ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

А. М. КЫТМАНОВ, Л. А. АЙЗЕНБЕРГ

О ГОЛОМОРФНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, ПРЕДСТАВИМЫХ ИНТЕГРАЛОМ МАРТИНЕЛЛИ—БОХНЕРА

§ 1. Основные результаты

Пусть D — ограниченная область в $\mathbf{C}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂D. Хорошо известно, что всякую функцию f, непрерывную в замыкании области $\bar{D}$ (т. е. $f \in C(\bar{D})$) и голоморфную в D, можно представить интегралом Мартинелли—Бохнера

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\, U(\zeta, z); \quad z \in D, \tag{1}$$

где

$$U(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k}{|\zeta - z|^{2n}}\, d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

$d\zeta = d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$, а $d\bar{\zeta}[k]$ получается из $d\bar{\zeta}$ выбрасыванием дифференциала $d\bar{\zeta}_k$.

В [1] (в разделе „Исторические замечания и нерешенные задачи“) поставлена обратная задача: пусть для функции $f \in C(\bar{D})$ выполняется равенство (1), будет ли f голоморфна в D? При $n=1$ голоморфность f сразу следует из того, что ядро $U(\zeta, z)$ превращается в ядро Коши, которое голоморфно по z. При $n>1$ ядро Мартинелли—Бохнера только гармонично по z, поэтому из вида формулы (1) сразу следует лишь гармоничность в D функции f. Задачу можно переформулировать так: будет ли класс гармонических функций из $C(\bar{D})$, представимых интегралом Мартинелли—Бохнера, совпадать с классом голоморфных в D функций.

Для случая гладких функций f (т. е. $f \in C^{(1)}(\bar{D})$) положительный ответ на этот вопрос был получен в работах [2], [3].

Теорема А [3]. *Если для $f \in C^{(1)}(\bar{D})$ справедливо* (1), *то f голоморфна в D.*

В данной работе задача решается для непрерывных функций.

Теорема 1. *Если $f \in C(\bar{D})$ представляется в D интегралом Мартинелли—Бохнера, то f голоморфна в D в каждом из следующих случаев:*

а) *∂D принадлежит классу $C^{(2)}$*,

б) *$n = 2$, граница ∂D связна и принадлежит $C^{(1)}$*.

Отметим, что из трех утверждений (теорема А и любой из случаев теоремы 1) ни одно не является следствием других и, что каждое из них доказывается своим методом.

Теорема 2. *Пусть $f \in C(\partial D)$ и*

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\, U(\zeta, z) = 0, \quad z \bar{\in} \bar{D}, \tag{2}$$

тогда существует $F \in C(\bar{D})$, голоморфная в D и такая, что сужение F на ∂D совпадает с f, в каждом из случаев а) и б) теоремы 1.

Интегральные критерии существования голоморфного продолжения рассматривались рядом авторов (см., например, [3]—[6]). В работе [4] для функций, удовлетворяющих на ∂D условию Гельдера, такой критерий (в удобной для нас записи) состоит из следующих условий:

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\, U(\zeta, z) = \frac{f(z)}{2}, \quad z \in \partial D,$$

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\, dg \wedge d\bar{\zeta}[k, m] \wedge d\zeta = 0, \quad z \in \partial D,$$

$$k, m = 1, 2, \cdots, n, \quad k \neq m, \text{ а } g(\zeta, z) = |\zeta - z|^{2-2n}.$$

(В [5] для $n = 2$ этот критерий был получен для суммируемых функций). Первое из этих условий эквивалентно нашему (см. лемму 2 в [2]).

В [6] (см. также § 3 в [1] и [7]) для существования голоморфного продолжения непрерывной на ∂D функции f требуется ортогональность f всем замкнутым внешним дифференциальным формам из $C^{(\infty)}_{n, n-1}(\bar{D})$, а не только ядрам $U(\zeta, z)$. В [3] показано, что $f \in C^{(1)}(\partial D)$ голоморфно продолжается в D, если для нее выполнено условие (2). Таким образом, для указанного класса областей теорема 2 усиливает эти результаты.

Укажем на еще один критерий того, чтобы непрерывная на ∂D функция являлась следом на ∂D функции, голоморфной в D и непрерывной на $\bar{D}$. Пусть $Y_{k, l}(\theta)$ — ортонормальный на единичной сфере в $C^n = R^{2n}$ базис, состоящий из сферических функций (сферических гармоник) ([8], стр. 480), где θ — точка сферы, k — порядок сферической функции, l — номер данной функции среди сферических гармоник порядка k, входящих в базис,

$$l = 1, 2, \cdots, \sigma(k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \quad \sigma(k) = \frac{2(n+k-1)(2n+k-3)!}{k!\,(2n-2)!}.$$

Обозначим $Z_{k,l}(\zeta)= Y_{k,l}\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}\right)|\zeta|^k$ — шаровые (однородные гармонические) многочлены ([8], стр. 475), $l=1, 2,\cdots, \sigma(k)$, $k=0, 1, 2,\cdots$. Семейство $\{Z_{k,l}\}$ образует базис в пространстве функций, гармонических в шаре (с естественной топологией равномерной сходимости на компактах).

Следствие. *Пусть ∂D связна и удовлетворяет одному из двух условий:*

а) $\partial D\in C^{(2)}$,

б) $n=2$, *граница* $\partial D\in C^{(1)}$.

Для того чтобы функция $f\in C(\partial D)$ была следом на ∂D голоморфной в D и непрерывной на $\bar D$ функции, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{\partial}{\partial\zeta_j}Z_{k,l}(\zeta)\,d\bar\zeta[j]\wedge d\zeta=0, \tag{3}$$

$$l=1, 2,\cdots, \sigma(k),\ k=0, 1, 2,\cdots.$$

Отметим, что при $n=1$ данное следствие представляет собой известный классический критерий, состоящий в ортогональности $f(\zeta)$ при интегрировании по ∂D всем мономам ζ^k, $k=0, 1, 2,\cdots$ ([9], стр. 202).

§ 2. Доказательство теорем 1, 2 и следствия

Доказательство теорем. Теорема 1 следует из теоремы 2, так как если для функции $f\in C(\bar D)$ выполняется равенство (1), то из формулы скачка интеграла типа Мартинелли—Бохнера (см. [10], теорема 2 и следствие, а также [1], § 2) получаем (2). (Из этой же формулы скачка получаем, что теорема 2 следует из теоремы 1, т. е. они эквивалентны). Поэтому достаточно доказать теорему 2.

Пусть $f\in C(\partial D)$, введем обозначения

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\,U(\zeta, z)=\begin{cases} f^+(z), & z\in D,\\ f^-(z), & z\notin \bar D.\end{cases}$$

Если для f выполнены условия теоремы 2, т. е. $f^-\equiv 0$, то по формуле скачка интеграла типа Мартинелли—Бохнера (см. теорему 2 и следствие в [10]) мы получим, что f^+ непрерывно продолжается на $\bar D$ и ее сужение на ∂D совпадает с f. Рассмотрим теперь функцию φ, гармоническую в некоторой окрестности $\bar D$. Существует область J с гладкой границей такая, что $J\supset\bar D$ и φ гармонична на $\bar J$. По формуле Грина (см., например, [11], стр. 297)

$$\varphi(z) = \frac{(n-2)!}{4\pi^n} \int\limits_{\partial J} \left[g(\zeta, z) \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial n} - \varphi(\zeta) \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n} \right] d\sigma, \ z \in J,$$

где $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}$ — производная функции φ по направлению внешней нормали к поверхности ∂J в точке ζ, а $d\sigma$—элемент поверхности ∂J. Заменяя в формуле Грина интеграл подходящими интегральными суммами, а производную—разностным отношением, получим, что в некоторой окрестности $U(\bar{D})$ функция φ равномерно приближается линейными комбинациями дробей вида $g(\zeta, z^k)$, $z^k \in U(\bar{D})$, $k=1, 2, \cdots$. Так как

$$U(\zeta, z) = -\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial g}{\partial \zeta_k} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

то из (2) следует, что

$$\int\limits_{\partial D} f(\zeta) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_k} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta = 0 \tag{4}$$

для любой φ, гармонической в окрестности $\bar{D}$.

Рассмотрим последовательность областей D_m, $m=1, 2, \cdots$ с гладкими границами таких, что $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} D_m = D$, $\bar{D}_m \subset D_{m+1}$ и

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_{\partial D_m} \alpha = \int\limits_{\partial D} \alpha \tag{5}$$

для любой формы α типа $2n-1$ с непрерывными на $\bar{D}$ коэффициентами.

По формуле Стокса

$$(-1)^n \int\limits_{\partial D_m} f^+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta_k} d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta = \int\limits_{\partial D_m} \varphi \mu_{f^+},$$

где

$$\mu_{f^+} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{\partial f^+}{\partial \bar{\zeta}_k} d\zeta[k] \wedge d\bar{\zeta}.$$

Левый интеграл в этой формуле в силу (4) и (5) стремится к нулю, поэтому

$$\lim_{m \to \infty} \int\limits_{\partial D_m} \varphi \mu_{f^+} = 0 \tag{6}$$

для всякой функции φ, гармонической в окрестности $\bar{D}$.

Мы сейчас хотим получить, что условие (6) выполняется для любой φ, непрерывной на $\overline{D}$.

Введем следующие обозначения. Пусть $z^0 \in \partial D$, а $z^+ \in D$, $z^- \in \mathbf{C}^n \setminus \overline{D}$, причем эти точки расположены на нормали к поверхности ∂D в точке z^0 и $|z^+ - z^0| = |z^- - z^0|$. Определим функцию $\rho(z)$ так

$$\rho(z) = \begin{cases} -\inf\limits_{\zeta \in \partial D} |\zeta - z|, & z \in \overline{D}, \\ \inf\limits_{\zeta \in \partial D} |\zeta - z|, & z \,\overline{\in}\, \overline{D}, \end{cases}$$

тогда $D = \{z \in \mathbf{C}^n: \rho(z) < 0\}$.

Если $\partial D \in C^{(2)}$, то можно утверждать следующее (см. § 2 в [12], а также [13]):

а) существует окрестность U границы области ∂D такая, что $\rho \in C^{(2)}(U)$,

б) $|\operatorname{grad} \rho| \equiv 1$ в U,

в) $\frac{\partial \rho}{\partial z_k}(z^+) = \frac{\partial \rho}{\partial z_k}(z^-) = \frac{\partial \rho}{\partial z_k}(z^0)$, $k = 1, 2, \cdots, n$

и $z^\pm \in U$.

Обозначим через $N_F^\pm$ следующее выражение:

$$N_F^\pm = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial z_k} \frac{\partial F^\pm}{\partial \overline{z}_k}.$$

Лемма 1. *Пусть $\partial D \in C^{(2)}$ и $F \in C(\partial D)$, тогда*

$$\lim_{z^+,\, z^- \to z^0} (N_F^+(z^+) - N_F^-(z^-)) = 0,$$

этот предел достигается равномерно относительно точки z^0. Если $N_F^+(z)$ непрерывно продолжается на $\overline{D}$, то и $N_F^-(z)$ непрерывно продолжается на $\mathbf{C}^n \setminus D$ и обратно.*

Пользуясь этой леммой завершим доказательство случая а) теоремы 2.

В качестве областей D_m мы возьмем области

$$D_m = \left\{ z \in \mathbf{C}^n: \rho(z) < -\frac{1}{m} \right\},$$

ясно, что требование (5), наложенное на области D_m, выполнено.

Легко проверить, что

$$d\zeta[k] \wedge d\overline{\zeta}\Big|_{\partial D^m} = (2i)^n (-1)^{n+k-1} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta_k} d\sigma_m,$$

---

* Эта лемма является аналогом (для интеграла типа Мартинелли—Бохнера) теоремы А. М. Ляпунова о скачке нормальной производной потенциала двойного слоя (см. [14], а также [15], стр. 61).

где $d\sigma_m$ — элемент поверхности ∂D_m, поэтому

$$\mu_{f^+}\Big|_{\partial D_m} = (-2i)^n\, N_f^+\, d\sigma_m.$$

Так как $N_f^- \equiv 0$, то по лемме 1 N_f непрерывно продолжается на $\bar{D}$ и равна на ∂D нулю. Следовательно, условие (6) выполняется для функций из $C(\bar{D})$. Возьмем в качестве такой функции функцию $\bar{f}^+$, тогда по формуле Стокса

$$\int_{\partial D_m} \bar{f}^+\, \mu_{f^+} = (-2i)^n \int_{D_m} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f^+}{\partial \bar{\zeta}_k} \right|^2 dv \to 0,$$

при $m \to \infty$, поэтому f^+ — голоморфна в D. Раньше мы показали, что сужение f^+ на ∂D совпадает с f.

Рассмотрим случай б) теоремы 2. Пусть $n = 2$, граница ∂D связна и $\partial D \in C^{(1)}$. Мы показали, что если для $f \in C(\partial D)$ выполняется равенство (2), то для f справедливо (4). Рассмотрим функцию

$$\varphi_z(\zeta) = \frac{a(\zeta_1 - z_1) + b(\zeta_2 - z_2)}{b(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) - a(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2)}\, \frac{1}{|\zeta - z|^2}.$$

Эта функция гармонична по ζ в области $D_1 = \mathbf{C}^n \setminus \{\zeta\colon b(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1) - a(\bar{\zeta}_2 - \bar{z}_2) = 0\}$. Возьмем шар v, содержащий $\bar{D}$, тогда для фиксированной точки $z \notin \bar{V}$ можно найти константы a и b так, чтобы $D_1 \supset \bar{V}$. Легко проверить, что

$$dg \wedge d\zeta = \frac{\partial \varphi_z}{\partial \zeta_1}\, d\bar{\zeta}_2 \wedge d\zeta - \frac{\partial \varphi_z}{\partial \zeta_2}\, d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta.$$

Из (4) мы получим, что

$$\int_{\partial D} f\, dg \wedge d\zeta = 0, \quad z \notin \bar{V},$$

так как ∂D связна, то интеграл равен нулю для всех $z \notin \bar{D}$.

Лемма 2. *Пусть $D \subset \mathbf{C}^n$ — область с границей класса $C^{(1)}$ и $F \in C(\partial D)$, а*

$$\int_{\partial D} F\, dg \wedge d\bar{\zeta}[k, m] \wedge d\zeta = \begin{cases} H_F^+(z), & z \in D, \\ H_F^-(z), & z \notin \bar{D}, \end{cases}$$

тогда

$$\lim_{z^+,\, z^- \to z^0} \left(H_F^+(z^+) - H_F^-(z^-)\right) = 0,$$

причем этот предел достигается равномерно относительно точки z^0. Если $H_F^+(z)$ непрерывно продолжается на $\bar{D}$, то и $H_F^-(z)$ непрерывно продолжается на $\mathbf{C}^n \setminus D$, и обратно, если H_F^- непрерывно продолжается на $\mathbf{C}^n \setminus D$, то и H_F^+ непрерывно продолжается на $\bar{D}$ (точки z^0 и $z^{\pm}$ определяются, как в лемме 1).

Используя лемму 2, закончим доказательство теоремы 2. Итак, мы получили, что $H_j^- = 0$, следовательно, по лемме 2 функция H_j^+ непрерывно продолжается на $\overline{D}$ и на ∂D равняется нулю. Поэтому $H_j^+ = 0$, так как H_j^+ гармонична в D.

Далее

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_1} U(\zeta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial z_2} dg \wedge d\zeta,$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_2} U(\zeta, z) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{\partial}{\partial z_1} dg \wedge d\zeta.$$

Таким образом

$$\frac{\partial}{\partial \bar z_j} f^+(z) = \pm \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial D} f(\zeta) \frac{\partial}{\partial z_{3-j}} dg \wedge d\zeta = 0, \ z \in D, \ j = 1, 2,$$

т. е. f^+ является голоморфной в D функцией.

Доказательство следствия. Функция $f^-(z)$ гармонична при $z \notin \overline{D}$, поэтому для равенства $f^-(z) = 0$, $z \notin \overline{D}$, достаточно, если $\mathbf{C}^n \setminus \overline{D}$ связна, чтобы $f^-(z) = 0$ вне шара B, содержащего $\overline{D}$. При $z \notin B$ функция $g(\zeta, z)$ гармонична по ζ в B и, значит, представима равномерно сходящимся внутри B рядом по базисным гармоническим полиномам $Z_{k,l}$. Следовательно, условие (3) влечет за собой выполнение и (2).

Обратно, если f продолжается в D, как голоморфная функция, непрерывная на $\overline{D}$, то (3) верно ввиду $\bar\partial$-замкнутости подынтегральной внешней дифференциальной формы.

§ 3. Доказательство вспомогательных утверждений

Доказательство леммы 1. Пусть $F \in C(\partial D)$. Ясно, что вторая часть леммы следует из первой.

Так как $N_F^\pm = N_{F+C}^\pm$, где C — произвольная постоянная, то можно считать, что $F(z^0) = 0$.

Отметим, что

$$d\bar\zeta[k] \wedge d\zeta \Big|_{\partial D} = (2i)^n (-1)^{k-1} \frac{\partial \rho}{\partial \bar\zeta_k} d\sigma,$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности ∂D. Поэтому

$$U(\zeta, z)\Big|_{\partial D} = \frac{(n-1)!}{\pi^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \bar\zeta_k} \frac{\bar\zeta_k - \bar z_k}{|\zeta - z|^{2n}} d\sigma.$$

Следовательно,

$$N_F^+(z^+) - N_F^-(z^-) = -\frac{(n-1)!}{\pi^n} \times$$

$$\times \int_{\partial D} F(\zeta) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \rho(z^0)}{\partial z_k} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_k} \left[\frac{1}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{1}{|\zeta - z^-|^{2n}} \right] d\sigma +$$

$$+ \frac{n!}{\pi^n} \int_{\partial D} F(\zeta) \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \rho(z^0)}{\partial z_k} (\zeta_k - z_k^+) \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_m} (\bar{\zeta}_m - \bar{z}_m^+)}{|\zeta - z^+|^{2n+2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \rho(z^0)}{\partial z_k} (\zeta_k - z_k^-) \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial \rho}{\partial \bar{\zeta}_m} (\bar{\zeta}_m - \bar{z}_m^-)}{|\zeta - z^-|^{2n+2}} \right] d\sigma.$$

Обозначим первый интеграл через J_1, а второй интеграл через J_2.

С помощью унитарного преобразования и сдвига переведем точку z^0 в точку 0, а плоскость, касательную к ∂D в точке z^0 — в плоскость $\alpha = \{w \in \mathbf{C}^n \colon \operatorname{Im} w_n = 0\}$. При этом ∂D в окрестности нуля будет задаваться системой уравнений $'\zeta = 'w$, $\zeta_n = u_n + i\psi(w)$, здесь $'\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n-1})$, $'w = (w_1, w_2, \cdots, w_{n-1})$ и $w = ('w, u_n) \in \alpha$. Функция $\psi(w)$ дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности W точки 0 плоскости α, $z^{\pm} = (0, 0, \cdots, 0, iy_n^{\pm})$.

Поверхность ∂D является поверхностью Ляпунова с показателем Гельдера равным 1, значит, справедливы следующие оценки (см. [11], стр. 314—317, [15], стр. 16—19)*:

$$|\psi(w)| \leqslant C|w|^2, \ w \in W, \tag{7}$$

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial x_j}\right| \leqslant C|w|, \ j = 1, 2, \cdots, n, \ \left|\frac{\partial \psi}{\partial y_j}\right| \leqslant C|w|, \ j = 1, 2, \cdots, n-1,$$

здесь $z_j = x_j + iy_j$.

Отсюда следует, что

$$\left|\frac{\partial \rho}{\partial z_k}\right| \leqslant C_1|w|, \ \left|\frac{\partial \rho}{\partial \bar{z}_k}\right| \leqslant C_1|w|, \ w \in W, \tag{8}$$

$k = 1, 2, \cdots, n-1$, так как

$$\frac{\partial \psi}{\partial z_j} = -\frac{\partial \rho}{\partial z_j} : \frac{\partial \rho}{\partial y_n} \ \text{и} \ \left|\frac{\partial \rho}{\partial y_n}\right| \leqslant C_2 \quad \text{при} \quad w \in W,$$

причем константы не зависят от рассматриваемой точки. Далее

$$|\zeta(w)| \leqslant C_3|w|. \tag{9}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем в плоскости α шар B с центром в 0 и выберем $a > 0$ так, чтобы:

---

* В [11], [15] эти оценки приводятся для пространства R^3, но они легко переносятся и на R^n при $n > 3$.

1) $B \subset W$,

2) $|F(\zeta(w))| < \varepsilon$ при $w \in B$,

3) $B \times [-a, a] \subset U$,

4) $C(2|y_n| + C|w|^2) \leqslant d < 1$ для $|y_n| < a$ и $w \in B$.

Пусть $z = z$, справедливо тождество $|\zeta(w) - z|^2 = |w|^2 + (y_n - \psi(w))^2$. Отсюда

$$\frac{1}{|\zeta - z|^2} = \frac{1}{|w - z|^2} \frac{1}{1 - \dfrac{2\psi y_n - \psi^2}{|w - z|^2}},$$

но

$$\frac{|2\psi y_n - \psi^2|}{|w - z|^2} \leqslant \frac{C|w|^2(2|y_n| + C|w|^2)}{|w|^2 + y_n^2} \leqslant$$

$$\leqslant C(2|y_n| + C|w|^2) \leqslant d < 1.$$

Следовательно

$$\frac{1}{1 - \dfrac{2\psi y_n - \psi^2}{|w - z|^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\psi y_n - \psi^2)^k}{|w - z|^{2k}} = 1 + \frac{2\psi y_n - \psi^2}{|w - z|^2} h(w, z),$$

где $h(w, z)$ равномерно ограничена для $w \in B$, $|y_n| \leqslant a$.

Поэтому

$$\frac{1}{|\zeta - z|^{2n}} = \frac{1}{|w - z|^{2n}}\left(1 + \frac{2\psi y_n - \psi^2}{|w - z|^2} h_1\right), \tag{10}$$

$$\frac{1}{|\zeta - z|^{2n+2}} = \frac{1}{|w - z|^{2n+2}}\left(1 + \frac{2\psi y_n - \psi^2}{|w - z|^2} h_2\right) \tag{11}$$

и функции h_1, h_2 равномерно ограничены при $w \in B$, $|y_n| \leqslant a$.

Оценим интеграл J_1 по части поверхности ∂D, соответствующей шару B, т. е. интеграл J_1^B. Используя (10) и (7), получим

$$\left|\frac{1}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{1}{|\zeta - z^-|^{2n}}\right| \leqslant 2\frac{|2\psi y_n^+ - \psi^2|}{|w - z^+|^{2n+2}} |h_1| \leqslant C_4 \frac{2|y_n^+| + C|w|^2}{(|w|^2 + y_n^{+2})^n}.$$

Далее, учитывая, что $d\sigma \leqslant d_1 ds$, где ds — элемент плоскости α

$$|J_1^B| \leqslant \varepsilon C_5 \int\limits_B \frac{2|y_n^+| + C|w|^2}{(|w|^2 + y_n^{+2})^n} ds \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon C_5 \left(2 \int\limits_{R^{2n-1}} \frac{|y_n^+| ds}{(|w|^2 + y_n^{+2})^n} + C \int\limits_B \frac{ds}{(|w|^2 + y_n^{+2})^{n-1}}\right).$$

Первый интеграл есть интеграл Пуассона для полупространства (см., например, [16], стр. 75) и не зависит от y_n^+, а второй интеграл непрерывен в точке 0. Поэтому

$$|J_1^B| \leqslant \varepsilon m,$$

где m не зависит от рассматриваемой точки и функции F.

Интеграл J_1 по оставшейся части границы, очевидно, может быть сделан как угодно малым при $z^{\pm} \to 0$.

Легко проверить, что после унитарного преобразования и сдвига вид интеграла J_2 не изменится. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\rho(0)}{\partial z_k}(\zeta_k - z_k)\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial\bar\zeta_m}(\bar\zeta_m - \bar z_m) =$$

$$= i(\zeta_n - z_n)\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial\rho}{\partial\bar\zeta_m}(\bar\zeta_m - \bar z_m) = i(\zeta_n - z_n)\sum_{m=1}^{n-1} \frac{\partial\rho}{\partial\bar\zeta_m}\bar\zeta_m +$$

$$+ i\frac{\partial\rho}{\partial\bar\zeta_n}(u_n^2 + \psi^2 + y_n^2 - 2\psi y_n).$$

Интеграл J_2 по части поверхности ∂D, соответствующей шару B, разобъется на три интеграла

$$J_2^1 = \frac{-2in!}{\pi^n}\int_B F(\zeta(w))\frac{2\psi y_n^+\frac{\partial\rho}{\partial\bar\zeta_n} + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{\partial\rho}{\partial\bar\zeta_m}\bar\zeta_m y_n^+}{|w - z^+|^{2n+2}}\,d\sigma',$$

$$J_2^{\pm} = \pm\frac{in!}{\pi^n}\int_B F(\zeta(w))\frac{\frac{\partial\rho}{\partial\bar\zeta_n}(u_n^2 + \psi^2 + y_n^{\pm 2} - 2\psi y_n^{\pm}) + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{\partial\rho}{\partial\bar\zeta_m}\bar\zeta_m(\zeta_n - z_n^{\pm})}{|w - z^+|^{2n+4}} \times$$

$$\times (2\psi y_n^{\pm} - \psi^2)\,h_2\,d\sigma',\quad d\sigma' = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\psi^2}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\psi^2}{\partial y_j}}\,ds.$$

Каждый из этих интегралов, используя (7) — (9) и (11), можно оценить так же, как J_1^B.

Доказательство леммы 2*. Так как $H_F^{\pm} = H_{F+C}^{\pm}$, то можно считать, что $F(z^0) = 0$. Так же, как в лемме 1 сделаем унитарное преобразование и сдвиг. Получим, что ∂D в окрестности нуля будет задаваться системой уравнений

$$'\zeta = {}'w,\quad \zeta_n = u_n + i\psi(w)$$

(мы придерживаемся обозначений леммы 1). Причем $\psi(w)$ — непрерывно дифференцируемая в окрестности W точки 0 плоскости z и $\psi(w) = o(|w|)$.

---

* Это доказательство аналогично доказательству теоремы 2 в [10] (см. также [1], § 2).

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем в плоскости π шар B с центром в 0, такой, что:

1) $B \subset W$,

2) $|F(\zeta(w))| < \varepsilon$ при $w \in B$,

3) $|w - z^+| \leqslant C|\zeta(w) - z^+|$ для $w \in B$.

Условие 3) обеспечивается соотношениями

$$|w - \zeta(w)| = |\psi(w)| = o(|w|),$$

$$|w - z^+| \leqslant |w - \zeta(w)| + |\zeta(w) - z^+| = |\psi(w)| + |\zeta - z^+|.$$

Пусть $B' = \{\zeta \in \partial D\colon \zeta = \zeta(w),\ w \in B\}$.

В силу условия 3), наложенного при выборе шара B, и неравенства $|\zeta(w)| \leqslant C_1|w| \leqslant C_1|w - z^+|$

$$\left|\frac{\bar\zeta_k}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{\bar\zeta_k}{|\zeta - z^-|^{2n}}\right| = \frac{||\zeta - z^+| - |\zeta - z^-||}{|\zeta - z^+|\,|\zeta - z^-|}\sum_{j=0}^{2n-1}\frac{|\zeta_k|}{|\zeta - z^+|^j\,|\zeta - z^-|^{2n-j-1}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 C^{2n+1}\frac{2(2n-1)|z^+|}{|w - z^+|^{2n}}. \tag{12}$$

Точно также

$$\left|\frac{\bar z_k^+}{|\zeta - z^+|^{2n}} - \frac{\bar z_k^-}{|\zeta - z^-|^{2n}}\right| \leqslant d\,\frac{|z^+|}{|w - z^+|^{2n}}. \tag{13}$$

Наконец,

$$d\sigma \leqslant d_1\,ds. \tag{14}$$

Теперь из условия 2), наложенного при выборе шара B и из (12)—(14) получим, что

$$\left|\int_{B'} F(\zeta)\,[dg(\zeta, z^+)\wedge d\bar\zeta[k, m]\wedge d\zeta - dg(\zeta, z^-)\wedge d\bar\zeta[k, m]\wedge d\zeta]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon d_2\int_B\frac{|y_n^+|\,ds}{(|w|^2 + y_n^{+2})^n} \leqslant \varepsilon d_3,$$

причем d_3 не зависит от рассматриваемой точки и функции F.

Так же, как в лемме 1, вторая часть леммы 2 следует из первой.

Институт физики
им. Л. В. Киренского
СО АН СССР

Поступила 26. IV. 1977

Ա. Մ. ԿԻՏՄԱՆՈՎ, Լ. Ա. ԱՅԶԵՆԲԵՐԳ. Մարտինելի-Բոխների ինտեգրալով ներկայացվող անընդհատ ֆունկցիաների հոլոմորֆության մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ անընդհատ ֆունկցիան, որը ներկայացվում է Մարտինելի-Բոխների ինտեգրալով սահմանափակ $D \subset C^n$ *տիրույթում, հոլոմորֆ է այդ տիրույթում*

հետևյալ ամեն մի դեպքերում. ա) եզր ∂D-ն պատկանում է $C^{(2)}$ դասին, բ) $n=2$, եզր ∂D-ն կապակցված է և պատկանում է $C^{(1)}$-ին։ Բերվում է հայտանիշ տիրույթի եզրի վրա տրված f ֆունկցիան այդ տիրույթում հոլոմորֆ շարունակվելու համար։ Այդպիսի շարունակության գոյության համար ինչպես ա), այնպես էլ բ) դեպքում f ֆունկցիան պետք է լինի օրթոգոնալ Մարտինելլի-Բոխների $U(\zeta, z)$ կորիզներին, երբ $z \in \overline{D}$.

A. M. KYTMANOV, L. A. AIZENBERG. *About holomorphness of continuous functions, representable by the Martinelli-Bochner integral* (summary)

In this paper we prove that continuous function, representable in bounded domain $D \subset C^n$ by the Martinelli-Bochner integral, is holomorphic in this domain the following cases; a) boundary ∂D belongs to the class C^2, b) $n=2$, the boundary ∂D is connected and belongs to the class C^1.

A criterion of existence of holomorphic continuation of continuous function f from ∂D in to D is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Айзенберг, Ш. А. Даутов.* Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства, Новосибирск, Изд. „Наука", Сибирское отделение, 1975.
2. *А. М. Аронов.* О функциях, представимых интегралом Мартинелли—Бохнера, сб. „Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных", Красноярск, 1973, 35—39.
3. *А. М. Аронов, А. М. Кытминов.* О голоморфности функций, представимых интегралом Мартинелли—Бохнера, Функциональный анализ и его прил., 9, № 3, 1975, 83—84.
4. *В. С. Виноградов.* Об аналоге интеграла типа Коши для аналитических функций многих комплексных переменных, ДАН СССР, 178, № 2, 1968, 283—285.
5. *В. А. Байков.* Об одной граничной теореме для голоморфных функций двух комплексных переменных, УМН, 24, № 5, 1969, 221—222.
6. *B. Weinstock.* Continuous boundary values of analytic functions of several complex variables, Proc. Amer. Math. Soc., 11, № 2, 1969, 463—466.
7. *А. М. Аронов, Ш. А. Даутов.* Об одном результате Б. Вайнстока, сб. „Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных", Красноярск, 1973, 193—195.
8. *С. Л. Соболев.* Введение в теорию кубатурных формул, М., Изд. „Наука", 1974.
9. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
10. *Ш. А. Даутов, А. М. Кытманов.* О граничных свойствах интеграла типа Мартинелли—Бохнера, сб. „Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных", Красноярск, 1973, 49—54.
11. *В. С. Владимиров.* Уравнения математической физики, М., Изд. „Наука", 1967.
12. *Е. А. Волков.* О границах подобластей, весовых классах Гельдера и решении в этих классах уравнения Пуассона, Труды матем. института им. Стеклова, 117, М., „Наука", 1972, 75—99.
13. *Н. Ю. Горенский.* Некоторые приложения дифференциальных свойств функции расстояния до открытых множеств в C^n, сб. „Некоторые свойства голоморфных функций многих комплексных переменных", Красноярск, 1973, 203—208.
14. *А. М. Ляпунов.* Собрание сочинений, т. 1, М., Изд. АН СССР, 1954.
15. *Л. Н. Сретенский.* Теория ньютоновского потенциала, М.—Л. Гостехиздат, 1946.
16. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., Изд. „Мир", 1973.