ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

Р. В. АКОПЯН

К ТЕОРИИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ J-НЕОТРИЦАТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В этой работе обобщаются и уточняются некоторые результаты заметки [2].

Пусть H — гильбертово пространство, в котором наряду с обычным скалярным произведением (f, g) $(f, g \in H)$ введено индефинитное скалярное произведение

$$[f, g] = (Jf, g), \ J = P_+ - P_-,$$

где $P_\pm$ — взаимно дополнительные ортопроекторы в H.

Для любого линейного оператора A, действующего в плотной области определения $D(A)$, соответствующий J-сопряженный оператор однозначно определяется при помощи равенства

$$[Af, g] = [f, A^+ g], \ f \in D(A).$$

Оператор A называется J-самосопряженным, если $A^+ = A$. В дальнейшем под J-неотрицательным оператором понимается J-самосопряженный оператор, удовлетворяющий условию

$$[Af, f] \geqslant 0, \ f \in D(A).$$

Для J-неотрицательного оператора A, имеющего хотя бы одну регулярную точку в верхней полуплоскости, известно следующее спектральное разложение [1]

$$A = S + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda),$$

где $E(\lambda)$ — семейство J-ортогональных проекторов, определенных всюду, кроме точки $\lambda = 0$, причем $[E(\lambda) f, f]$ не возрастает при $\lambda < 0$ и не убывает при $\lambda > 0$, а S — J-неотрицательный ограниченный оператор такой, что

$$S^2 = 0, \ SE(\Delta) = E(\Delta) S = 0, \ 0 \overline{\in} \Delta.$$

Для резольвенты оператора A, на области определения $D(A)$ справедливо представление

$$(A - zI)^{-1} = -\frac{I}{z} - \frac{S}{z^2} + \frac{1}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(\lambda)}{\lambda - z} \ (\operatorname{Im} z \neq 0), \tag{1}$$

где $[F(\lambda) f, f]$ — локально суммируемая, неотрицательная функция.

1°. Спектральная функция $E(\lambda)$ J-неотрицательного оператора A называется регулярной в точке нуль, если существуют пределы

$$s-\lim_{\lambda\to-0} E(\lambda)=E(-0),\quad s-\lim_{\lambda\to+0} E(\lambda)=E(+0).$$

Регулярную в точке нуль спектральную функцию $E(\lambda)$ определяют в нуле, полагая $E(0)=E(-0)$.

Спектральная функция $E(\lambda)$ J-неотрицательного оператора A называется регулярной на бесконечности, если существуют пределы

$$s-\lim_{\lambda\to-\infty} E(\lambda)=E(-\infty),\quad s-\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)=E(+\infty).$$

Регулярную на бесконечности спектральную функцию $E(\lambda)$ нормируют, полагая

$$E(-\infty)=0,\quad E(+\infty)=I.$$

Спектральная функция $E(\lambda)$ J-неотрицательного оператора A называется регулярной, если она одновременно регулярна и в точке нуль и на бесконечности.

Пусть спектральная функция J-неотрицательного оператора регулярна, тогда пространство H разлагается на J-ортогональную сумму вида

$$H=H_1\,[+]\,H_2\,[+]\,H_3,$$

где

$$H_1=E(0)\,H,\quad H_2=(E(+0)-E(-0))\,H,\quad H_3=(I-E(+0))\,H,$$

причем подпространство H_1 равномерно отрицательно, подпространство H_3 равномерно положительно, и эти подпространства входят в ядро оператора S. Оператор A на подпространстве H_2 совпадает с оператором S. В том случае, когда спектральная функция оператора A регулярная, на подпространстве $H_1\,[+]\,H_3$ можно ввести новое скалярное произведение следующим образом:

$$(f,g)_1=-[f_1,g_1]+[f_2,g_2],$$

если

$$f=f_1+f_2,\quad g=g_1+g_2 \text{ и } f_1,\ g_1\in H_1,\ f_2,\ g_2\in H_3.$$

Очевидно, что метрика, задаваемая этим скалярным произведением эквивалентна старой метрике, причем относительно нового скалярного произведения оператор A является обычным самосопряженным оператором.

Теорема 1. *Для того чтобы спектральная функция $E(\lambda)$ J-неотрицательного оператора A была регулярной в точке нуль, необходимо и достаточно, чтобы на ядре оператора S выполнялись условия*

$$\|(A-iy)^{-k}\|\leqslant\frac{M}{y^k}\ (k=1,2,\cdots),\ \text{при } y\downarrow 0, \tag{2}$$

где M — не зависящая от k константа.

Доказательство. Для некоторого $a>0$ рассмотрим разложение пространства H на J-ортогональную сумму подпространств

$$H = H_\Delta [+] H'_\Delta,$$

где

$$H_\Delta = E(\Delta) H, \quad \Delta = (-a, a),$$

H'_Δ — J-ортогональное дополнение к H_Δ.

Поскольку эти подпространства инвариантны относительно оператора A и спектральная функция оператора A регулярна в точке нуль тогда и только тогда, когда регулярна в точке нуль спектральная функция оператора A_Δ (A_Δ — сужение оператора A на подпространство H_Δ), то достаточно доказать теорему для оператора A_Δ.

Пусть спектральная функция оператора A_Δ — регулярна в точке нуль. Так как A_Δ — ограниченный оператор, то его спектральная функция будет регулярной. Поэтому на подпространстве $H_{\Delta 1} [+] H_{\Delta 3}$ оператор A_Δ — подобен самосопряженному оператору. Отсюда следует необходимость условий теоремы.

Обратно, пусть выполняются условия (2). Докажем, что на ядре оператора S для всех $y>0$ имеет место

$$\|(A_\Delta - iy)^{-k}\| \leq \frac{M}{y^k} \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{3}$$

При $y \downarrow 0$ эти неравенства выполняются по условию, а из (1) для оператора A_Δ имеем (на ядре S)

$$(A_\Delta - iy)^{-1} = -\frac{I}{iy} + \frac{1}{iy} \int_{-a}^{a} \frac{dF(\lambda)}{\lambda - iy}. \tag{4}$$

Поэтому

$$\|(A_\Delta - iy)^{-1}\| \leq \frac{1}{y} + \frac{M_1}{y^2}.$$

Дифференцируя (4), получим

$$\|(A_\Delta - iy)^{-k}\| \leq \frac{1}{y_k} + \frac{4\, M_1}{y^{k+1}} \quad (k = 2, 3, \cdots).$$

Следовательно, при $y>4M_1$ будем иметь

$$\|(A_\Delta - iy)^{-k}\| \leq \frac{2}{y^k} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

По известной теореме [3] теории полугрупп операторов из (3) получаем, что оператор $-iA_\Delta$ является производящим оператором ограниченной группы операторов e^{-itA_Δ}, т. е.

$$\|e^{-itA_\Delta}\| \leq M \text{ при всех } t.$$

Отсюда, согласно теореме Б. С. Надя [4], следует, что на ядре оператора S оператор A подобен самосопряженному.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Для того чтобы спектральная функция $E(\lambda)$ J-неотрицательного оператора A была регулярной на бесконечности, необходимо и достаточно чтобы*

$$\|(A-iy)^{-k}\| < \frac{M}{y^k} \quad (k=1, 2, \cdots), \text{ при } y \uparrow \infty. \tag{5}$$

Доказательство. Снова рассмотрим разложение

$$H = H_\Delta [+] H'_\Delta.$$

Обозначим через A'_Δ сужение оператора A на подпространство H'_Δ. Поскольку спектральная функция оператора A регулярна на бесконечности тогда и только тогда, когда регулярна на бесконечности спектральная функция оператора A'_Δ, то достаточно ограничиться рассмотрением оператора A'_Δ. Для оператора A'_Δ неравенства (5) выполняются при всех $y \geqslant 0$, поскольку $(A'_\Delta - iy)^{-1}$ ограничено в окрестности нуля.

Далее повторяется рассуждение теоремы 1.

Объединяя теоремы 1 и 2, получаем

Теорема 3. *Для того чтобы спектральная функция $E(\lambda)$ J-неотрицательного оператора A была регулярной, необходимо и достаточно чтобы на ядре оператора S выполнялись условия*

$$\|(A-iy)^{-k}\| \leqslant \frac{M}{y^k} \quad (k=1, 2, \cdots) \text{ при } y>0.$$

2°. Приведем пример одномерного возмущения, при котором регулярность в нуле спектральной функции нарушается.

Пусть A — J-положительный оператор ($[Af, f]>0$, $f \in D(A)$, $f \neq 0$) с регулярной спектральной функцией $E(\lambda)$, тогда пространство H имеет разложение

$$H = H_1 [+] H_2.$$

Так как подпространства H_1 и H_2 инвариантны относительно оператора A, то для любого φ будем иметь

$$((A-iy)^{-1}\varphi, (A-iy)^{-1}\varphi)_1 = -[(A-iy)^{-1}\varphi, (A-iy)^{-1}\varphi] +$$

$$+[(A-iy)^{-1}\varphi, (A-iy)^{-1}\varphi] = -\int_{-\infty}^{0} \frac{d[E(\lambda)\varphi, \varphi]}{\lambda^2+y^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{d[E(\lambda)\varphi, \varphi]}{\lambda^2+y^2}.$$

Введем обозначения:

$$a(y) = -\int_{-\infty}^{0} \frac{d[E(\lambda)\varphi, \varphi]}{\lambda^2+y^2}, \quad b(y) = \int_{0}^{\infty} \frac{d[E(\lambda)\varphi, \varphi]}{\lambda^2+y^2}.$$

Для резольвенты оператора $\widetilde{A} = A + \alpha[\cdot, \varphi]\varphi$ справедлива формула

$$(\bar{A}-zI)^{-1}=(A-zI)^{-1}-\frac{\alpha\,[\cdot,(A-\bar{z}I)^{-1}\varphi]}{1+\alpha\,[(A-zI)^{-1}\varphi,\varphi]}(A-zI)^{-1}\varphi\ (\mathrm{Im}\,z\neq 0). \tag{6}$$

Легко убедиться, что можно реализовать случай, когда спектральная функция $E(\lambda)$ оператора A и вектор φ такие, что имеет место

$$[E(\lambda)\varphi,\varphi]-[E(0)\varphi,\varphi]=\begin{vmatrix} 1 & \text{при} & \lambda\leqslant -e^{-1}, \\ -1/\ln|\lambda| & \text{при} & -e^{-1}<\lambda<0, \\ -1/\ln\lambda & \text{при} & 0<\lambda<e^{-1}, \\ 1 & \text{при} & e^{-1}\leqslant\lambda, \\ 0 & \text{при} & \lambda=0. \end{vmatrix}$$

Положим $[E(\lambda)\varphi,\varphi]-[E(0)\varphi,\varphi]=\sigma(\lambda)$.

Докажем, что $y\|(\bar{A}-iy)^{-1}\|\to+\infty$, при $y\downarrow 0$. В данном случае из (6) следует, что достаточно показать

$$yb(y)\Big/\int\limits_0^{\infty}\frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}\to+\infty \quad \text{при} \quad y\downarrow 0.$$

Для $y<e^{-1}$ имеем

$$yb(y)=\int\limits_0^{\infty}\frac{yd\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}=\int\limits_0^{e^{-1}}\frac{yd\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}=\int\limits_0^{y}\frac{yd\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}+\int\limits_y^{e^{-1}}\frac{yd\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2},$$

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}=\int\limits_0^{e^{-1}}\frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}=\int\limits_0^{y}\frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}+\int\limits_y^{e^{-1}}\frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}.$$

Так как

$$\int\limits_0^{y}\frac{yd\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}\geqslant\frac{\sigma(y)}{y}=-\frac{1}{2y\ln y},$$

$$\int\limits_0^{y}\frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2+y^2}=\int\limits_0^{y}\frac{d\lambda}{(\lambda^2+y^2)\ln^2\lambda}\leqslant\frac{\pi}{4y\ln^2 y},$$

$$\int\limits_0^{y}\frac{d\lambda}{(\lambda^2+y^2)\ln^2\lambda}=\int\limits_y^{2\sqrt{y}}\frac{d\lambda}{(\lambda^2+y^2)\ln^2\lambda}+\int\limits_{2\sqrt{y}}^{e^{-1}}\frac{d\lambda}{(\lambda^2+y^2)\ln^2\lambda}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{y\ln^2 2\sqrt{y}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{y}}-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{2\sqrt{y}\,\ln^2 2\sqrt{y}}.$$

Таким образом

$$yb(y) \geqslant \frac{1}{2y \ln y}, \quad \int_0^\infty \frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + y^2} \leqslant \frac{M}{y \ln^2 y}.$$

Следовательно

$$yb(y) \Big/ \int_0^\infty \frac{\lambda d\sigma(\lambda)}{\lambda^2 + y^2} \to +\infty \text{ при } y \downarrow 0.$$

Этот пример показывает, что лемма 2 из заметки [2] в общем случае неверна.

Пусть S — J-неотрицательный ограниченный оператор такой, что $S^2 = 0$ и $\bar{S} = S + \alpha[\cdot, \varphi]\varphi$ $(\alpha > 0)$.

Поскольку подпространство $V\{\varphi, S\varphi\}$ (линейная оболочка векторов φ и $S\varphi$) приводит оператор S и $\bar{S}$, то, очевидно, что спектральная функция оператора $\bar{S}$ регулярна. В этом случае регулярность спектральной функции сохраняется при любых конечномерных возмущениях.

Однако, регулярность спектральной функции в этом случае уже при ядерных возмущениях, вообще говоря, нарушается.

Действительно, пусть $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \cdots$ — ортонормированный базис пространства H и

$$S\varphi_i = \psi_i, \; S\psi_i = 0, \; J\varphi_i = \psi_i, \; J\psi_i = \varphi_i \; (i = 1, 2, \cdots).$$

Легко проверить, что S — J-неотрицательный оператор и

$$[S\varphi_i, \varphi_i] = [\psi_i, \varphi_i] = (\varphi_i, \varphi_i) = 1, \; [\varphi_i, \varphi_i] = [\psi_i, \psi_i] = 0 \; (i = 1, 2, \cdots,).$$

Пусть $\tilde{S} = S + K$, где

$$K = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i [\cdot, \varphi_i]\varphi_i, \; \alpha_i > 0 \; (i = 1, 2, \cdots) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^\infty \alpha_i < \infty.$$

Нетрудно доказать, что $\tilde{S}$ является J-положительным оператором и подпространства $V\{\varphi_i, \psi_i\}$ приводят оператор $\bar{S}$. На этих подпространствах оператор $\bar{S}$ совпадает с оператором

$$S + \alpha_i[\cdot, \varphi_i] \; (i = 1, 2, \cdots).$$

Найдем собственные векторы и собственные значения оператора $\bar{S}$ в этих подпространствах.

Пусть

$$f = \beta_i \varphi_i + \gamma_i \psi_i \quad \text{и} \quad \bar{S}f = \lambda f,$$

тогда

$$\beta_i\psi_i+\alpha_i\gamma_i\varphi_i=\lambda\beta_i\varphi_i+\lambda\gamma_i\psi_i,$$

откуда

$$\lambda=\pm\sqrt{\alpha_i}.$$

Соответствующими собственными векторами будут

$$f_-^{(i)}=-\sqrt{\alpha_i}\,\varphi_i+\psi_i,\qquad f_+^{(i)}=\sqrt{\alpha_i}\,\varphi_i+\psi_i,$$

причем

$$[f_-^{(i)},f_-^{(i)}]=-2\sqrt{\alpha_i},\ [f_+^{(i)},f_+^{(i)}]=2\sqrt{\alpha_i}.$$

Если бы оператор $\tilde{S}$ имел регулярную спектральную функцию $\tilde{E}(\lambda)$, то должны были выполняться следующие соотношения:

$$H=\tilde{H}_1[+]\tilde{H}_3,\ \ \tilde{H}_1=\tilde{E}(0)H,\ \ \tilde{H}_3=(I-\tilde{E}(0))H,$$

где $\tilde{H}_1$ — равномерно отрицательно, $\tilde{H}_3$ — равномерно положительно, т. е.

$$-[f,f]\geqslant m(f,f)\ \text{при}\ f\in\tilde{H}_1\ \text{и}\ [f,f]\geqslant M(f,f)$$

при $f\in\tilde{H}_3$ $(m>0,\ M>0)$.

В частности

$$-[f_-^{(i)},f_-^{(i)}]\geqslant m(f_-^{(i)},f_-^{(i)})\ \ (i=1,2,\cdots,).$$

Вычислим $(f_-^{(i)},f_-^{(i)})$, получим

$$(f_-^{(i)},f_-^{(i)})=\alpha_i+1.$$

Таким образом

$$2\sqrt{\alpha_i}\geqslant m(\alpha_i+1)\ \ (i=1,2,\cdots).$$

Эти неравенства, очевидно, не имеют места при достаточно больших i.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Марку Григорьевичу Крейну за подробное обсуждение результатов этой работы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 19.XI.1977

Ռ. Վ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ. *J-ոչ բացասական օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի տեսության մասին (ամփոփում)*

Որոշակի սահմանափակումների դեպքում գրգման վրա, ապացուցվում է, որ J-ոչ բացասական օպերատորի սպեկտրալ ֆունկցիայի ռեգուլյարությունը կայուն է վերջավոր չափանի գրգռումների նկատմամբ։

Ընդհանուր դեպքում (առանց սահմանափակման) այդ արդյունքը ճիշտ չէ։ Բերվում է միաչափ գրգռման օրինակ, որի դեպքում սպեկտրալ ֆունկցիայի ռեգուլյարությունը խախտվում է։

R. V. HAKOPIAN. *On the theory of spectral function of J-nonnegative operator* (summary)

It is proved that with certain limitations on the perturbation the regularity of spectral function of J-nonnegative operator is stable under finite-dimensional perturbations.

Without any limitations this result is not correct. An example of one-dimensional perturbation is given which yields the spectral function nonregular.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Langer.* Spektraltheorie J-selbstadjungierter Operatoren und einige Anwendungen auf die Schar $\lambda^2 I + \lambda B + C$, Habiiltationsschrift Technische Universität, Dresden, 1965.
2. *Р. В. Акопян.* К теории возмущений J-положительного оператора, „Функц. анализ и его прилож." 9, № 2, 1975.
3. *Т. Като.* Теория возмущений линейных операторов, М., Изд. „Мир", 1972.
4. *Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, М., Изд. „Наука", 1970.