

В. А. ЯВРЯН

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящей заметке уточняются результаты работы И. Вайдмана [1]. При доказательстве полученных оценок существенную роль играют следующие теоремы М. Г. Крейна ([2], стр. 240, 256).

Теорема I. Пусть $A = A_R + iA_I$ — вольтерров оператор, A_R и A_I — самосопряженные операторы и $A_I \in S_1$, где S_1 — пространство ядерных операторов. Тогда

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_+(r, A_R)}{r} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_-(r, A_R)}{r} = \frac{1}{\pi} \inf \sum_{j=1}^n |\Delta P_j A_I \Delta P_j|_1. \quad (1)$$

Здесь $n_+(r, B)$ и $n_-(r, B)$ означают соответственно количество характеристических чисел оператора B в интервалах $[0, r]$ и $[-r, 0]$, $|B|_1$ — ядерная норма оператора B , $\{P_j\}$ — любая максимальная собственная цепочка оператора A , а нижняя грань в правой части формулы (1) берется по всему множеству разбиений $0 = P_0 < P_1 < \dots < P_n$ ($P_j \in |P|$) цепочки $\{P\}$, $\Delta P_j = P_j - P_{j-1}$.

Теорема II. Пусть $A = A_R + iA_I$ — вольтерров оператор с конечномерной мнимой компонентой A_I . Если отрицательные характеристические числа $\alpha_j(A_R)$ оператора A_R удовлетворяют условию

$$\sum_{\alpha_j < 0} \frac{1}{\sqrt{\alpha_j(A_R)}} < +\infty,$$

то для его положительных характеристических чисел существует конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_+(r, A_R)}{\sqrt{r}}. \quad (2)$$

В частности, если A_R имеет только конечное число отрицательных собственных значений, то (2) будет иметь место.

В пространстве $L^2(a, b)$ ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$) рассмотрим интегральный оператор

$$(Gf)(x) = \int_a^b G(x, t) f(t) dt \quad (a \leq x \leq b), \quad (3)$$

где ядро $G(x, t)$ задается формулой:

$$G(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^p u_k(x) v_k(t), & x \leq t \\ \sum_{k=1}^p u_k(t) v_k(x), & x > t. \end{cases} \quad (4)$$

Предполагаем, что функции $u_k(x)$ и $v_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, p$) вещественны и принадлежат пространству $L^2(a, b)$. Легко проверяется, что оператор G принадлежит классу Гильберта-Шмидта.

Теорема 1. *Характеристические числа $\alpha_n(G)$ оператора G удовлетворяют соотношению*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\alpha_n(G)} = 0^*. \quad (5)$$

Если оператор G неотрицателен, то существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\alpha_n(G)}}. \quad (6)$$

Соотношение (5) было известно М. Г. Крейну и доказано им путем сведения интегрального уравнения к канонической системе с вырождающимся гамильтонианом. В случае $p=1$ оно приведено еще в [3]. В работе И. Вайдмана [1] вместо (5) установлено, что существует такое $M > 0$, что $M |\alpha_n(G)| \geq n$. Вместо соотношения (6) в [1] доказано только

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n(G)} < +\infty.$$

Очевидно, что из (6) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n(G)^{1/k+\varepsilon}} < +\infty.$$

Доказательство теоремы 1. Введем в рассмотрение вольтерров оператор

$$(Kf)(x) = \int_a^x \sum_{k=1}^p (u_k(t) v_k(x) - u_k(x) v_k(t)) f(t) dt \quad (a < x < b).$$

Обозначим через K_R и K_I соответственно вещественную и мнимую части оператора K . Легко видеть, что

$$(K_I f)(x) = -\frac{1}{2i} \sum_{k=1}^p \left(u_k(x) \int_a^b v_k(t) f(t) dt - v_k(x) \int_a^b u_k(t) f(t) dt \right).$$

* Если оператор имеет лишь конечное число, скажем N , отличных от нуля собственных значений, то мы полагаем, что $1/\alpha_n(G) = 0$ при $n > N$.

Очевидно, что семейство ортогональных проекторов

$$(P_t f)(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x \leq t \\ f(x), & t < x \leq b, \end{cases} \quad P_a = I, \quad P_b = 0 \quad (a < t < b) \quad (7)$$

служит собственной максимальной цепочкой для оператора K . Мы должны показать, что правая часть (1) для оператора K равна нулю. Заметим, что достаточно рассмотреть случай, когда оператор K имеет вид:

$$(K_J f)(x) = -\frac{1}{2i} \left(u(x) \int_a^b v(t) f(t) dt - v(x) \int_a^b u(t) f(t) dt \right).$$

Так как K_J — двумерный оператор, то

$$|\Delta P_J K_J \Delta P_J|_1 \leq 2 |\Delta P_J K_J \Delta P_J| = 2 \sup |(\Delta P_J K_J \Delta P_J f, f): |f|=1|. \quad (8)$$

Из того, что функции $u_k(x)$ и $v_k(x)$ принадлежат $L^2(a, b)$, следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют ступенчатые функции $\bar{u}(x)$ и $\bar{v}(x)$, такие, что

$$|u - \bar{u}| < \varepsilon, \quad |v - \bar{v}| < \varepsilon, \quad |\bar{u}| \leq 2|u|, \quad |\bar{v}| \leq 2|v|.$$

Пусть функции $\bar{u}(x)$ и $\bar{v}(x)$ постоянны в интервалах $\Delta_j = [x_{j-1}, x_j]$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Рассмотрим разбиение $P_0 > P_1 > \dots > P_n$ цепочки (7), где $P_k = P_{x_k}$ и оценим правую часть (1). Из (8) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |\Delta P_J K_J \Delta P_J|_1 &\leq \sum_{j=1}^n \sup_{|f|=1} |(\Delta P_J f, v)(\Delta P_J u, f) - (\Delta P_J f, u)(\Delta P_J v, f)| = \\ &= \sum_{j=1}^n \sup_{|f|=1} |(\Delta P_J f, v - \bar{v})(\Delta P_J (u - \bar{u}), f) + (\Delta P_J f, v - \bar{v})(\Delta P_J \bar{u}, f) + \\ &\quad + (\Delta P_J f, \bar{v})(\Delta P_J (u - \bar{u}), f) - (\Delta P_J f, u - \bar{u})(\Delta P_J (v - \bar{v}), f) - \\ &\quad - (\Delta P_J f, u - \bar{u})(\Delta P_J \bar{v}, f) - (\Delta P_J \bar{u})(\Delta P_J (v - \bar{v}), f)|. \end{aligned}$$

Здесь учитывалось, что

$$(\Delta P_J f, \bar{v})(\Delta P_J \bar{u}, f) - (\Delta P_J f, \bar{u})(\Delta P_J \bar{v}, f) = 0.$$

Оценим теперь каждое слагаемое в отдельности. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |(\Delta P_J f, v - \bar{v})(\Delta P_J (u - \bar{u}), f)| &\leq |f|^2 \sum_{j=1}^n |\Delta P_J (v - \bar{v})| |\Delta P_J (u - \bar{u})| \leq \\ &\leq |f|^2 \left(\sum_{j=1}^n |\Delta P_J (v - \bar{v})|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n |\Delta P_J (u - \bar{u})|^2 \right)^{1/2} = |f|^2 |v - \bar{v}|^2 |u - \bar{u}|^2 \leq \varepsilon^2 |f|^2. \end{aligned}$$

Для второго слагаемого получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |(\Delta P_j f, u - \bar{u})(\Delta P_j \bar{u}, f)| &\leq |f|^2 \sum_{j=1}^n |\Delta P_j (u - \bar{u})| |\Delta P_j \bar{u}| \leq \\ &\leq |f|^2 |u - \bar{u}| |\bar{u}| \leq 2\varepsilon |u| |f|^2. \end{aligned}$$

Таким же образом оцениваются и остальные слагаемые. В результате получаем

$$\sum_{j=1}^n |\Delta P_j K_j \Delta P_j|_1 \leq 2\varepsilon (\varepsilon + 2|u| + 2|v|).$$

Следовательно, согласно теореме 1 для вещественной части K_R оператора K справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_+(r, K_R)}{r} = 0.$$

Так как оператор $K_R - G$ — конечномерный, а именно $2p$ -мерный оператор

$$(K_R f - Gf)(x) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \left(v_k(x) \int_a^b u_k(t) f(t) dt + u_k(x) \int_a^b v_k(t) f(t) dt \right),$$

то, если оператор G , а следовательно и оператор K_R , имеет бесконечное число положительных (отрицательных) характеристических чисел, по известным неравенствам Куранта (см. [4], стр. 258) будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha_{n-2p}^+(K_R) &\leq \alpha_n^+(G) \leq \alpha_{n+2p}^+(K_R), \\ \alpha_{n+2p}^-(K_R) &\leq \alpha_n^-(G) \leq \alpha_{n-2p}^-(K_R). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n_-(r, G)}{r} = 0,$$

т. е. имеет место (5).

Если оператор G неотрицателен, то K_R будет иметь только конечное число отрицательных характеристических чисел, а следовательно, по теореме II, будет выполняться соотношение (6).

2. Пусть теперь ядро интегрального оператора G имеет более общий вид:

$$R(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^m u_k^{(1)}(x) v_k^{(1)}(t), & x \leq t \\ \sum_{k=1}^m u_k^{(2)}(x) v_k^{(2)}(t), & x \geq t, \end{cases} \quad (9)$$

где функции $u_k^{(i)}(x)$, $v_k^{(i)}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m$; $i = 1, 2$) принадлежат $L^2(a, b)$.

Теорема 2. Если $s_1(R) \geq s_2(R) \geq \dots \geq s_n(R) \dots$ — сингулярные числа оператора R , то существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n s_n(R).$$

Эта теорема уточняет результат Вайдмана [1], согласно которому последовательность $n s_n(R)$ ограничена.

Для простоты записи доказательство теоремы 2 мы проведем в случае, когда $m = 1$, т. е. ядро оператора R имеет вид:

$$R(x, t) = \begin{cases} u_1(x) v_1(t), & x \leq t \\ u_2(x) v_2(t), & x > t. \end{cases}$$

Легко подсчитать, что ядро оператора R^*R дается формулой:

$$\begin{aligned} (R^*R)(x, t) &= v_1(x) v_2(t)(w(x) - w(t)) + v_1(x) v_1(t) w_1(t) + \\ &+ v_2(x) w_2(x) v_2(t) \text{ при } t \leq x, \\ (R^*R)(x, t) &= (R^*R)(t, x), \end{aligned}$$

где

$$w(x) = \int_a^x u_1(y) u_2(y) dy, \quad w_1(x) = \int_a^x u_1^2(y) dy, \quad w_2(x) = \int_x^b u_2^2(y) dy.$$

Таким образом, ядро неотрицательного оператора R^*R имеет вид (4), где соответствующие функции, как легко видеть, принадлежат пространству $L^2(a, b)$. Таким образом, для оператора R^*R справедливо соотношение (6), т. е. существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n s_1(R)$.

В случае общего ядра (9) ядро R^*R снова будет иметь вид (4) с $d = 4m^2$.

Замечание. Как показывает доказательство соотношения (6) теоремы 1, оно распространяется и на тот случай, когда $G(x, t)$ p -парное эрмитово ядро, т. е.

$$\bar{G}(x, t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^p u_k(x) v_k(t), & x \leq t \\ \sum_{k=1}^p \overline{u_k(t)} \overline{v_k(x)}, & x > t. \end{cases} \quad (10)$$

Отметим, что роль вольтеррова оператора K будет играть оператор

$$(\bar{K}f)(x) = \int_a^x \sum_{k=1}^p (\overline{u_k(t)} \overline{v_k(x)} - u_k(x) v_k(t)) f(t) dt.$$

Следовательно, теорема 2 справедлива также в том случае, когда $u_k^{(i)}(x)$ и $v_k^{(i)}(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m$; $i = 1, 2$) — комплексные функции.

Что касается соотношения (5) теоремы 1, то имеет место следующая

Теорема 3. Для характеристических чисел интегрального оператора, порожденного p -парным эрмитовым ядром (10), справедливо соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \bar{G})}{r} = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left| \operatorname{Im} \sum_{k=1}^p u_k(x) \bar{v}_k(x) \right| dx.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 7.X.1977

Վ. Ա. ՅԱՎՐԻԱՆ. Որոշ ինտեգրալ օպերատորների սեփական արժեքների մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում է (4), (9) և (10) կորիզներով որոշված ինտեգրալ օպերատորների սեփական արժեքների վարքը: Ստացվում են թեորեմ 1—3-ում զրկված առնչություններ, որտեղ $\{s_n(G)\}_{n=1}^{\infty}$ -ը G օպերատորի խառակտերիստիկ թվերն են, իսկ $\{s_n(G)\}_{n=1}^{\infty}$ -ը նույն օպերատորի սինգուլյար թվերն են:

V. A. JAVRIAN. On the eigenvalues of some integral operators (summary)

The behaviour of characteristic number of integral operators with kernels having the form (4), (9) or (10), is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Weidmann. Verteilung der Eigenwerte für eine Klasse von Integraloperatoren in $L^2(a, b)$, Journal für reine und angew. Math., 276, 1975, 213—220.
2. М. Г. Крейн, И. Ц. Гохберг. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., Изд. „Наука“, 1965.
3. М. Г. Крейн. О неопределенном случае краевой задачи Штурма-Лиувилля в интервале $(0, \infty)$, Изв. АН СССР, сер. матем. 16, 1952, 292—324.
4. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу, М., ИИЛ, 1954.