

М. Д. ДАВТЯН

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ БЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ДЛЯ ОБОЛОЧКИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Рассмотрим тонкую упругую оболочку $D = \Gamma \times [0, T]$ со срединной поверхностью Γ . Пусть оболочка имеет два края Γ_1 и Γ_2 , диффеоморфные окружности.

Введем следующие обозначения:

$U = (u, v, w)$ — вектор смещений,

$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \omega \\ \omega & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ — тензор деформаций,

$T = \begin{pmatrix} T_1 & s \\ s & T_2 \end{pmatrix}$ — тензор напряжений.

Как известно (см. [1]) тензоры деформаций и напряжений связаны следующими соотношениями:

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{2Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1), \quad s = \frac{Eh}{1+\nu} \omega \quad (1)$$

или сокращенно, если записать T и ε в виде векторов

$$T = F\varepsilon, \quad (2)$$

где F — положительно определенная матрица.

В (1) h — толщина оболочки, E, ν — упругие постоянные, характеризующие материал оболочки.

Если в качестве координатных линий на поверхности D принять линии кривизны, то между U и ε имеет место следующее соотношение (см. [1])

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v - \frac{w}{R_1}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u - \frac{w}{R_2}, \\ \omega &= \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\varepsilon = LU, \quad (4)$$

где через L обозначен оператор, определяемый уравнениями (3). В (3) $A(\alpha, \beta)$ и $B(\alpha, \beta)$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности L , а $R_1(\alpha, \beta)$ и $R_2(\alpha, \beta)$ — главные кривизны поверхности D .

Мы будем рассматривать случай, когда радиусы кривизны R_1 и R_2 имеют разные знаки: $R_1 R_2 < 0$, т. е. случай поверхности отрицательной кривизны. Исключим, например, w из второго уравнения системы (3) и подставим в первое уравнение. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} w &= \frac{R_2}{B_1} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{R_2}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u - R_2 \varepsilon_2, \\ \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{R_2}{R_1 B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v - \frac{R_2}{R_1 AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u &= \varepsilon_1 - \frac{R_2}{R_1} \varepsilon_2, \\ \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{B} \right) &= w. \end{aligned} \quad (5)$$

Покажем, что в случае поверхности отрицательной кривизны, последние два уравнения системы (5) при заданных ε_1 и ε_2 образуют гиперболическую систему относительно u и v . Действительно, характеристический определитель этой системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{A} \xi_1 - \frac{R_2}{R_1 B} \xi_2 & \\ \frac{1}{B} \xi_2 & \frac{1}{A} \xi_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{A^2} \xi_1^2 + \frac{R_2}{R_1 B^2} \xi_2^2.$$

Следовательно, если $\frac{R_2}{R_1} < 0$, то определитель имеет два действительных и различных корня, т. е. система гиперболическая. Система уравнений безмоментной теории оболочек имеет следующий вид (см. [1]):

$$L^* FLU = \Phi, \quad (6)$$

где $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ — вектор внешних сил, L^* — формально сопряженный к L оператор, т. е.

$$(LU, V) = (U, L^* V) \quad (6')$$

для любых бесконечно дифференцируемых векторов U и V , обращающихся в нуль на Γ_1 и Γ_2 . Скалярное произведение в (6') имеет вид

$$(f, g) = \iint (f_1 \bar{g}_1 + f_2 \bar{g}_2 + f_3 \bar{g}_3) A(\alpha, \beta) B(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

и эквивалентно, очевидно, обычному скалярному произведению в $L_2 = H_0$.

Здесь мы докажем однозначную разрешимость системы (6) при граничных условиях

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad v|_{\Gamma_1} = 0, \quad (7)$$

$$u|_{\Gamma_2} = 0, \quad v|_{\Gamma_2} = 0. \quad (8)$$

Граничные условия (7), (8) означают, что оболочка жестко закреплена на краях Γ_1 и Γ_2 .

Для доказательства однозначной разрешимости краевой задачи (6), (7), (8) применим метод эллиптической регуляризации (см. [3], [4]). Рассмотрим следующую эллиптическую систему уравнений второго порядка:

$$L^*FLU - h\Delta_1 U = \Phi, \quad (9)$$

где $h > 0$, $\Delta_1 U = (\Delta_1 u, \Delta_1 v, \Delta_1 w)$, $\Delta_1 = \frac{1}{AB} \Delta$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ оператор Лапласа. Добавим к (7), (8) следующие граничные условия:

$$w|_{\Gamma_1} = 0, \quad w|_{\Gamma_2} = 0. \quad (10)$$

Краевая задача Дирихле (7), (8), (10) для эллиптической системы (9) однозначно разрешима и имеет гладкое решение U_h , если только правые части достаточно гладкие.

Мы получим для U_h оценку, не зависящую от h , а затем перейдем к пределу при $h \rightarrow 0$.

Предварительно введем некоторые пространства функций. Пусть $r \geq 0$ — целое. Обозначим через $H_r(\Gamma)$ — пространство Соболева функций с нормой

$$[u]_r^2 = \sum_{k=0}^r \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \right|^2 dx. \quad (11)$$

Пространство $B_s(D)$ определим как замыкание функций $u(x, t)$ класса C^∞ на $D(x \in \Gamma, t \in [0, T])$ по норме

$$\|u(x, t)\|_s = \sum_{k=0}^s \max [D_t^k u(x, t)]_{s-k}, \quad (12)$$

где $s \geq 0$ — целое, $[v]_r$ — норма в $H_r(\Gamma)$. $H_s(D)$ — пространство Соболева функций $u(x, t)$, заданных на области D с нормой

$$\|u(x, t)\|_s^2 = \sum_{k_1+k_2=0}^s \int_0^T \int_{\Gamma} |D_x^{k_1} D_t^{k_2} u(x, t)|^2 dx dt, \quad (13)$$

где $s \geq 0$ — целое.

Пространство $H_s(D)$ является подпространством $H_s(D)$, которое получается в результате замыкания по норме (13) функций класса C^∞ на $\bar{D}$, равных нулю в окрестности $t = 0$ для всех $x \in \Gamma$. Аналогично, пространство $B_s(D)$ является подпространством $B_s(D)$, полученное в результате замыкания по норме (12) функций класса C^∞ на $\bar{D}$, равных нулю в окрестности $t = 0$ для всех $x \in \Gamma$.

Имеем

$$L^*FLU_h - h\Delta_1 U_h = \Phi \quad (14)$$

и

$$U_h|_{\Gamma_1} = 0, \quad U_h|_{\Gamma_2} = 0. \quad (15)$$

Умножим (14) скалярно на U_h

$$(L^*FLU_h, U_h) - h(\Delta_1 U_h, U_h) = (\Phi, U_h). \quad (16)$$

Проинтегрируем в (16) один раз по частям. В силу (15) внеинтегральные члены пропадут. Получим

$$(FLU_h, LU_h) + h\left(\frac{\partial U_h}{\partial x}, \frac{\partial U_h}{\partial x}\right) + h\left(\frac{\partial U_h}{\partial \beta}, \frac{\partial U_h}{\partial \beta}\right) = (\Phi, U_h). \quad (17)$$

Так как матрица F положительно определенная, то

$$(FLU_h, LU_h) \geq c(LU_h, LU_h) = c\|LU_h\|_0^2.$$

Далее, второе и третье слагаемые в (17), очевидно, неотрицательные. Следовательно

$$c\|LU_h\|_0^2 \leq (\Phi, U_h). \quad (18)$$

Докажем справедливость следующей оценки:

$$\|u_h\|_0 + \|v_h\|_0 + \|w_h\|_{-1} \leq c_1 \|LU_h\|_0. \quad (19)$$

В (19) $\|u_h\|_0, \|v_h\|_0$ — нормы в $B_0(D)$, а $\|w_h\|_{-1}$ — норма в пространстве Соболева $H_{-1}(D)$. Пространство $H_{-1}(D)$ можно определить, например, как пространство линейных непрерывных функционалов над $H_1(D)$ со следующей нормой:

$$\|w\|_{-1} = \sup_{g \in \dot{H}_1(D)} \frac{|(w, g)|}{\|g\|_1}.$$

Из определения нормы $\|w\|_{-1}$ вытекает следующее неравенство:

$$|(w, g)| \leq \|g\|_1 \|w\|_{-1}, \quad (20)$$

справедливое для любых $w \in H_{-1}(D)$, $g \in \dot{H}_1(D)$.

Обозначим компоненты вектора LU_h через $\varepsilon_{1h}, \varepsilon_{2h}, w_h$. В силу (5) имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \frac{\partial u_h}{\partial x} - \frac{R_2}{R_1 B} \frac{\partial v_h}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} v_h - \frac{R_2}{R_1 AB} \frac{\partial B}{\partial x} u_h &= f_{1h}, \\ \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u_h}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_h}{B} \right) &= w_h, \end{aligned} \quad (21)$$

причем

$$f_{1h} = \varepsilon_{1h} - \frac{R_2}{R_1} \varepsilon_{2h}, \quad (22)$$

$$w_h = \frac{R_2}{B} \frac{\partial v_h}{\partial \beta} + \frac{R_2}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} u_h - R_2 \varepsilon_{1h}. \quad (23)$$

Система (21) представляет собой систему двух гиперболических уравнений. Следовательно, так как $u_h|_{\Gamma_1} = 0$ и $v_h|_{\Gamma_1} = 0$, то по теореме об однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболических уравнений (см., например, [2]) имеет место оценка

$$\|u_h\|_0 + \|v_h\|_0 \leq c (\|f_{1h}\|_0 + \|w_h\|_0). \quad (24)$$

Далее, из (22) имеем

$$\|f_{1h}\|_0 \leq \|\varepsilon_{1h}\|_0 + c \|\varepsilon_{2h}\|_0. \quad (25)$$

Следовательно, из (24) и (25) получим

$$\|u_h\|_0 + \|v_h\|_0 \leq c (\|\varepsilon_{1h}\|_0 + \|\varepsilon_{2h}\|_0 + \|w_h\|_0). \quad (26)$$

Далее, из (23) имеем

$$\|w_h\|_{-1} \leq c \left(\left\| \frac{\partial v_h}{\partial \beta} \right\|_{-1} + \|u_h\|_{-1} + \|\varepsilon_{2h}\|_{-1} \right).$$

Так как

$$\|u_h\|_{-1} \leq c \|u_h\|_0 \leq c \|u_h\|_0,$$

$$\|\varepsilon_{2h}\|_{-1} \leq c \|\varepsilon_{2h}\|_0,$$

$$\left\| \frac{\partial v_h}{\partial \beta} \right\|_{-1} \leq c \|v_h\|_0 \leq c \|v_h\|_0,$$

то используя (26), получим

$$\|w_h\|_{-1} \leq c (\|v_h\|_0 + \|u_h\|_0 + \|\varepsilon_{2h}\|_0) \leq c_1 (\|\varepsilon_{1h}\|_0 + \|\varepsilon_{2h}\|_0 + \|w_h\|_0). \quad (27)$$

Таким образом, из (26), (27) вытекает оценка (19). Далее в силу (20) и неравенства Коши-Буняковского

$$|(\Phi, U_h)| \leq \|\Phi_1\|_0 \|u_h\|_0 + \|\Phi_2\|_0 \|v_h\|_0 + \|\Phi_3\|_1 \|w_h\|_{-1}. \quad (28)$$

При выводе (28) предполагалось, что $\Phi_3 \in H_1(D)$. Из (28) при сколь угодно малом α имеем

$$|(\Phi, U_h)| \leq \alpha (\|u_h\|_0 + \|v_h\|_0 + \|w_h\|_{-1})^2 + c_\alpha (\|\Phi_1\|_0 + \|\Phi_2\|_0 + \|\Phi_3\|_1)^2. \quad (29)$$

Таким образом, объединяя (18), (19) и (29), получим

$$(\|u_h\|_0 + \|v_h\|_0 + \|w_h\|_{-1})^2 \leq c^2 \alpha (\|u_h\|_0 + \|v_h\|_0 + \|w_h\|_{-1})^2 + c_\alpha (\|\Phi_1\|_0 + \|\Phi_2\|_0 + \|\Phi_3\|_1)^2.$$

Так как α может быть выбрано достаточно малым, то окончательно получим следующую оценку:

$$\|u_h\|_0 + \|v_h\|_0 + \|w_h\|_{-1} \leq c (\|\Phi_1\|_0 + \|\Phi_2\|_0 + \|\Phi_3\|_1). \quad (30)$$

Кроме того, из (29) и (19) вытекает неравенство

$$|(\Phi, U_h)| \leq \alpha c_1^2 \|LU_h\|_0^2 + c_\alpha (\|\Phi_1\|_0 + \|\Phi_2\|_0 + \|\Phi_3\|_1)^2. \quad (31)$$

Следовательно, так как α мало, то из (18) и (31) имеем

$$\|LU_h\|_0 \leq c (\|\Phi_1\|_0 + \|\Phi_2\|_0 + \|\Phi_3\|_1). \quad (32)$$

Обозначим через H_L — гильбертово пространство, полученное пополнением гладких векторов, равных нулю на Γ_1 и Γ_2 , по норме $\|LU\|_0$.

Отметим, что в силу неравенства (19), функции u и v из H_L принадлежат также $B_0(D)$ и, следовательно, удовлетворяют граничным условиям (7) и (8).

В силу (32) последовательность U_h ограничена в пространстве H_L и, следовательно, слабо компактна. Поэтому из нее можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность, которую мы для простоты, снова обозначим через U_h . Пусть U_h слабо сходится к некоторому вектору U_0 из H_L . Если теперь (14) умножить скалярно на вектор $\varphi \in C_0^\infty(D)$, перейти к пределу при $h \rightarrow 0$, то получим, что вектор U_0 является обобщенным решением уравнения (6)

$$L^*FLU_0 = \Phi.$$

Единственность решения следует из неравенства (32). Таким образом, доказана следующая

Теорема. Пусть D — оболочка отрицательной кривизны. Тогда для любых $\Phi_1 \in H_0(D)$, $\Phi_2 \in H_0(D)$, $\Phi_3 \in H_1(D)$ существует единственное решение $u \in B_0(D)$, $v \in B_0(D)$, $w \in H_{-1}(D)$, u и v удовлетворяют граничным условиям (7), (8).

Замечание. Отметим, что для системы (6) уравнений безмоментной теории оболочек существует естественная эллиптическая регуляризация, а именно, система уравнений моментной теории оболочек. Однако, так как способ эллиптической регуляризации не отражается на окончательном результате, то мы остановились на эллиптической регуляризации вида (9).

Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 25.VI.1977

Մ. Դ. ԴԱՎԵՅԱՆ. Բացասական կորություն ունեցող թաղանթների համար՝ ոչ մոմենտային թաղանթների տեսության եզրային խնդրի լուծման գոյության և միակության բեռնման (ամփոփում)

Դիտարկվում է նուրբ առաձգական թաղանթ, շրջանագծին դիֆեոմորֆ Γ_1 և Γ_2 եզրերով և $D = \Gamma \times [0, 1]$ միջին մակերևույթով:

Ինքադրվում է, որ թաղանթն ունի բացասական կորություն և կոշտ ամրացված է եզրերում:

Էլիպտիկ ռեգուլյարիզացիայի մեթոդով ապացուցված է եզրային խնդրի միարժեք լուծելիությունը:

M. D. DAVTIAN. Existence and uniqueness theorem for solution of boundary problem in the moment free theory of shells for the shells of negative curvature (summary)

A thin elastic shell with mean surface $D = \Gamma \times [0, T]$, having two edges Γ_1 , Γ_2 , diffeomorph to the circle, is considered.

It is supposed, that the shell has negative curvature and is rigidly fastened at the edges.

By the method of elliptic regularization the uniqueness of the solution of the boundary value problem is proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Л. Гольденвейзер. Теория упругих тонких оболочек, М., Гостехиздат, 1953.
2. Л. Гордины. Задача Коши для гиперболических уравнений, И.И.Л., 1961.
3. О. А. Олейник и Е. В. Радкевич. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой, ВИНТИ, сер. „Итоги науки“, Мат. анализ, 1971.
4. М. Д. Делян. Общие краевые задачи для гиперболических уравнений высших порядков с двойными характеристиками, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика“, IX, № 4, 1974, 269–284.