mathbb{R}) = \delta > 0$.

Поскольку $\rho_c(t)$ — непрерывная функция на $\mathbb{R}$, то положительными числами ε_k очевидно можно выбрать так, чтобы для интервалов $\sigma_k = (\lambda_k - \varepsilon_k, \lambda_k + \varepsilon_k)$ имели место неравенства

$$\rho_c(\sigma_k) < \delta/2^{k+1},$$

откуда легко следует, что ρ_c -мера множества $\Sigma = \mathbb{R}^1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ больше

$\delta/2$. Построим теперь функцию $F^*(t)$ на $\mathbb{R}^1$, положив ее равной нулю на теоретико-множественном объединении интервалов σ_k , т. е. на множестве $\bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_k$ — и равной единице на множестве Σ .

Вычислим теперь правую часть соотношения (7) для элемента $f^* = V^{-1}F^*(t)$, тогда, принимая во внимание построение функции $F^*(t)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|f^*\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |F^*(t)|^2 d\rho(t) = \sum_{\lambda_k \in \Lambda} |F^*(\lambda_k)|^2 \Delta_k \rho + \int_{\mathbb{R}} |F^*(t)|^2 d\rho_c(t) \geq \\ &\geq \int_{\Sigma} d\rho_c(t) = \rho_c(\Sigma) \geq \delta/2. \end{aligned}$$

С другой стороны, принимая во внимание (8), непосредственно заключаем, что левая часть соотношения (7) равна нулю. Таким образом, предположение наличия непрерывной составляющей спектральной меры тоже приводит к нарушению соотношения (7) для некоторого элемента $f^* \in H$.

Итак, вся спектральная мера ρ сосредоточена на множестве Λ , т. е. система Φ действительно полна в H .

3°. В этом пункте мы допускаем, чтобы спектр оператора A имел произвольную кратность и опираясь на полученные выше результаты устанавливаем необходимое и достаточное условие полноты системы Φ в этом общем случае.

Теорема 3. (основная теорема о полноте). Система Φ собственных элементов произвольного самосопряженного оператора A , отвечающих собственным значениям λ_k , принадлежащим некоторому их набору $\Lambda = \{\lambda_k\}$, полна в H тогда и только тогда, когда для каждого $f \in H$

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \|f\|^2. \quad (7)$$

◀ **Необходимость.** Пусть система Φ полна в H , и пусть Φ_m — та ее часть, которая содержится в инвариантном относительно A подпространстве H_m , тогда ясно, что Φ_m будет полной в H_m . Тогда поскольку спектр сужения $A^{(m)} = A|_{H_m}$ однократный, то применяя теорему 2 к оператору $A^{(m)}$, будем иметь

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda_m} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau}^{(m)} f_m\|^2 = \|f_m\|^2, \quad \forall f \in H_m, \quad (7')$$

где $R_{\lambda_k + i\tau}^{(m)}$ — резольвента оператора $A^{(m)}$, а Λ_m — та часть набора Λ , которая состоит из собственных значений оператора $A^{(m)}$.

Пусть теперь f — произвольный элемент из H и $f = \sum_{(m)} f_m$, где $f_m \in H_m$, тогда поскольку числовой ряд (5) является мажорантным для ряда $\sum_{(m)} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f_m\|^2$, то будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 &= \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \sum_{(m)} \|R_{\lambda_k + i\tau}^{(m)} f_m\|^2 = \\ &= \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \sum_{(m)} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau}^{(m)} f_m\|^2 = \sum_{(m)} \sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau}^{(m)} f_m\|^2. \end{aligned}$$

Далее, поскольку, по самому определению множества Λ_m , каждое из $\lambda_k \in \Lambda \setminus \Lambda_m$ очевидно не может быть точкой разрыва спектральной меры ρ_m оператора $A^{(m)}$, то по лемме 5 из [1] легко заключаем, что

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \sum_{(m)} \sum_{\lambda_k \in \Lambda_m} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau}^{(m)} f_m\|^2$$

или, принимая во внимание (7'), получаем

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau} f\|^2 = \sum_{(m)} \|f_m\|^2 = \|f\|^2,$$

чем и завершается доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть соотношение (7) выполнено для всех $f \in H$ и в частности для всех $f_m \in H_m$, тогда, поскольку очевидно

$$\|R_{\lambda_k + i\tau} f_m\|^2 = \|R_{\lambda_k + i\tau}^{(m)} f_m\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{|F_m(t)|^2 d\rho_m(t)}{(t - \lambda_k)^2 + \tau^2},$$

то записав соотношение (7) для $f = f_m$ в силу леммы 5 из [1], легко заключаем, что все слагаемые левой части, соответствующие собственным значениям $\lambda_k \notin \Lambda_m$, обратятся в нуль, и поэтому это соотношение примет вид

$$\sum_{\lambda_k \in \Lambda_m} \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 \|R_{\lambda_k + i\tau}^{(m)} f_m\|^2 = \|f_m\|^2, \quad \forall f_m \in H_m.$$

Теперь уже, в силу теоремы 2, заключаем, что часть Φ , содержащая все собственные элементы, отвечающие тем λ_k , которые принадлежат Λ_m , полны в H_m , откуда с очевидностью следует полнота всей системы Φ во всем H .

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 6.1.1978

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐԻԱՆ, Ռ. Յ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ. Անվերջ բազմապատկությունը սպեկտրի ինֆինիտիմալությամբ օպերատորի սեփական էլեմենտների լրիվության հայտանիշ (ամփոփում)

Ապացուցվում է ինֆինիտիմալությամբ օպերատորի սեփական էլեմենտների լրիվության մի նոր անհրաժեշտ և բավարար պայման, որը հիշեցնում է Պարսևալի դասական հավասարությունը լրիվ օրթոնորմալ սիստեմների համար:

R. A. ALEXANDRIAN, R. S. MCRTCHIAN. A completeness criterium for a system of eigenelements of a selfadjointed operator with spectrum possessing infinite multiplicities (summary)

For operators of the type mentioned in the heading a sufficient and necessary condition for completeness of the system of eigenelements is proposed which reminds the classical Parseval equation for complete orthonormal systems.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. А. Александриян, Р. З. Мкртчян. Об одном критерии полноты системы собственных элементов произвольного самосопряженного оператора с однократным спектром. Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика“, X, № 6, 1975.