

М. М. ДЖРБАШЯН

ОБ ОДНОМ БЕСКОНЕЧНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ

Путем дальнейшего применения и развития метода, лежащего в основе цикла работ автора по теории факторизации функций, мероморфных в круге ([1], [2], [3]), в его статье [4] были установлены общие результаты о факторизации функций, мероморфных во всей конечной плоскости. Эти результаты (см. [4], теоремы 7 и 8) фактически явились существенным обобщением известной факторизационной теоремы Р. Неванлинны (см. [5] и [6]) на случай мероморфных во всей плоскости z функций с характеристикой произвольного роста.

Отметим однако, что как теорема Р. Неванлинны, так и основная теорема 7 работы [4] по своему характеру и завершенности были весьма далеки от тех результатов для единичного круга, которые имелись в его известной факторизационной теореме относительно мероморфных функций ограниченного вида и в наших теоремах из указанных выше работ.

В заключении указанной статьи [4] были отмечены некоторые открытые вопросы, простейший из которых состоял в следующем.

Пусть функция $\omega(x)$ положительна, не возрастает на полуоси $[0, +\infty)$ и удовлетворяет условиям

$$\omega(0)=1, \Delta(k)=k \int_0^{+\infty} \omega(x) x^{k-1} dx < +\infty \quad (1 \leq k < +\infty). \quad (1)$$

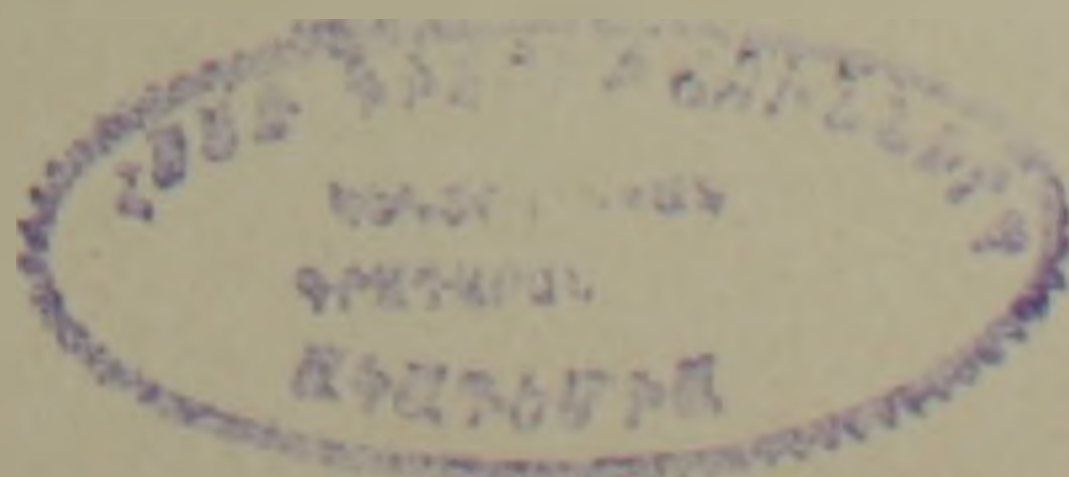
С функцией $\omega(x)$ ассоциируем элементарную целую функцию

$$A^{(\omega)}(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp[-W_{\omega}^{(\infty)}(z; \zeta)],$$

где

$$W_{\omega}^{(\infty)}(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(x) x^{k-1} dx - \right. \\ \left. - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(x) x^{-k-1} dx \right\} \frac{z^k}{\Delta(k)}, \quad (2)$$

с простым нулем в произвольной точке ζ ($0 < |\zeta| < +\infty$) комплексной плоскости z .



Пусть, наконец, $\{z_k\}_1^\infty$ ($0 < |z_k| \leq |z_{k+1}| < +\infty$) — произвольная последовательность комплексных чисел и

$$\pi_\omega(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_\omega^{(\infty)}(z; z_k) \quad (3)$$

— ассоциированное с нею бесконечное произведение, для сходимости которого, как легко видеть, необходимо выполнение условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx < +\infty. \quad (4)$$

Спрашивается, достаточно ли это же условие для сходимости бесконечного произведения $\pi_\omega(z; z_k)$ в каждой точке $z \neq z_k$ ($1 \leq k < +\infty$)?

В настоящей статье устанавливается, что при естественных ограничениях на регулярность убывания к нулю функции $\omega(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, а также на скорость этого убывания, поставленный вопрос имеет утвердительный ответ.

В § 1 статьи устанавливается ряд предварительных лемм (1.1—1.3) о прямом построении и других представлениях функций $W_\omega^{(\infty)}(z; \zeta)$ и $A_\omega^{(\infty)}(z; \zeta)$. Здесь вводится также в рассмотрение функция

$$U_\omega(z; \zeta) = \int_0^{+\infty} \log |A_\omega^{(\infty)}(re^{i\varphi}; \zeta)| d\{-\omega(r/\tau)\}, \quad (5)$$

разные представления которой (лемма 1.4) позволяют установить ее важные свойства в единичном круге $|ze^{i\varphi}| < 1$ (леммы 1.5—1.6). В заключении параграфа приводятся также формулы, позволяющие установить представления функции $A_\omega^{(\infty)}(z; \zeta)$ для значений $|z| < |\zeta|$ (леммы 1.7—1.8).

В § 2 с самого начала выделяется некоторый естественный подкласс $\tilde{\mathcal{Q}}_\omega$ функций $\omega(x)$, для которых конечны все интегралы вида (1), и убывание которых к нулю при $x \rightarrow +\infty$ имеет регулярный характер. Класс $\tilde{\mathcal{Q}}_\omega$ определяется как множество функций $\omega(x)$, представимых на $[1, +\infty)$ в виде

$$\omega(x) = \omega(1) \exp \left\{ - \int_1^x \frac{\alpha(t)}{t} dt \right\} \quad (1 \leq x < +\infty), \quad (6)$$

где $\alpha(t) \geq 1$ — некоторая неубывающая на $[1, +\infty)$ функция, обладающая свойством $\alpha(t) \uparrow +\infty$ при $t \uparrow +\infty$. Очевидно, что для функций $\omega(x) \in \tilde{\mathcal{Q}}_\omega$ не только конечны интегралы (1), но вместе с тем они могут стремиться к нулю как угодно быстро, или с соблюдением условий (1) произвольно медленно, в зависимости от скорости роста к $+\infty$ соответствующей функции

$$\alpha(x) = - \frac{d \log \omega(x)}{d \log x}. \quad (7)$$

В предположении, что $\omega(x) \in \bar{\Omega}_\infty$ здесь сперва устанавливаются важные асимптотические формулы для некоторых несобственных интегралов, зависящих от параметра ζ , при $|\zeta| \rightarrow +\infty$ (леммы 2.1—2.3 и различные их следствия). Однако, как эти формулы, так и приводимая затем теорема 1 об асимптотическом поведении $\log A_\omega^{(\infty)}(z; \zeta)$ при $|\zeta| \rightarrow +\infty$, нам удастся получить пока что не для всего класса функций $\bar{\Omega}_\infty$, а только для его достаточно широких подклассов, по существу включающих в себя лишь такие функции $\omega(x)$, рост которых при $x \rightarrow +\infty$ не ниже степенного.

Наконец, в заключительной теореме 2 статьи мы устанавливаем сходимость бесконечного произведения $\pi_\omega(z; z_k)$ для любой последовательности, удовлетворяющей условию (4), и в предположении, что

функция $\omega(x) \in \bar{\Omega}_\infty$ подчинена указанным выше ограничениям роста.

Таким образом, вопрос о том, сохраняет ли силу теорема 2 при снятии этого ограничения, т. е. сходится ли бесконечное произведение $\pi_\omega(z; z_k)$ лишь при выполнении условий (4) и $\omega(x) \in \bar{\Omega}_\infty$, остается открытым.

Разумеется, остается также открытым главный вопрос — нахождение наиболее естественной внутренней характеристики того класса мероморфных на всей z -плоскости функций, в частности содержащего и произведения $\pi_\omega(z; z_k)$, $1/\pi_\omega(z; z_k)$, который допускал бы полное параметрическое представление посредством выделения их нулей и полюсов с помощью функций вида π_ω .

§ 1. Предварительные леммы

1.1 (а). Обозначим через Ω_∞ множество функций $\omega(x)$, определенных на полуоси $[0, +\infty)$ и подчиненных следующим условиям:

- 1) $\omega(x)$ положительна и не возрастает на всей полуоси $[0, +\infty)$,
- 2)

$$\omega(0) = 1, \quad a_\omega = \int_0^1 \{1 - \omega(x)\} \frac{dx}{x} < +\infty, \quad (1.1)$$

- 3) для любого $s \in (0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} \omega(x) x^{s-1} dx < +\infty. \quad (1.2)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Delta(s) = s \int_0^{+\infty} \omega(x) x^{s-1} dx, \quad s \in (0, +\infty) \quad (1.3)$$

и отметим некоторые ее свойства:

1°. Если положить

$$\Delta(0) = 1, \quad (1.4)$$

то функция $\Delta(s)$ непрерывна на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Очевидно, достаточно убедиться, что $\lim_{s \rightarrow +0} \Delta(s) = 1$.

Действительно, представив функцию $\Delta(s)$ в виде

$$\begin{aligned} \Delta(s) &= s \int_0^1 \omega(x) x^{s-1} dx + s \int_1^{+\infty} \omega(x) x^{s-1} dx \equiv \\ &\equiv \Delta_1(s) + \Delta_2(s), \quad 0 < s < +\infty, \end{aligned}$$

получим, что при $0 < s \leq 1$

$$|\Delta_1(s) - 1| \leq s \int_0^1 (1 - \omega(x)) \frac{dx}{x} = a_\omega s$$

и

$$0 \leq \Delta_2(s) \leq s \int_1^{+\infty} \omega(x) dx < \Delta(1) s.$$

Отсюда и следует наше утверждение.

2°. Для любого $s \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{\omega(x) x^s\} = 0. \quad (1.5)$$

Действительно, полагая, что при некотором $s_0 \geq 0$

$$\liminf_{x \rightarrow +\infty} \{\omega(x) x^{s_0}\} > c_0 > 0,$$

очевидно, будем иметь

$$\omega(x) x^{s_0} \geq c_0, \quad x \geq x_0 \geq 1.$$

Тогда для любого $x > x_0$ получим оценку

$$\begin{aligned} \Delta(1 + s_0) &\geq \int_0^{+\infty} \omega(x) x^{s_0} dx \geq \\ &\geq \int_{x_0}^x \omega(x) x^{s_0} dx \geq c_0 (x - x_0), \end{aligned}$$

откуда при $x \rightarrow \infty$ приходим к противоречию.

3°. Функцию $\Delta(s)$ можно представить также в виде

$$\Delta(s) = \int_0^{+\infty} x^s d[-\omega(x)], \quad s \in [0, +\infty). \quad (1.6)$$

Действительно, если $s = 0$, то

$$\int_0^{+\infty} x^s d[-\omega(x)] = \int_0^{+\infty} d[-\omega(x)] = \omega(0) - \omega(+\infty) = 1 = \Delta(0),$$

так как $\omega(0) = 1$ и согласно (1.5) $\omega(+\infty) = 0$.

Если же $s > 0$, то

$$\Delta(s) = \int_0^{+\infty} \omega(x) dx^s = - \int_0^{+\infty} x^s d\omega(x),$$

так как проинтегрированный член равен нулю вновь в силу (1.5).

(6) В предположении, что $\omega(x) \in \Omega_+$, для фиксированного значения параметра $\tau (0 < \tau < +\infty)$ обозначим через $L^1_\tau(0, +\infty; \omega) \equiv L^1_\tau(0, +\infty)$ множество функций $\varphi(x)$ абсолютно непрерывных на $[0, +\infty)$ и удовлетворяющих условию

$$\varphi'(x) \omega(x/\tau) \in L^1(0; +\infty). \quad (1.7)$$

Ввиду свойства 1) функции $\omega(x)$ очевидно, что для любой пары значений $0 < \tau_1 < \tau_2 < +\infty$ имеет место включение

$$L^1_{\tau_1}(0, +\infty) \subset L^1_{\tau_2}(0, +\infty). \quad (1.8)$$

Полагая теперь, что при данном $\tau_0 (0 < \tau_0 < +\infty)$ $\varphi(x) \in L^1_{\tau_0}(0, +\infty)$, введем в рассмотрение оператор

$$\begin{aligned} L^{(\omega)}_\tau \{\varphi(x)\} &\equiv \varphi_\omega(\tau) = \\ &= \varphi(0) + \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \omega(x/\tau) dx, \quad \tau \in (0, \tau_0], \end{aligned} \quad (1.9)$$

заметив, что в силу (1.8) функция $\varphi_\omega(\tau)$ определена для всех значений $0 < \tau \leq \tau_0$.

Легко проверить, что для функции $\varphi(x) = x^s (0 \leq s < +\infty)$ справедлива формула

$$L^{(\omega)}_\tau \{x^s\} = \Delta(s) \tau^s \quad (0 \leq s < +\infty, 0 < \tau < +\infty). \quad (1.10)$$

Отметим, далее, что если для данного τ_0

$$\varphi(x) \in L^1_{\tau_0}(0, +\infty) \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \omega(x/\tau_0) = 0, \quad (1.11)$$

то, как легко видеть путем интегрирования по частям, оператор $L^{(\omega)}_\tau \{\varphi(x)\}$ допускает также представление вида

$$L^{(\omega)}_\tau \{\varphi(x)\} \equiv \varphi_\omega(\tau) \equiv \int_0^{+\infty} \varphi(x) d[-\omega(x/\tau)] =$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi(\tau t) d[-\omega(t)], \quad \tau \in (0, \tau_0]. \quad (1.12)$$

(в) Введем теперь в рассмотрение функцию

$$v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta) \equiv L_\tau^{(\omega)} \left\{ \log \left| 1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} \right| \right\} = \\ = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \log \left| 1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} \right| \right\} \omega(r/\tau) dr \quad (0 < |\zeta| < +\infty, 0 < \tau < +\infty). \quad (1.13)$$

Таким образом, будем иметь

$$v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta) = -\operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{e^{i\varphi}}{\zeta}}{1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta}} \omega(r/\tau) dr \quad (1.13^*)$$

в предположении, что $\varphi \neq \arg \zeta$.

Отсюда, заменой переменного интегрирования заключаем:

4°. При любом ζ ($0 < |\zeta| < +\infty$), τ ($0 < \tau < +\infty$) и $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\varphi \neq \arg \zeta$, функция $v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta)$ допускает представление

$$v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta) = -\operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\tau e^{i\varphi} x}{\zeta}}{1 - \frac{\tau e^{i\varphi} x}{\zeta}} \frac{\omega(x)}{x} dx = \\ = \int_0^{+\infty} \frac{x - \frac{|\zeta|}{\tau} \cos(\varphi - \arg \zeta)}{x^2 - 2x \frac{|\zeta|}{\tau} \cos(\varphi - \arg \zeta) + \frac{|\zeta|^2}{\tau^2}} \omega(x) dx. \quad (1.14)$$

Установим теперь следующее важное свойство функции $v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta)$.

5°. Для любых ζ ($0 < |\zeta| < +\infty$) и τ ($0 < \tau < +\infty$)

$$v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta) \in L(0, 2\pi). \quad (1.15)$$

Введем в рассмотрение функции

$$v_\omega^{(1)}(\tau e^{i\vartheta}; \zeta) = \int_0^{+\infty} \frac{x - \frac{|\zeta|}{\tau}}{x^2 - 2x \frac{|\zeta|}{\tau} \cos(\vartheta - \arg \zeta) + \frac{|\zeta|^2}{\tau^2}} \omega(x) dx, \quad (1.16)$$

$$v_\omega^{(2)}(\tau e^{i\vartheta}; \zeta) = 2 \frac{|\zeta|}{\tau} \sin^2(\vartheta - \arg \zeta) \int_0^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x^2 - 2x \frac{|\zeta|}{\tau} \cos(\vartheta - \arg \zeta) + \frac{|\zeta|^2}{\tau^2}} dx, \quad (1.17)$$

заметив, что

$$v_{\omega}(\tau e^{i\vartheta}; \zeta) = v_{\omega}^{(1)} + v_{\omega}^{(2)}. \quad (1.18)$$

Но по формуле Пуассона

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{x^2 - 2x \frac{|\zeta|}{\tau} \cos(\vartheta - \arg \zeta) + \frac{|\zeta|^2}{\tau^2}} = \left| x^2 - \frac{|\zeta|^2}{\tau^2} \right|^{-1} \left(x \neq \frac{|\zeta|}{\tau} \right).$$

Поэтому, из (1.16) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |v_{\omega}^{(1)}(\tau e^{i\vartheta}; \zeta)| d\vartheta \leq \int_0^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x + \frac{|\zeta|}{\tau}} dx < +\infty \quad (1.19)$$

для всех ζ ($0 < |\zeta| < +\infty$) и τ ($0 < \tau < +\infty$).

Далее, из тождества

$$\begin{aligned} x^2 - 2x \frac{|\zeta|}{\tau} \cos(\vartheta - \arg \zeta) + \frac{|\zeta|^2}{\tau^2} &= \\ &= \left(x - \frac{|\zeta|}{\tau} \right)^2 + 4x \frac{|\zeta|}{\tau} \sin^2 \frac{\vartheta - \arg \zeta}{2} \end{aligned}$$

легко заключаем, что справедлива оценка

$$\begin{aligned} 0 &\leq 2 \frac{|\zeta|}{\tau} \sin^2 \frac{\vartheta - \arg \zeta}{2} \left\{ x^2 - 2x \frac{|\zeta|}{\tau} \cos(\vartheta - \arg \zeta) + \frac{|\zeta|^2}{\tau^2} \right\}^{-1} \leq \\ &\leq \begin{cases} 8 \frac{\tau}{|\zeta|}, & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{|\zeta|}{2\tau} \\ \frac{1}{2x}, & \text{при } \frac{|\zeta|}{2\tau} \leq x < +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |v_{\omega}^{(2)}(\tau e^{i\vartheta}; \zeta)| d\vartheta &\leq \\ &\leq 8 \frac{\tau}{|\zeta|} \int_0^{\frac{|\zeta|}{2\tau}} \omega(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\frac{|\zeta|}{2\tau}}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx. \end{aligned} \quad (1.20)$$

В силу (1.18) из оценок (1.19) и (1.20) следует наше утверждение.

(г) Введем в рассмотрение функцию

$$C_{\omega}(z; \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta(k)}. \quad (1.21)$$

6°. Функция $C_{\infty}(z; \omega)$ целая, и на всей z -плоскости справедливы оценки вида

$$|C_{\infty}^{(\nu)}(z; \omega)| \leq A_{\infty}(\gamma) \{|z|^{\gamma} \omega(\gamma |z|)\}^{-1} \quad (0 \leq \nu < +\infty), \quad (1.22)$$

где $\gamma > 1$ — любое число и

$$A_{\infty}(\gamma) = \frac{\gamma^{\nu!}}{(\gamma-1)^{\nu+1}} \quad (0 \leq \nu < +\infty).$$

В самом деле, из представления (1.6) чисел $\Delta(k)$ следует, что для любого $\gamma > 1$ и $k \geq 1$

$$\Delta(k) \geq \int_{\gamma|z|}^{\infty} x^k d\{-\omega(x)\} \geq (\gamma|z|)^k \omega(\gamma|z|). \quad (1.23)$$

Следовательно, для любого z ($0 \leq |z| < +\infty$) и $\gamma > 1$

$$|C_{\infty}(z; \omega)| \leq 1 + \omega^{-1}(\gamma|z|) \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^{-k},$$

откуда следует наше неравенство (1.22) при $\nu=0$, так как $\omega(\gamma|z|) \leq \omega(0) = 1$.

Заметим теперь, что

$$C_{\infty}^{(\nu)}(z; \omega) = \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{k(k-1)\cdots(k-\nu+1)}{\Delta(k)} z^{k-\nu} \quad (\nu \geq 1),$$

откуда в силу (1.23) получим

$$|C_{\infty}^{(\nu)}(z; \omega)| \leq \{(\gamma|z|)^{\nu} \omega(\gamma|z|)\}^{-1} \sum_{k=\nu}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-\nu+1)(1/\gamma)^{k-\nu}.$$

Отсюда следуют неравенства (1.22), если заметить, что

$$\sum_{k=\nu}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-\nu+1) x^k = \frac{\nu!}{(1-x)^{\nu+1}} \quad (\nu \geq 0).$$

1.2. (а) Наряду с функцией $C_{\infty}(z; \omega)$ введем также в рассмотрение целую функцию

$$S_{\infty}(z; \omega) = 2C_{\infty}(z; \omega) - 1 = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta(k)}. \quad (1.24)$$

Далее, поскольку из (1.15), в частности, вытекает, что $v_{\omega}(e^{i\theta}; \zeta) \in L(0, 2\pi)$ для любого ζ ($0 < |\zeta| < +\infty$), то интеграл

$$W_{\omega}^{(\infty)}(z; \zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{\infty}(e^{-i\theta} z; \omega) v_{\omega}(e^{i\theta}; \zeta) d\theta \quad (1.25)$$

также является целой функцией от переменной z .

Лемма 1.1. При любом z и $\zeta \neq 0$ справедливо разложение

$$W_{\omega}^{(-)}(z; \zeta) = \int_{|x|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(x) x^{k-1} dx - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{\infty} \omega(x) x^{-k-1} dx \right\} \frac{z^k}{\Delta(k)}. \quad (1.26)$$

Доказательство. Из определения (1.24) функции $S_{-}(z; \omega)$ следует, что целая функция $W_{\omega}^{(-)}(z; \zeta)$ допускает разложение

$$W_{\omega}^{(-)}(z; \zeta) = \frac{a_0(\zeta)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(\zeta)}{\Delta(k)} z^k, \quad |z| < +\infty, \quad (1.27)$$

где

$$a_k(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\vartheta} v_{\omega}(e^{i\vartheta}; \zeta) d\vartheta \quad (0 \leq k < +\infty). \quad (1.28)$$

Обозначим, далее,

$$\varphi_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\vartheta} \log \left| 1 - \frac{re^{i\vartheta}}{\zeta} \right| d\vartheta \quad (0 \leq k < +\infty) \quad (1.29)$$

и заметим, что имеет место разложение

$$\log |1 - \rho e^{i\vartheta}| = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) \rho^n}{n} \quad (0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi).$$

Тогда легко видеть, что

1) при $0 \leq r < |\zeta|$

$$\varphi_k(r) = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ -\frac{r^k}{k\zeta^k}, & 1 \leq k < +\infty, \end{cases}$$

2) при $|\zeta| < r < +\infty$

$$\varphi_k(r) = \begin{cases} 2 \log \frac{r}{|\zeta|}, & k = 0 \\ -\frac{\bar{\zeta}^k}{kr^k}, & 1 \leq k < +\infty. \end{cases}$$

Следовательно, пользуясь определением (1.9) оператора $L_{\tau}^{(\omega)}$, мы будем иметь для любого $0 < \tau < +\infty$

$$L_{\tau}^{(\omega)} \{ \varphi_k(r) \} = \varphi_k(0) + \int_0^{+\infty} \varphi_k'(r) \omega(r/\tau) dr \quad (0 \leq k < +\infty).$$

Поэтому, пользуясь приведенными выше значениями функций $\varphi_k(r)$, получим формулы

$$L_{\tau}^{(\omega)} \{ \varphi_0(r) \} = 2 \int_{\frac{|\zeta|}{\tau}}^{+\infty} \omega(r/\tau) \frac{dr}{r},$$

$$L_{\tau}^{(\infty)} [\varphi_k(r)] = - \left\{ \tau^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(r/\tau) r^{k-1} dr - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(r/\tau) r^{-k-1} dr \right\} \quad (1.30)$$

$$(1 \leq k < +\infty).$$

По определению (1.13) функции $v_{\omega}(\tau e^{i\theta}; \zeta)$, в силу (1.28), (1.29)

$$a_k(\zeta) = L_{\tau}^{(\infty)} [\varphi_k(r)]_{\tau=1} \quad (0 \leq k < +\infty).$$

Отсюда и из (1.30) получим формулы

$$a_0(\zeta) = 2 \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx,$$

$$a_k(\zeta) = - \left\{ \zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(x) x^{k-1} dx - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(x) x^{-k-1} dx \right\} \quad (1 \leq k < +\infty).$$

Подставляя эти значения в (1.27), приходим к разложению (1.26) леммы.

Лемма 1.2. 1°. Разложение (1.26) функции $W_{\omega}(z; \zeta)$ можно записать также в виде

$$W_{\omega}^{(\infty)}(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k(\zeta)}{k} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k, \quad (1.31)$$

где

$$\mu_k(\zeta) = \left\{ \int_0^{|\zeta|} x^k d[-\omega(x)] + |\zeta|^{2k} \int_{|\zeta|}^{+\infty} x^{-k} d[-\omega(x)] \right\} \Delta^{-1}(k) \quad (1.32)$$

$$(1 \leq k < +\infty).$$

2°. Справедлива формула

$$1 - \mu_k(\zeta) = k \Delta^{-1}(k) \int_{|\zeta|}^{+\infty} \left\{ x^k + |\zeta|^{2k} x^{-k} \right\} \frac{\omega(x)}{x} dx \quad (1.33)$$

$$(1 \leq k < +\infty).$$

Доказательство. 1°. Заметим сначала, что

$$\int_0^{|\zeta|} \omega(x) x^{k-1} dx = \frac{1}{k} \int_0^{|\zeta|} \omega(x) dx^k =$$

$$= \frac{|\zeta|^k}{k} \omega(|\zeta|) + \frac{1}{k} \int_0^{|\zeta|} x^k d[-\omega(x)] \quad (1 \leq k < +\infty),$$

и в силу (1.5)

$$\int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(x) x^{-k-1} dx = \frac{|\zeta|^{-k}}{k} \omega(|\zeta|) + \frac{1}{k} \int_{|\zeta|}^{+\infty} x^{-k} d[-\omega(x)] \quad (1 \leq k < +\infty).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(x) x^{k-1} dx - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(x) x^{-k-1} dx = \\ & = \left\{ \int_0^{|\zeta|} x^k d[-\omega(x)] + |\zeta|^{2k} \int_{|\zeta|}^{+\infty} x^{-k} d[-\omega(x)] \right\} \frac{\zeta^{-k}}{k} \quad (1 \leq k < +\infty). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (1.26), получим формулу (1.31) — (1.32) леммы.

2°. Из (1.32) и (1.6) следует

$$1 - \mu_k(\zeta) = \left\{ \int_{|\zeta|}^{+\infty} x^k d[-\omega(x)] - |\zeta|^{2k} \int_{|\zeta|}^{+\infty} x^{-k} d[-\omega(x)] \right\} \Delta^{-1}(k) \quad (1 \leq k < +\infty).$$

Однако, интегрированием по частям, в силу (1.5) получим

$$\begin{aligned} & \int_{|\zeta|}^{+\infty} x^k d[-\omega(x)] - |\zeta|^{2k} \int_{|\zeta|}^{+\infty} x^{-k} d[-\omega(x)] = \\ & = k \int_{|\zeta|}^{+\infty} \{x^k + |\zeta|^{2k} x^{-k}\} \frac{\omega(x)}{x} dx \quad (1 \leq k < +\infty), \end{aligned}$$

откуда и следует формула (1.33) леммы.

Из (1.32) и (1.33) непосредственно вытекает

Следствие. Для любого k ($1 \leq k < +\infty$)

$$0 < \mu_k(\zeta) < 1 \quad (0 < |\zeta| < +\infty) \quad (1.34)$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \mu_k(\zeta) = 1. \quad (1.35)$$

В самом деле, что касается неравенств (1.35), то они очевидны, а предельные соотношения (1.35) следуют из оценок

$$0 < 1 - \mu_k(\zeta) \leq 2k \Delta^{-1}(k) \int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(x) x^{k-1} dx \quad (1 \leq k < +\infty).$$

1.3. (а) Наряду с функцией $W_{\omega}^{(\infty)}(z; \zeta)$ введем в рассмотрение также целую функцию

$$A_{\omega}^{(-)}(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \{-W_{\omega}^{(-)}(z; \zeta)\} \quad (1.36)$$

с нулем в точке $z = \zeta$.

Лемма 1.3. Если $0 \leq |z| < |\zeta| < +\infty$, то функция $A_{\omega}^{(-)}(z; \zeta)$ допускает также представление вида

$$A_{\omega}^{(-)}(z; \zeta) = \exp \{-\Omega_{\omega}^{(-)}(z; \zeta)\}, \quad (1.37)$$

где

$$\Omega_{\omega}^{(-)}(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} \left\{ C_{\omega} \left(\frac{zx}{\zeta}; \omega \right) + C_{\omega} \left(\frac{z\bar{\zeta}}{x}; \omega \right) - 1 \right\} \frac{\omega(x)}{x} dx \quad (1.38)$$

и

$$C_{\omega}(z; \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta(k)}.$$

Доказательство. Заметим, что при $0 \leq |z| < |\zeta|$ имеет место тождество

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k(\zeta)}{k} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k = \log \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \mu_k(\zeta)}{k} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k.$$

Отсюда и из (1.31) и (1.33) вытекает формула

$$\begin{aligned} W_{\omega}^{(-)}(z; \zeta) &= \log \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) + \\ &+ \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta(k)} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k \int_{|\zeta|}^{\infty} \{x^k + |\zeta|^{2k} x^{-k}\} \frac{\omega(x)}{x} dx. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Или, принимая во внимание определение функции $C_{\omega}(z; \omega)$, приходим к представлению

$$\begin{aligned} W_{\omega}(z; \zeta) &= \log \left(1 - \frac{z}{\zeta} \right) + \\ &+ \int_{|\zeta|}^{+\infty} \left\{ C_{\omega} \left(\frac{zx}{\zeta}; \omega \right) + C_{\omega} \left(\frac{z\bar{\zeta}}{x}; \omega \right) - 1 \right\} \frac{\omega(x)}{x} dx \quad (0 \leq |z| < |\zeta|), \end{aligned}$$

поскольку легко убедиться, что интегралы справа абсолютно сходятся, и, таким образом, перестановка порядков суммирования и интегрирования в (1.39) допустима при условии $0 \leq |z| < |\zeta| < +\infty$.

Нам остается воспользоваться определением (1.36) функции $A_{\omega}^{(-)}(z; \zeta)$, чтобы получить утверждение (1.37)—(1.38) леммы.

(6) Введем в рассмотрение функцию

$$U_{\omega}(re^{i\varphi}; \zeta) = L_{\zeta}^{(\omega)} \{ \log |A_{\omega}^{(-)}(re^{i\varphi}; \zeta)| \} \quad (1.40)$$

и установим для нее два разных представления.

Лемма 1.4. 1°. Для любого τ ($0 \leq \tau < 1$), $\varphi \in [0, 2\pi]$ и ζ ($0 < |\zeta| < +\infty$) справедлива формула

$$U_{\omega}(\tau e^{i\varphi}; \zeta) = v_{\omega}(\tau e^{i\varphi}; \zeta) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \tau^2}{1 - 2\tau \cos(\varphi - \vartheta) + \tau^2} v_{\omega}(e^{i\vartheta}; \zeta) d\vartheta. \quad (1.40')$$

2°. В тех же предположениях, за исключением, быть может значения $\varphi = \arg \zeta$, справедлива формула

$$U_{\omega}(\tau e^{i\varphi}; \zeta) = -(1 - \tau^2) \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{1 - \tau \left(\frac{x}{|\zeta|} + \frac{|\zeta|}{x} \right) \cos(\varphi - \arg \zeta) + \tau^2}{\left| 1 - \frac{x \tau e^{i\varphi}}{\zeta} \right|^2 \left| 1 - \frac{\bar{\zeta} \tau e^{i\varphi}}{x} \right|^2} \frac{\omega(x)}{x} dx. \quad (1.41)$$

Доказательство. 1°. Из определений (1.24), (1.25) функций $S_{\omega}(z; \omega)$ и $W_{\omega}^{(\infty)}(z; \zeta)$ следует, что для $0 \leq \tau < 1$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$L_{\tau}^{(\omega)} |W_{\omega}^{(\infty)}(\tau e^{i\varphi}; \zeta)| = L_{\tau}^{(\omega)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{\omega}(e^{i\vartheta}; \zeta) d\vartheta + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k e^{ik\varphi}}{\Delta(k)} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\vartheta} v_{\omega}(e^{i\vartheta}; \zeta) d\vartheta \right\}.$$

Но согласно элементарным формулам (1.10)

$$L_{\tau}^{(\omega)} \{r^k\} = \Delta(k) \tau^k \quad (0 \leq k < +\infty),$$

причем $\Delta(0) = 1$.

Поэтому будем иметь для любого $0 \leq \tau < 1$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$L_{\tau}^{(\omega)} \{W_{\omega}^{(\infty)}(\tau e^{i\varphi}; \zeta)\} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [\tau e^{i(\varphi - \vartheta)}]^k \right\} v_{\omega}(e^{i\vartheta}; \zeta) d\vartheta = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \tau e^{i(\varphi - \vartheta)}}{1 - \tau e^{i(\varphi - \vartheta)}} v_{\omega}(e^{i\vartheta}; \zeta) d\vartheta, \quad (1.42)$$

причем легко убедиться в правомерности перестановки порядков суммирования и применения оператора $L_{\tau}^{(\omega)}$.

Так как согласно (1.36) и (1.40)

$$U_{\omega}(\tau e^{i\varphi}; \zeta) = L_{\tau}^{(\omega)} \left\{ \log \left| 1 - \frac{\tau e^{i\varphi}}{\zeta} \right| \right\} - L_{\tau}^{(\omega)} |\operatorname{Re} W_{\omega}^{(\infty)}(\tau e^{i\varphi}; \zeta)|, \quad (1.43)$$

то из (1.42) ввиду самого определения функции $v_{\omega}(\tau e^{i\varphi}; \zeta)$ мы получим представление (1.40') леммы.

2°. По определению (1.9) оператора $L_{\tau}^{(\omega)}$

$$L_{\tau}^{(\omega)} \{ W_{\omega}^{(\infty)}(re^{i\varphi}; \zeta) \} = W_{\omega}^{(\infty)}(0; \zeta) + \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial r} \{ W_{\omega}^{(\infty)}(re^{i\varphi}; \zeta) \} \omega(r/\tau) dr. \quad (1.44)$$

Но в силу формулы (1.26) леммы 1.1

$$W_{\omega}^{(\infty)}(0; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \{ W_{\omega}^{(\infty)}(re^{i\varphi}; \zeta) \} = \\ = - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(x) x^{k-1} dx - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(x) x^{-k-1} dx \right\} \frac{kr^{k-1} e^{ik\varphi}}{\Delta(k)}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Пользуясь затем элементарными формулами

$$\int_0^{+\infty} r^{k-1} \omega(r/\tau) dr = \tau^k \int_0^{+\infty} x^{k-1} \omega(x) dx = \frac{\tau^k \Delta(k)}{k} \quad (k \geq 1),$$

подстановкой значения (1.45) в (1.44), получим

$$\begin{aligned} L_{\tau}^{(\omega)} \{ W_{\omega}^{(\infty)}(re^{i\varphi}; \zeta) \} = \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx - \\ - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(x) x^{k-1} dx - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(x) x^{-k-1} dx \right\} (\tau e^{i\varphi})^k. \end{aligned} \quad (1.46)$$

При этом легко видеть, что при $0 \leq \tau < 1$ произведенная нами перестановка порядков суммирования и интегрирования допустима.

Но ряд (1.46) легко просуммировать и в результате получить представление

$$\begin{aligned} L_{\tau}^{(\omega)} \{ W_{\omega}^{(\infty)}(re^{i\varphi}; \zeta) \} = \int_{|\zeta|}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{\zeta} \tau e^{i\varphi}}{x} \right)^k \right\} \frac{\omega(x)}{x} dx - \\ - \int_0^{|\zeta|} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x \tau e^{i\varphi}}{\zeta} \right)^k \right\} \frac{\omega(x)}{x} dx = \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$= \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{\tau e^{i\varphi} \bar{\zeta}}{x}} \frac{\omega(x)}{x} dx - \int_0^{|\zeta|} \frac{\frac{x\tau e^{i\varphi}}{\zeta}}{1 - \frac{x\tau e^{i\varphi}}{\zeta}} \frac{\omega(x)}{x} dx,$$

вновь справедливое при $0 \leq \tau < 1$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Теперь, пользуясь первым из интегральных представлений (1.14) функции $v_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta)$ в предположении $\varphi \neq \arg \zeta$, из (1.43) и (1.44) получим

$$U_\omega(\tau e^{i\varphi}; \zeta) = -\operatorname{Re} \int_{|\zeta|}^{+\infty} \left\{ \frac{\frac{x\tau e^{i\varphi}}{\zeta}}{1 - \frac{x\tau e^{i\varphi}}{\zeta}} + \frac{1}{1 - \frac{\bar{\zeta}\tau e^{i\varphi}}{x}} \right\} \frac{\omega(x)}{x} dx,$$

откуда и следует представление (1.41) леммы.

(в) Обозначим через Ω_+^* подмножество функций $\omega(x)$ из класса Ω_+ , удовлетворяющих условию Липшица на каждом промежутке $[0, \Delta]$ ($0 < \Delta < +\infty$). Таким образом, если $\omega(x) \in \Omega_+^*$, то $\omega(x) \in \Omega_+$, и, кроме того, для любых $0 \leq x' < x'' \leq \Delta$

$$|\omega(x') - \omega(x'')| \leq K(\Delta) |x' - x''|,$$

где $K(\Delta)$ ($0 < K(\Delta) < +\infty$) — некоторая постоянная.

Лемма 1.5. Если $\omega(x) \in \Omega_+^*$, то справедливы следующие утверждения:

1°. Функция $U_\omega(z; \zeta)$ непрерывна и субгармонична в замкнутом круге $|z| \leq 1$.

2°. На границе $z = e^{i\varphi}$ круга

$$U_\omega(e^{i\varphi}; \zeta) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (1.48)$$

и, следовательно,

$$U_\omega(z; \zeta) < 0, \quad |z| < 1. \quad (1.49)$$

Доказательство. 1°. Рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{\omega(x)}{x-w} dx,$$

являющийся аналитической функцией всюду вне полуоси $[0, +\infty)$.

Поскольку $\omega(x) \in \Omega_+^*$, то так же как и в лемме 1.7 нашей работы [3] легко убедиться, что функция

$$\psi(w) = \operatorname{Re} \{2\pi i \Phi(w)\}$$

непрерывна всюду, кроме точки $w = 0$, если при $w = u \in [0, +\infty)$ интеграл $\Phi(w)$ понимать в смысле главного значения.

Но согласно первой из формул (1.14)

$$v_{\omega}(\tau e^{i\varphi}; \zeta) = \psi\left(\frac{\zeta}{\tau e^{i\varphi}}\right),$$

и поэтому функция $v_{\omega}(z; \zeta)$ заведомо непрерывна при $|z| < +\infty$ для любого значения ζ ($0 < |\zeta| < +\infty$).

Функцию $v_{\omega}(\tau e^{i\varphi}; \zeta)$ первоначально мы определили согласно формуле (1.13)

$$v_{\omega}(\tau e^{i\varphi}; \zeta) = L_{\tau}^{(\omega)} \left\{ \log \left| 1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} \right| \right\},$$

в предположении, что $\varphi \neq \arg \zeta$.

Но легко видеть, что в данном случае наша функция допускает также представление

$$\begin{aligned} v_{\omega}(\tau e^{i\varphi}; \zeta) &= \int_0^{+\infty} \log \left| 1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta} \right| d\{-\omega(r/\tau)\} = \\ &= \int_0^{+\infty} \log \left| 1 - r \frac{\tau e^{i\varphi}}{\zeta} \right| d\{-\omega(r)\} \end{aligned}$$

во всей плоскости $z = \tau e^{i\varphi}$, кроме, быть может, луча $\varphi = \arg \zeta$.

Не останавливаясь на подробностях отметим, что это представление сохраняет силу также и на луче $\varphi = \arg \zeta$ (см. [3], доказательство леммы 1.8).

Но для любого значения параметра $r \in [0, +\infty)$ функция $\log \left| 1 - r \frac{z}{\zeta} \right|$ субгармонична на всей z -плоскости, а $d\{-\omega(r)\} \geq 0$. Поэтому функция $v_{\omega}(z; \zeta)$ субгармонична и непрерывна на всей плоскости z .

Наконец, что касается утверждения леммы относительно непрерывности и субгармоничности функции $U_{\omega}(z; \zeta)$ в замкнутом круге $|z| \leq 1$, то оно непосредственно следует из тождества (1.40') леммы 4.

2°. Из того же тождества (1.40') легко следует равенство (1.48) и в силу субгармоничности функции $U_{\omega}(z; \zeta)$ — и неравенство (1.49) нашей леммы.

В связи с леммой 1.5 отметим следующее: если не предполагать положительности функции $\omega(x)$ на всей оси, а положить

$$\omega(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x < +\infty, \end{cases}$$

то, как легко видеть, функция $A_{\omega}^{(\omega)}(z; \zeta)$ переходит в фактор Бляшке

$b(z; \zeta) = \frac{\zeta - z}{1 - \bar{\zeta} z} \frac{|\zeta|}{\zeta}$, оператор $L_{\zeta}^{(\omega)}$ — в единичный оператор, и поэтому

функция $U_{\omega}(z; \zeta)$ — в $\log |b(z; \zeta)|$. Таким образом, утверждения, со-

державшиеся в лемме 1.5, суть далеко идущие аналоги известных свойств фактора Бляшке. Другой важный специальный случай фактора $A_{\omega}^{(-)}(z; \zeta)$ и функции $U_{\omega}(z; \zeta)$ мы получим, положив лишь $\omega(x) \equiv 0$ ($1 < x < +\infty$). Для этого случая соответствующие утверждения леммы 1.5 были установлены нами в работе [3].

Наконец, отметим еще один важный специальный случай. Предположив, что

$$\int_0^{+\infty} \omega(x) x^{s-1} dx \begin{cases} < +\infty, & 0 \leq s \leq p \\ = +\infty, & s \geq p+1, \end{cases}$$

будем иметь

$$A_{\omega}^{(-)}(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \left\{ - \int_{|z|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx + \sum_{k=1}^p \frac{\mu_k(\zeta)}{k} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \right\}.$$

Поскольку и в данном случае $\mu_k(\zeta) \rightarrow 1$ ($0 \leq k \leq p$) при $\zeta \rightarrow \infty$, то факторы $A_{\omega}^{(-)}(z; \zeta)$ асимптотически ведут себя как элементарные факторы Вейерштрасса

$$E(z/\zeta; p) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \left\{ \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \right\}.$$

В заключение этого параграфа приведем еще несколько лемм.

(г) Лемма 1.6. Если $\omega(x) \in \Omega_+$, то для любого ζ ($0 < |\zeta| < +\infty$) и τ ($0 \leq \tau \leq 1$)

$$- \int_{|z|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{\omega}(\tau e^{i\varphi}; \zeta) d\varphi \leq 0. \quad (1.50)$$

Доказательство. Так как по лемме 5 функция $U_{\omega}(z; \zeta)$ субгармонична и непрерывна в замкнутом круге $|z| \leq 1$, то согласно известной теореме (см., напр., [7], стр. 9), интеграл

$$m(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{\omega}(\tau e^{i\varphi}; \zeta) d\varphi, \quad 0 \leq \tau < 1$$

является неубывающей функцией от τ .

Но в силу формулы (1.41) леммы 4

$$m(0) = U_{\omega}(0; \zeta) = - \int_{|z|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx,$$

откуда и из свойства $\omega(z; \zeta) \leq 0$ ($|z| < 1$) следуют неравенства (1.50) леммы.

Замечание. В случае, когда $\omega(x)$ принадлежит более широкому классу $\Omega_\infty \supset \Omega'_\infty$, справедливо неравенство вида

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |U_\infty(\tau e^{i\theta}; \zeta)| d\theta \leq C(r_0) \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx \quad (0 \leq \tau < 1)$$

для $0 < r_0 \leq |\zeta| < +\infty$. Оно устанавливается уже посредством ряда тонких оценок, на основе интегрального представления (1.41) функции $U_\infty(z; \zeta)$ из леммы 4. Отметим, что в случае финитной функции $\omega(x) \equiv 0$, $x \geq 1$ и $0 < |\zeta| < 1$ соответствующий результат был установлен в лемме 2.2 работы автора [3].

(д) Введем важную для дальнейшего функцию

$$\Omega(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad x \in [0, +\infty) \quad (1.51)$$

и убедимся, что она обладает свойством, аналогичным свойству (1.5) функции $\omega(x)$.

В самом деле, для любого $s \in [0, +\infty)$ по (1.5) имеем

$$\omega(x) x^{s+1} \leq 1, \quad x \geq x_s > 0.$$

Отсюда следует, что при $x \geq x_s$

$$\Omega(x) \leq \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{s+2}} \leq x^{-s-1}$$

и, т. о., $\Omega(x) x^s \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$U(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} C_\infty\left(\frac{\bar{\zeta}z}{x}; \omega\right) \frac{\omega(x)}{x} dx, \quad |z| < +\infty, \quad (1.52)$$

и в предположении, что $0 \leq |z| < |\zeta| < +\infty$, также функцию

$$V(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} C_\infty\left(\frac{zx}{\zeta}; \omega\right) \frac{\omega(x)}{x} dx. \quad (1.53)$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 1.7. Для любого ζ ($0 < |\zeta| < \infty$) справедливы тождества

$$U(z; \zeta) = C_\infty\left(\frac{|\zeta|z}{\zeta}; \omega\right) \Omega(|\zeta|) - \bar{\zeta}z \int_{|\zeta|}^{+\infty} C'_\infty\left(\frac{\bar{\zeta}z}{x}; \omega\right) \frac{\Omega(x)}{x^2} dx, \quad |z| < +\infty, \quad (1.54)$$

$$V(z; \zeta) = C_{-}\left(\frac{|\zeta|}{\zeta} z; \omega\right) \Omega(|\zeta|) + \\ + \frac{z}{\zeta} \int_{|\zeta|}^{+\infty} C_{-}\left(\frac{zx}{\zeta}; \omega\right) \Omega(x) dx, \quad 0 \leq |z| < |\zeta|. \quad (1.55)$$

Доказательство. Поскольку

$$U(z; \zeta) = - \int_{|\zeta|}^{+\infty} C_{-}\left(\frac{\bar{\zeta} z}{x}; \omega\right) d\Omega(x),$$

то интегрированием по частям получим тождество (1.54), ввиду того, что $\Omega(x) \rightarrow 0$, при $x \rightarrow +\infty$.

Хотя это и было отмечено выше, убедимся, что интеграл $U(z; \zeta)$ абсолютно сходится при $0 \leq |z| = r < |\zeta| = R < +\infty$.

В самом деле, в этих условиях мы имеем

$$|U(z; \zeta)| \leq \int_R^{+\infty} C_{-}\left(\frac{r}{R} x; \omega\right) \frac{\omega(x)}{x} dx,$$

и пока что формально можно написать

$$|U(z; \zeta)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k \Delta^{-1}(k) \int_R^{+\infty} \omega(x) x^{k-1} dx.$$

Так как, очевидно

$$\Delta^{-1}(k) \int_R^{+\infty} \omega(x) x^{k-1} dx \leq 1/k \quad (k \geq 1), \quad (1.56)$$

то

$$|U(z; \zeta)| \leq \int_R^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{r}{R}\right)^k = \Omega(R) + \log(1 - r/R)^{-1},$$

и произведенная нами перестановка порядков интегрирования и суммирования в наших условиях законна, а интеграл $U(z; \zeta)$ на самом деле абсолютно сходящийся.

Покажем, далее, что в тех же условиях $0 \leq |z| = r < |\zeta| = R < +\infty$ интеграл

$$V^*(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} C_{-}\left(\frac{z}{\zeta} x; \omega\right) \Omega(x) dx$$

также абсолютно сходится.

Действительно, пока что формально мы имеем

$$|V^*(z; \zeta)| \leq \int_R^{+\infty} C_- \left(\frac{r}{R} x; \omega \right) \Omega(x) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^{k-1} k \Delta^{-1}(k) \int_R^{+\infty} \Omega(x) x^{k-1} dx.$$

Но, как легко видеть,

$$k \int_R^{+\infty} \Omega(x) x^{k-1} dx = -R^k \Omega(R) + \int_R^{+\infty} \omega(x) x^{k-1} dx, \quad (0 \leq k < +\infty).$$

(1.57)

Поэтому, в силу (1.56)

$$|V^*(z; \zeta)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^{k-1} = (1 - r/R)^{-1},$$

и произведенная здесь операция перестановки порядков интегрирования и суммирования также законна, а интеграл $V^*(z; \zeta)$ — абсолютно сходящийся.

Теперь уже нетрудно установить наше тождество (1.55).

Для этого составим разность

$$V(z; \zeta) - \frac{z}{\zeta} V^*(z; \zeta) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k \Delta^{-1}(k) \int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(x) x^{k-1} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k k \Delta^{-1}(k) \int_{|\zeta|}^{+\infty} \Omega(x) x^{k-1} dx =$$

$$= \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta} \right)^k \left\{ \int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(x) x^{k-1} dx - k \int_{|\zeta|}^{+\infty} \Omega(x) x^{k-1} dx \right\} \Delta^{-1}(k).$$

Далее, пользуясь формулами (1.57), для $R = |\zeta|$ находим

$$V(z; \zeta) - \frac{z}{\zeta} V^*(z; \zeta) =$$

$$= \Omega(|\zeta|) + \Omega(|\zeta|) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z|\zeta|}{\zeta} \right)^k \Delta^{-1}(k),$$

т. е. тождество (1.55) леммы, причем, в силу природы сходимости наших интегралов, все произведенные операции законны при условии $0 \leq |z| < |\zeta| < +\infty$.

Наконец, вспомнив определение (1.24) функции $S_-(z; \zeta)$, в силу тождеств (1.54) и (1.55), лемме 1.3 можно дать и такую формулировку.

Лемма 1.8. Пусть $0 < |z| < |\zeta| < +\infty$, причем $\zeta = |\zeta| e^{i\varphi}$. Тогда функция $A_{\pm}^{(-)}(z; \zeta)$ допускает представление вида

$$A_{\omega}^{(-)}(z; \zeta) = \exp \{ - \Omega_{\omega}^{(-)}(z; \zeta) \},$$

где

$$\Omega_{\omega}^{(-)}(z; \zeta) = \Omega(|\zeta|) S_{-}(z e^{-i\varphi}; \omega) + V_1(z; \zeta) + U_1(z; \zeta), \quad (1.58)$$

$$V_1(z; \zeta) = \frac{z}{\zeta} \int_{|\zeta|}^{+\infty} C_{-}\left(\frac{zx}{\zeta}; \omega\right) \Omega(x) dx, \quad (1.59)$$

$$U_1(z; \zeta) = -\bar{\zeta} z \int_{|\zeta|}^{+\infty} C_{-}\left(\frac{\bar{\zeta}z}{x}; \omega\right) \frac{\Omega(x)}{x^2} dx. \quad (1.60)$$

§ 2. Дальнейшие леммы и основные теоремы

2.1. (а) В этом параграфе мы продолжим изложение, сначала же несколько сузив класс Ω_{ω} .

А именно, условимся отнести функцию $\omega(x)$ к классу $\bar{\Omega}_{\omega}$, если она удовлетворяет тем же условиям 1) и 2) из п. 1.1 (а), но взамен условия 3) обладает свойством:

3') Функция $\omega(x)$ на полуоси $[1, +\infty)$ представима в виде

$$\omega(x) = \exp \{ - p(x) \}, \quad 1 \leq x < +\infty, \quad (2.1)$$

где

$$p(x) = \log 1/\omega(1) + \int_1^x \frac{a(t)}{t} dt, \quad (2.1')$$

а $a(t) \geq 1$ — некоторая неубывающая на $[1, +\infty)$ функция, причем $a(t) \uparrow +\infty$ при $t \uparrow +\infty$.

Легко видеть, что если $\omega(x) \in \bar{\Omega}_{\omega}$, то для любого $s \in (0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty} \omega(x) x^{s-1} dx < +\infty.$$

Таким образом, из свойства 3') вытекает выполнение свойства 3) класса Ω_{ω} . Иначе говоря, имеет место включение классов $\bar{\Omega}_{\omega} \subset \Omega_{\omega}$ и, тем самым, все утверждения из § 1 останутся в силе при $\omega(x) \in \bar{\Omega}_{\omega}$.

Отметим прежде всего, что если $\omega(x) \in \bar{\Omega}_{\omega}$, то для введенной нами в § 1 функции

$$\Omega(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\omega(t)}{t} dt, \quad x \in (0, +\infty)$$

справедлива оценка

$$\Omega(x) \leq \frac{\omega(x)}{\alpha(x)}, \quad 1 \leq x < +\infty. \quad (2.2)$$

В самом деле, из представления (2.1)–(2.1') функции $\omega(x)$ следует, что при $1 \leq x < +\infty$

$$\Omega(x) = \int_x^{+\infty} \frac{d\{-e^{-\rho(x)}\}}{\alpha(x)} \leq \frac{1}{\alpha(x)} \int_x^{+\infty} d\{-e^{-\rho(x)}\} = \frac{e^{-\rho(x)}}{\alpha(x)} = \frac{\omega(x)}{\alpha(x)},$$

поскольку, согласно определению функции $\alpha(t)$, мы имеем $\alpha(t) \geq \alpha(x)$ при $t \geq x$.

(6) Докажем теперь лемму.

Лемма 2.1. Пусть $\omega(x) \in \tilde{\mathcal{Q}}_\infty$ и $\arg \zeta = \varphi$. Тогда для введенной по (1.52) функции

$$U(z; \zeta) = \int_{|x|}^{\infty} C_\infty\left(\frac{\bar{\zeta} z}{x}; \omega\right) \frac{\omega(x)}{x} dx$$

справедливо предельное соотношение

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow +\infty} \Omega^{-1}(|\zeta|) U(z; \zeta) = C_\infty(ze^{-i\varphi}; \omega), \quad |z| < +\infty. \quad (2.3)$$

Доказательство. Обозначая

$$U_1(z; \zeta) \equiv \Omega^{-1}(|\zeta|) U(z; \zeta) - C_\infty(ze^{-i\varphi}; \omega) \quad (2.4)$$

и положив $r = |z|$, $R = |\zeta| > 1$, из тождества (1.54) леммы 1.7 получим оценку

$$\begin{aligned} |U_1(z; \zeta)| &\leq r \frac{R}{\Omega(R)} \int_R^{+\infty} C'_\infty\left(\frac{rR}{x}; \omega\right) \frac{\Omega(x)}{x^2} dx \leq \\ &\leq r C'_\infty(r; \omega) \frac{1}{R\Omega(R)} \int_R^{+\infty} \Omega(x) dx, \quad R > 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Но поскольку

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} R\Omega(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_R^{+\infty} \Omega(x) dx = 0,$$

то согласно формуле Коши существует такое $\xi \in (R, +\infty)$, что

$$\frac{1}{R\Omega(R)} \int_R^{+\infty} \Omega(x) dx = \frac{\Omega(\xi)}{\omega(\xi) - \Omega(\xi)}.$$

Поэтому в силу неравенства (2.2)

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R\Omega(R)} \int_R^{+\infty} \Omega(x) dx \leq \overline{\lim}_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha(\xi) - 1} = 0,$$

откуда и из (2.4), (2.5) следует соотношение (2.3) леммы.

(в) Обозначим при $0 \leq |z| < |\zeta| < +\infty$

$$V_1(z; \zeta) \equiv \Omega^{-1}(|\zeta|) V(z; \zeta) - C_-(ze^{-i\varphi}; \omega), \quad (2.6)$$

положив вновь $\varphi = \arg \zeta$, где функция $V(z; \zeta)$ определена по формуле (1.53).

Тогда положив вновь $0 \leq r = |z| < |\zeta| = R < +\infty$, из тождества (1.55) леммы 1.7 получим оценку

$$|V_1(z; \zeta)| \leq \frac{r}{R\Omega(R)} \int_R^{+\infty} C_-\left(\frac{rx}{R}; \omega\right) \Omega(x) dx, \quad (2.7)$$

причем, как было показано в той же лемме, интеграл справа сходится при нашем условии $R > r$.

Из оценок (1.22) производных функции $C_-(z; \omega)$, в частности, вытекает неравенство

$$|C_-(z; \omega)| \leq A_1(\gamma) \{|z| \omega(\gamma|z|)\}^{-1}, \quad 0 < |z| < \infty,$$

где $A_1(\gamma) = \gamma(\gamma-1)^{-2}$.

Отсюда и из (2.7) приходим к оценке

$$|V_1(z; \zeta)| \leq \frac{A_1(\gamma)}{\Omega(R)} \int_R^{+\infty} \frac{\Omega(x)}{x\omega\left(\frac{\gamma r}{R}x\right)} dx, \quad R > r. \quad (2.8)$$

Но оценка эта будет содержательной, если мы установим, что интеграл

$$J(r; R) = \int_R^{+\infty} \frac{\Omega(x)}{x\omega\left(\frac{\gamma r}{R}x\right)} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\Omega(Rx)}{x\omega(\gamma rx)} dx \quad (2.9)$$

сходится хотя бы для достаточно больших значений $R > r > 1$.

В этом можно убедиться для функций класса $\bar{\Omega}_-$, подчиненных дополнительному условию

$$\alpha(x) \geq \alpha_0 \log_2 x, \quad x \geq x_0 \geq e^2, \quad (2.10)$$

где α_0 ($0 < \alpha_0 < +\infty$) — некоторое фиксированное число.

В самом деле, во-первых, заметим, что в силу неравенства (2.2) мы будем иметь

$$J(r; R) \leq \frac{1}{\alpha(R)} \int_1^{+\infty} \frac{\omega(Rx)}{x\omega(\gamma rx)} dx, \quad (2.9')$$

причем ввиду представления (2.1)–(2.1') функции $\omega(x)$ для $x \geq 1$

$$\frac{\omega(Rx)}{\omega(\gamma rx)} = \exp \left\{ - \int_{\gamma rx}^{Rx} \frac{\alpha(t)}{t} dt \right\} \leq \exp \left\{ - \alpha(\gamma rx) \log \frac{R}{\gamma r} \right\}.$$

Предположив теперь, что

$$R \geq x_0^{-1} \max \{\gamma r, x_0\}, \quad x_0 = e^{-2/\gamma}, \quad (2.11)$$

мы приходим к неравенству

$$\frac{\omega(Rx)}{\omega(\gamma r x)} \leq \frac{\omega(Rx)}{\omega(x_0 Rx)} \leq \exp \{-2 \log_2 (\gamma r x)\} = [\log (\gamma r x)]^{-2}, \quad x \geq x_0.$$

Следовательно, в условиях (2.10) и (2.11) будем иметь

$$J(r, R) \leq \frac{1}{\alpha(R)} \int_1^{+\infty} \frac{\omega(Rx)}{x \omega(x_0 Rx)} dx = \frac{1}{\alpha(R)} \int_R^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x \omega(x_0 x)} dx < +\infty, \quad (2.12)$$

откуда, очевидно, вытекает, что

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} J(r, R) = 0 \quad (0 \leq r < +\infty).$$

2.2. Докажем теперь важный для дальнейшего аналог леммы 2.1 об асимптотическом поведении функции $V(z; \zeta)$, когда $\zeta \rightarrow \infty$.

а) Лемма 2.2. Пусть $\omega(x) \in \bar{\Omega}_-$ и при некотором x ($0 < x < 1$) функция $\alpha(x)$ удовлетворяет условию

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} < \delta(x) < 1. \quad (2.13)$$

Тогда если $\arg \zeta = \varphi$, то справедливо предельное соотношение

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow +\infty} \Omega^{-1}(|\zeta|) V(z; \zeta) = C_-(z e^{-i\varphi}; \omega), \quad |z| < +\infty. \quad (2.14)$$

Доказательство. Для любого $R_1 > R$ введем в рассмотрение функцию

$$J(r, R; R_1) = \int_R^{R_1} \frac{\Omega(x)}{x \omega\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)} dx, \quad R_1 > R > r.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} J(r, R; R_1) &= - \int_R^{R_1} \frac{1}{\omega\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)} d \left\{ \int_x^{R_1} \frac{\Omega(t)}{t} dt \right\} = \\ &= \frac{1}{\omega(\gamma r)} \int_R^{R_1} \frac{\Omega(t)}{t} dt - \int_R^{R_1} \left\{ \int_x^{R_1} \frac{\Omega(t)}{t} dt \right\} \frac{\frac{\gamma r}{R} \omega' \left(\frac{\gamma r}{R} x \right)}{\omega^2 \left(\frac{\gamma r}{R} x \right)} dx. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь неравенством (2.2), мы имеем для $R \leq x \leq R_1$

$$\int_x^{R_1} \frac{\Omega(t)}{t} dt \leq \int_x^{\infty} \frac{\omega(t)}{t^2(t)} dt < \frac{1}{a(x)} \int_x^{\infty} \frac{\omega(t)}{t} dt = \frac{\Omega(x)}{a(x)}.$$

Одновременно, очевидно, что для любого $q > 0$, $-q\omega'(qx)/\omega(qx) = = a(qx)/x$. Поэтому мы приходим к оценке

$$J(r, R; R_1) \leq \frac{\Omega(R)}{\omega(\gamma r) a(R)} + \int_R^{R_1} \frac{\Omega(x)}{x\omega\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)} \frac{a\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)}{a(x)} dx,$$

или, в силу определения самого интеграла $J(r, R; R_1)$ — к оценке

$$\int_R^{R_1} \frac{\Omega(x)}{x\omega\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)} \left\{ 1 - \frac{a\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)}{a(x)} \right\} dx \leq \frac{\Omega(R)}{\omega(\gamma r) a(R)}.$$

Устремив здесь $R_1 \rightarrow +\infty$, для любого $R > \gamma r \geq 1$ получим неравенство

$$\int_R^{+\infty} \frac{\Omega(x)}{x\omega\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)} \left\{ 1 - \frac{a\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)}{a(x)} \right\} dx \leq \frac{\Omega(R)}{\omega(\gamma r) a(R)}. \quad (2.15)$$

левая часть которого неотрицательна ввиду того, что функция $a(x)$ неубывающая на полуоси $[1, +\infty)$.

Но если $R \geq x^{-1} \gamma r$, то $a\left(\frac{\gamma r}{R} x\right) < a(x)$ и

$$1 - \frac{a\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)}{a(x)} \geq 1 - \frac{a(x)}{a(x)}, \quad R \leq x < +\infty.$$

Поэтому из условия (2.13) леммы следует, что существует число $R_0 \geq x^{-1} \gamma r$ такое, что при $x \geq R_0$

$$1 - \frac{a\left(\frac{\gamma r}{R} x\right)}{a(x)} \geq 1 - \sqrt{\delta(x)} > 0.$$

Отсюда, из формул (2.8), (2.9) ввиду (2.15) вытекает, далее, неравенство

$$|V_1(z; \zeta)| \leq \frac{A_1(1)}{(1 - \sqrt{\delta(x)}) a(R)}, \quad R > R_0,$$

откуда, ввиду того, что $a(R) \rightarrow +\infty$ при $R \rightarrow +\infty$, получим для любого $r = |z| \geq 1$

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow +\infty} V_1(z; \zeta) = 0. \quad (2.16)$$

Но поскольку $\{V_1(z; \zeta)\}$ для $|\zeta| > |z|$ суть семейство функций, аналитических в любом круге $|z| \leq r$ ($0 < r < +\infty$), то очевидно, что соотношение (2.16) справедливо во всей комплексной плоскости z .

Наконец, из тождества (2.6), в силу (2.16), вытекает утверждение (2.14) леммы.

(б) Из доказанной леммы непосредственно вытекает

Следствие 1. Если $\omega(x) \in \bar{\Omega}_\infty$, причем $\alpha(x)/x$ — неубывающая функция на полуоси $[x_0, +\infty) \subset [1, +\infty)$, то соотношение (2.14) леммы справедливо.

Действительно, в этом случае для любого x ($0 < x < 1$)

$$\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = x \left[\frac{\alpha(x)}{x} \right] \cdot \left[\frac{\alpha(x)}{x} \right]^{-1} \leq x < 1.$$

Прежде чем привести второе следствие, напомним одно определение.

Функция $\rho(x) > 0$, определенная на некоторой полуоси $[x_0, +\infty) \subset [0, +\infty)$, называется *уточненным порядком*, если

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = \rho > 0,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \{x \rho'(x) \log x\} = 0. \quad (2.17)$$

Как известно (см., напр., [8], стр. 48), если $\rho(x)$ — уточняет порядок, то имеет место представление

$$x^{\rho(x)} = x^\rho L(x), \quad x \geq x_1 \geq x_0, \quad (2.18)$$

где $L(x)$ — медленно растущая функция, т. е. функция, для которой при любом x ($0 < x < +\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} L(x)/L(x) = 1. \quad (2.18')$$

Условимся теперь функцию $\rho(x)$ отнести к классу R_ρ , если она кроме условий (2.17) удовлетворяет также дополнительному условию

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} |x \rho''(x) \log x| = 0. \quad (2.17')$$

Следствие 2. Если $\omega(x) = \exp \{-\sigma x^{\rho(x)}\}$, где $\rho(x) \in R_\rho$, а $\sigma > 0$ — любое фиксированное число, то $\omega(x) \in \bar{\Omega}_\infty$, и кроме того имеет место соотношение (2.14) леммы.

В самом деле, обозначая

$$\rho(x) = \sigma x^{\rho(x)},$$

мы имеем:

$$\begin{aligned} x \rho'(x) &= \rho(x) \{ \rho(x) + x \rho'(x) \log x \}, \\ [x \rho'(x)]' &= \rho(x) \{ [\rho(x) + x \rho'(x) \log x]^2 + \\ &+ [2\rho'(x) + \rho'(x) \log x + x \rho''(x) \log x] \}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Из условий (2.17)–(2.17') непосредственно вытекает, что $x\rho'(x) \uparrow +\infty$ при $x \uparrow +\infty$. Иначе говоря, если положить $x\rho'(x) = a_\rho(x)$, то функция $\rho(x)$ на некоторой полуоси $[x_0, +\infty) \subset [1, +\infty)$ допускает представление вида

$$\rho(x) = \rho(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{a_\rho(t)}{t} dt, \quad x \geq x_0,$$

где $a_\rho(x) \geq 1$ — неубывающая на $[x_0, +\infty)$ функция, причем $\lim_{x \rightarrow +\infty} a_\rho(x) = +\infty$. Таким образом, обозначая $\omega(x) = \exp[-zx^{\rho(x)}]$, мы будем иметь $\omega(x) \in \bar{\mathcal{Q}}_-$.

Наконец, по (2.18) и (2.19) для любого λ ($0 < \lambda < +\infty$)

$$\frac{a_\rho(\lambda x)}{a_\rho(x)} = \frac{\lambda x \rho'(\lambda x)}{x \rho'(x)} = \lambda^\rho \frac{L(\lambda x)}{L(x)} \cdot \frac{\rho(\lambda x) + \lambda x \rho'(\lambda x) \log \lambda x}{\rho(x) + x \rho'(x) \log x}$$

и, согласно (2.18') и (2.19)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_\rho(\lambda x)}{a_\rho(x)} = \lambda^\rho.$$

Следовательно, для любого $0 < \lambda < 1$ функция $a_\rho(x)$ удовлетворяет условию (2.13) леммы 2.2, и, тем самым, наше утверждение справедливо.

(в) В заключение приведем другой важный конкретный пример функции $\omega(x) \in \bar{\mathcal{Q}}_-$, для которого соотношение (2.13) леммы 2.2 сохраняет силу.

С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$\omega_\rho(x) = \frac{\rho \sigma^\mu}{\Gamma(\mu)} \int_x^{+\infty} e^{-\sigma t^\rho} t^{\mu\rho-1} dt, \quad x \in [0, +\infty), \quad (2.20)$$

где ρ ($0 < \rho < +\infty$), μ ($0 < \mu < +\infty$) и σ ($0 < \sigma < +\infty$) — произвольные параметры.

Легко видеть, что функция $\omega_\rho(x) > 0$ непрерывна, убывает на всей полуоси $[0, +\infty)$, причем $\omega_\rho(0) = 1$. Так как

$$1 - \omega_\rho(x) = \frac{\rho \sigma^\mu}{\Gamma(\mu)} \int_0^x e^{-\sigma t^\rho} t^{\mu\rho-1} dt, \quad x > 0,$$

то $1 - \omega_\rho(x) = O(x^{\mu\rho})$ при $x \rightarrow 0$, и поэтому

$$a_\omega = \int_0^1 (1 - \omega_\rho(x)) \frac{dx}{x} < +\infty.$$

Далее, для любого $s \in (0, +\infty)$

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= s \int_0^{+\infty} \omega_p(x) x^{s-1} dx = \int_0^{+\infty} x^s d[-\omega_p(x)] = \\ &= \frac{\rho \sigma^{1/\rho}}{\Gamma(\mu)} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma x^\rho} x^{\mu\rho+s-1} dx = \frac{\Gamma(\mu + s/\rho)}{\sigma^{s/\rho} \Gamma(\mu)}.\end{aligned}$$

Таким образом, $\Delta(+0) = 1$, и

$$C_\infty(z; \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta(k)} = \Gamma(\mu) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sigma^{1/\rho} z)^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)} = \Gamma(\mu) E_p(\sigma^{1/\rho} z; \mu), \quad (2.21)$$

где

$$E_p(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k/\rho)}$$

— целая функция типа Миттаг-Леффлера порядка ρ и типа 1 для любого значения параметра $\mu > 0$.

Лемма 2.3. Функцию $\omega_p(x)$ можно представить в виде

$$\omega_p(x) = \exp\{-\sigma x^{\rho(x)}\}, \quad 0 \leq x < +\infty, \quad (2.22)$$

где $\rho(x) \in R_\rho$.

Доказательство. Из определения (2.20) функции $\omega_p(x)$ имеем

$$\omega_p(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{\sigma x^\rho}^{+\infty} e^{-t} t^{\mu-1} dt. \quad (2.20')$$

Поэтому при $\mu = 1$ мы имеем $\omega_p(x) = e^{-\sigma x^\rho}$, и, тем самым, $\rho(x) \equiv \rho$.

Таким образом, нам следует доказать лемму лишь в случае, когда $\mu \neq 1$. Из (2.20') интегрированием по частям получим тождество

$$\omega_p(x) = \frac{\sigma^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} e^{-\sigma x^\rho} x^{\mu\rho-\rho} + \omega_p^*(x), \quad (2.23)$$

где

$$\omega_p^*(x) = \frac{\mu-1}{\Gamma(\mu)} \int_{\sigma x^\rho}^{+\infty} e^{-t} t^{\mu-2} dt, \quad (2.23')$$

и поэтому

$$|\omega_p^*(x)| \leq \frac{|\mu-1|}{\sigma x^\rho} \omega_p(x), \quad 0 < x < +\infty. \quad (2.24)$$

Отсюда непосредственно следуют асимптотические формулы

$$\begin{aligned}\omega_p(x) &\sim \frac{\sigma^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} e^{-\sigma x^\rho} x^{\mu\rho-\rho}, \\ &\quad x \rightarrow +\infty \\ \omega_p^{-1}(x) &\sim \frac{\Gamma(\mu)}{\sigma^{\mu-1}} e^{\sigma x^\rho} x^{\rho-\mu\rho}.\end{aligned} \quad (2.25)$$

Далее, из (2.23') применением двукратного интегрирования по частям приходим к следующему более общему чем (2.23) тождеству

$$\omega_{\rho}(x) = \frac{\sigma^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} e^{-\sigma x^{\rho}} x^{\mu\rho-\rho} \{1 + (\mu-1) \sigma^{-1} x^{-\rho} + \\ + (\mu-1)(\mu-2) \sigma^{-2} x^{-2\rho} + \tilde{\omega}_{\rho}(x)\}, \quad (2.26)$$

где

$$\tilde{\omega}_{\rho}(x) = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu-3)} \sigma^{1-\mu} e^{\sigma x^{\rho}} x^{\rho-\mu\rho} \int_{\sigma x^{\rho}}^{+\infty} e^{-t} t^{\mu-4} dt,$$

при этом в силу (2.25) легко видеть, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\tilde{\omega}_{\rho}(x) = O(x^{-3\rho}). \quad (2.26')$$

Поэтому из (2.26) и (2.26') следует также, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\omega_{\rho}^{-1}(x) = \frac{\Gamma(\mu)}{\sigma^{\mu-1}} e^{\sigma x^{\rho}} x^{\rho-\mu\rho} \{1 - (\mu-1) \sigma^{-1} x^{-\rho} + \\ + (\mu-1) \sigma^{-2} x^{-2\rho} + O(x^{-3\rho})\}. \quad (2.27)$$

Теперь заметим, что согласно определению (2.22) функции $\rho(x)$

$$\rho(x) = \log \{\sigma^{-1} \log \omega_{\rho}^{-1}(x)\} (\log x)^{-1},$$

а в силу (2.27) при $x \rightarrow +\infty$

$$\sigma^{-1} \log \omega_{\rho}^{-1}(x) = \sigma^{-1} \log \{\sigma^{1-\mu} \Gamma(\mu)\} + x^{\rho} - \rho(\mu-1) \sigma^{-1} \log x + \\ + \sigma^{-1} \log \{1 - (\mu-1) \sigma^{-1} x^{-\rho} + O(x^{-2\rho})\}.$$

Отсюда следует, что справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\rho(x) = \rho + \rho(1-\mu) \sigma^{-1} x^{-\rho} + O\left(\frac{x^{-\rho}}{\log x}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2.28)$$

Далее, так как по (2.22)

$$x^{\rho(x)} = \sigma^{-1} \log \omega_{\rho}^{-1}(x),$$

то дифференцированием по x отсюда получим

$$x^{\rho(x)-1} [\rho(x) + x\rho'(x) \log x] = -\sigma^{-1} \frac{\omega'_{\rho}(x)}{\omega_{\rho}(x)}. \quad (2.29)$$

Но из (2.20') имеем

$$\omega'_{\rho}(x) = -\frac{\rho \sigma^{\mu}}{\Gamma(\mu)} e^{-\sigma x^{\rho}} x^{\mu\rho-1}. \quad (2.30)$$

Поэтому, и в силу (2.27) мы приходим к асимптотической формуле

$$\rho(x) + x \rho'(x) \log x = \rho x^{\rho-\rho(x)} \{1 + O(x^{-\rho})\}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Но из (2.28) вытекает, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = \rho \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\rho-\rho(x)} = 1, \quad (2.31)$$

и поэтому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{x \rho'(x) \log x\} = 0. \quad (2.32)$$

Таким образом, $\rho(x)$ является уточненным порядком и для завершения доказательства леммы нам остается показать, что она удовлетворяет также условию (2.17').

С этой целью запишем тождество (2.29) в виде

$$\rho(x) + x \rho'(x) \log x = -\sigma^{-1} \frac{\omega'_\rho(x)}{\omega_\rho(x)} x^{1-\rho(x)}$$

и затем, дифференцируя по x , получим

$$\begin{aligned} & 2 \rho'(x) + \rho'(x) \log x + x \rho''(x) \log x = \\ & = \sigma^{-1} [1 - \rho(x)] x^{-\rho(x)} \frac{\omega'_\rho(x)}{\omega_\rho(x)} + \sigma^{-1} x^{1-\rho(x)} \rho'(x) \frac{\omega'_\rho(x)}{\omega_\rho(x)} - \\ & - \frac{\sigma^{-1}}{\omega_\rho(x)} \left\{ \omega_\rho^*(x) - \frac{[\omega'_\rho(x)]^2}{\omega_\rho(x)} \right\} x^{1-\rho(x)} \equiv \sum_{j=1}^3 U_j(x). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Но по (2.25) и (2.30), при $x \rightarrow +\infty$

$$U_1(x) \sim -\rho(\rho-1) x^{\rho-\rho(x)-1} \sim O(x^{-1})$$

по (2.31), и

$$U_2(x) \sim -\rho x^{\rho-\rho(x)} \rho'(x) \sim o\left(\frac{x^{-1}}{\log x}\right)$$

по (2.32).

Переходя к выяснению поведения функции $U_3(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, заметим, что из (2.30) имеем

$$\omega_\rho^*(x) = \frac{\sigma^{\mu+1} \rho^2}{\Gamma(\mu)} e^{-\sigma x^\rho} x^{\mu\rho+\rho-2} \{1 - (\mu-1/\rho) \sigma^{-1} x^{-\rho}\},$$

а из (2.30) и (2.27) следует, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \frac{[\omega'_\rho(x)]^2}{\omega_\rho(x)} &= \frac{\sigma^{\mu+1} \rho^2}{\Gamma(\mu)} e^{-\sigma x^\rho} x^{\mu\rho+\rho-2} \{1 - (\mu-1) \sigma^{-1} x^{-\rho} + \\ &+ (\mu-1) \sigma^{-2} x^{-2\rho} + O(x^{-3\rho})\}. \end{aligned}$$

Из приведенных соотношений следует, что при $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \omega_\rho^*(x) - \frac{[\omega'_\rho(x)]^2}{\omega_\rho(x)} &= -(\sigma\rho)^2 \frac{\sigma^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} e^{-\sigma x^\rho} x^{\mu\rho+\rho-2} \{(1 - \rho^{-1}) \sigma^{-1} x^{-\rho} + \\ &+ (\mu-1) \sigma^{-2} x^{-2\rho} + O(x^{-2\rho})\}, \end{aligned}$$

откуда, пользуясь формулой (2.25), получим

$$U_3(x) \equiv -\frac{\sigma^{-1}}{\omega_p(x)} \left\{ \omega_p'(x) - \frac{[\omega_p'(x)]^2}{\omega_p(x)} \right\} =$$

$$= (\sigma\rho)^2 x^{2-\rho(x)} \{ (1-\rho^{-1}) \sigma^{-1} + (\mu-1) \sigma^{-2} x^{-\rho} + O(x^{-2\rho}) \} x^{-1}.$$

Отсюда по (2.31) заключаем, что при $x \rightarrow +\infty$

$$U_3(x) \sim O(x^{-1}).$$

Возвращаясь, наконец, к тождеству (2.33) и учитывая как поведение функций $U_j(x)$ ($j=1, 2, 3$) при $x \rightarrow +\infty$, так и то, что функция $\rho(x)$ — уточненный порядок, заключаем, что также $\lim_{x \rightarrow +\infty} \{x \rho''(x) \times \times \log x\} = 0$.

Итак, $\rho(x) \in R_\rho$ и лемма полностью доказана.

Из следствия 2 леммы 2.2 и из доказанной леммы 2.3 вытекает

Следствие. Для любого ρ ($0 < \rho < +\infty$), σ ($0 < \sigma < +\infty$) и μ ($0 <$

$< \mu < +\infty$) будем иметь $\omega_\rho(x) \in \bar{\Omega}_\infty$, и если $\arg \zeta = \varphi$, то

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow +\infty} \Omega_\rho^{-1}(|\zeta|) V_\rho(z; \zeta) = E_\rho(ze^{-i\varphi}; \zeta), \quad |z| < +\infty, \quad (2.34)$$

где

$$V_\rho(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{+\infty} E_\rho\left(\frac{zx}{\zeta}; \mu\right) \frac{\omega_\rho(x)}{x} dx, \quad \Omega_\rho(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\omega_\rho(t)}{t} dt. \quad (2.34')$$

2.2 (а). Согласно лемме 3 и введенным нами обозначениям (1.52) и (1.53) функция

$$A_\omega^{(*)}(z; \zeta) = \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \{-W_\omega^{(*)}(z; \zeta)\}$$

при $0 \leq |z| < |\zeta| < +\infty$ допускает представление

$$A_\omega^{(*)}(z; \zeta) = \exp \{-\Omega_\infty(z; \zeta)\},$$

где

$$\Omega_\infty(z; \zeta) = U(z; \zeta) + V(z; \zeta).$$

Поэтому, пользуясь леммами 2.1, 2.2, следствиями 1 и 2 из последней, или леммой 2.3, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Пусть функция $\omega(x)$ из класса $\bar{\Omega}_\infty$, причем выполняется одно из следующих условий:

а) при некотором x ($0 < x < 1$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sup \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} < 1,$$

б) $\alpha(x)/x$ не убывает на некоторой полуоси $[x_0, +\infty) \subset [1, +\infty)$,

в) функция $\omega(x)$ представима в виде $\omega(x) = \exp \{-\sigma x^{\rho(x)}\}$

($0 < \sigma < +\infty$), где $\rho(x) \in R_\rho$, или, в частности, в виде

$$\omega(x) = \omega_p(x) = \frac{\rho \sigma^\mu}{\Gamma(\mu)} \int_x^{+\infty} e^{-\sigma t^\rho} t^{\mu\rho-1} dt,$$

где ρ , σ и μ — произвольные положительные параметры.

Тогда при $\arg \zeta = \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) имеет место предельное соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{|\zeta| \rightarrow +\infty} \Omega^{-1}(|\zeta|) \log A_{\omega}^{(\infty)}(z; \zeta) = \\ = 2C_{\infty}(ze^{-i\varphi}; \omega) - 1 = S_{\infty}(ze^{-i\varphi}; \omega), \quad |z| < +\infty. \end{aligned} \quad (2.35)$$

(6) Приведем, наконец, основную теорему данной работы о построении универсальной целой функции с нулями на данной произвольной последовательности точек на комплексной плоскости.

Теорема 2. Пусть функция $\omega(x)$ из класса $\tilde{\Omega}_{\infty}$ удовлетворяет одному из условий теоремы 1. Пусть, далее, $\{z_k\}_1^{\infty}$ ($0 < |z_k| \leq |z_{k+1}| < +\infty$) — произвольная последовательность комплексных чисел, подчиненная условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z_k|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx < +\infty. \quad (2.36)$$

Тогда бесконечное произведение

$$\pi_{\omega}(z; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \left[-W_{\omega}^{(\infty)}(z; z_k)\right], \quad (2.37)$$

где

$$\begin{aligned} W_{\omega}^{(\infty)}(z; \zeta) = \int_{|\zeta|}^{\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \zeta^{-k} \int_0^{|\zeta|} \omega(x) x^{k-1} dx - \right. \\ \left. - \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{+\infty} \omega(x) x^{-k-1} dx \right\} \frac{z^k}{k \int_0^{\infty} \omega(x) x^{k-1} dx} \end{aligned} \quad (2.38)$$

равномерно и абсолютно сходится на каждом компакте плоскости z , представляя целую функцию $\pi_{\omega}(z; z_k)$, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности $\{z_k\}_1^{\infty}$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$\begin{aligned} A_{\omega}^{(\infty)}(0; \zeta) &= \left\{ \left(1 - \frac{z}{\zeta}\right) \exp \left[-W_{\omega}^{(\infty)}(z; \zeta)\right] \right\}_{z=0} = \\ &= \exp \left\{ - \int_{|\zeta|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\pi_{\omega}(0; z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} A_{\omega}^{(\infty)}(0; z_k) = \exp \left\{ - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|z|_k}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx \right\} > 0$$

лишь при условии (2.36).

Таким образом, условие (2.36) необходимо для того, чтобы бесконечное произведение $\pi_{\omega}(z; z_k)$ сходилось в точках плоскости z , отличных от точек последовательности $\{z_k\}_1^{\infty}$.

Согласно предельному соотношению (2.35) теоремы 1

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow +\infty} \{1 - A_{\omega}(z; |\zeta| e^{i\varphi})\} \Omega^{-1}(|\zeta|) = S_{\omega}(e^{-i\varphi} z; \omega),$$

притом равномерно относительно $\varphi \in [0, 2\pi]$ и $|z| \leq R$, где $R \in (0, +\infty)$ любое.

Отсюда следует, что для любого $R > 0$ существует целое число $N(R) \geq 1$, такое что

$$|1 - A_{\omega}^{(\infty)}(z; z_k)| \leq 2S_{\omega}(R; \omega) \int_{|z_k|}^{+\infty} \frac{\omega(x)}{x} dx, \quad |z| \leq R,$$

как только $k \geq N(R)$.

Поскольку всегда

$$|1 - |A_{\omega}^{(\infty)}(z; \zeta)|| \leq |1 - A_{\omega}^{(\infty)}(z; \zeta)|,$$

то отсюда следует, что при условии (2.36) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1 - |A_{\omega}^{(\infty)}(z; z_k)||$$

сходится, притом равномерно в каждом круге $|z| \leq R$.

В силу известного признака сходимости бесконечных произведений, утверждение теоремы доказано.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 31.III.1978

Մ. Մ. ԶԻՐԱՇՅԱՆ. Մի անվերջ արտադրյալի մասին (ամփոփում)

Հեղինակի աշխատանքներում կառուցվել էր մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացիայի տեսությունը միավոր շրջանում [1, 2, 3] և մասնակիորեն ամբողջ հարթության մեջ [4]

Նշված աշխատանքների հիմքում ընկած գաղափարների և մեթոդների հետագա զարգացման միջոցով ներկա հոդվածում բերվում է մի ունիվերսալ անվերջ արտադրյալի կառուցումը: Այդ արտադրյալները կարող են հիմք ծառայել ողջ հարթության մեջ կամայական ան ունեցող ամբողջ կամ մերոմորֆ ֆունկցիաների ֆակտորիզացիայի լիակատար տեսության կառուցման համար:

М. М. JRBASHIAN. *On a certain infinite product (summary)*

In the series of the author's earlier investigations (1, 2, 3) the factorization theory for functions meromorphic in the disk or in the whole plane was developed.

The present article carries out the construction of an universal infinite product. The construction develops further the ideas and methods, which were the basis of the mentioned above investigations.

The obtained products can serve for a basis in the construction of a complete factorization theory for functions entire or meromorphic in the whole plane, having arbitrary growth.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. М. Джрбашян. О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций. ДАН Арм.ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций комплексной области, М., Изд. „Наука“, 1966.
3. М. М. Джрбашян. Теория факторизации функций, мероморфных в круге, Мат. сб., 79 (121), № 4 (8), 1969, 517—615.
4. М. М. Джрбашян. Факторизация функций, мероморфных в конечной плоскости. Изв. АН Арм.ССР, „Математика“, V, № 6, 1970, 453—485.
5. Р. Неванlinna. Однозначные аналитические функции. М., Огиз, 1941, 226.
6. У. Хеймин. Мероморфные функции. М., Изд. „Мир“, 1966.
7. P. Duren. Theory of H^p Spaces, Academy Press, New York and London, 1970.
8. Б. А. Левин. Распределение корней целых функций, М., 1956.