ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

Ю. Г. ДАДАЯН

ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НА РЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

В настоящей статье для решения трехмерных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами строятся вариационно-разностные схемы на регулярной сетке на основе кусочно-линейных базисных функций, удовлетворяющих условиям на разрыве. Показано, что оценки скорости сходимости схем в норме пространств W_2^1 и L_2 обладают предельной точностью.

§ 1. Построение вариационно-разностных схем (ВРС)

1. В ограниченной односвязной области Ω пространства R_3 переменных $(x_1, x_2, x_3)\equiv(x, y, z)$ с границей S рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)+\sum_{i=1}^{3}b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+au=f \tag{1}$$

с краевым условием

$$\left(\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cos(\nu, x_i)+\sigma u\right)\Bigg|_S=0,\ \sigma>0, \tag{2}$$

где ν — внешняя нормаль к S.

Пусть внутри Ω задана поверхность Λ, не пересекающаяся с S, которая разбивает Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2—внутреннюю и внешнюю. Будем предполагать, что Λ и S являются гладкими поверхностями класса C^2.

Уравнение (1) удовлетворяет условию эллиптичности, то есть для любой точки $(x, y, z)\in\overline{\Omega}$

$$\sum_{i,j=1}^{3}a_{ij}(x, y, z)\,\xi_i\xi_j\geqslant\mu\sum_{i=1}^{3}\xi_i^2,\ \mu>0.$$

Предположим следующее:

$$b_i\in C^1(\Omega),\ i=1, 2, 3,\ a\in C(\Omega),\ \sigma\in C^1(S),\ f\in L_2(\Omega).$$

Что же касается коэффициентов a_{ij}, то они терпят разрыв вдоль поверхности Λ; кроме того, $a_{ij}\in C^2(\Omega_l)$, где $ij=1, 2, 3,\ l=1, 2$.

Задача состоит в том, чтобы найти функцию $u(x_1, x_2, x_3)$, удовлетворяющую в области Ω уравнению (1), условию (2) на границе S, а также следующим условиям на поверхности Λ разрыва коэффициентов a_{ij}:

$$[u]_\Lambda = u^+ - u^- = 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial N}\right]_\Lambda = 0, \tag{3}$$

где

$$\left[\frac{\partial u}{\partial N}\right]_\Lambda = \sum_{i,\, j=1}^{3} \left(a_{ij}^+ \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^+ \cos(n, x_i) - a_{ij}^- \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^- \cos(n, x_i) \right),$$

а n — внешняя относительно области Ω_1 нормаль к Λ. Знак $+$ (или $-$) у функции означает, что берется ее предельное значение на Λ из Ω_1 (или Ω_2).

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{L}(u, \Phi) = \int_\Omega \left(\sum_{i,\, j=1}^{3} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \Phi + au\,\Omega \right) d\Omega +$$

$$+ \int_S \sigma u \Phi\, dS, \quad (f, \Phi) = \int_\Omega f \Phi\, d\Omega;$$

здесь и ниже $d\Omega = dx\,dy\,dz$.

Обобщенным решением нашей краевой задачи назовем функцию u из $W_2^1(\Omega)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\mathbf{L}(u, \Phi) = (f, \Phi) \tag{4}$$

при любой $\Phi \in W_2^1(\Omega)$.

Известно, что обобщенное решение задачи принадлежит пространству W_2^2 в каждой из подобластей Ω_1 и Ω_2, и имеет место оценка [1]

$$\|u\|^2_{2,\, \Omega_1} + \|u\|^2_{2,\, \Omega_2} \leqslant C \|f\|^2_{0,\, \Omega}{}^*. \tag{5}$$

Предполагается, что выполняется условие коэрцитивности, то есть для любой $u \in W_2^1(\Omega)$ имеет место неравенство

$$\mathbf{L}(u, u) \geqslant C \|u\|^2_{1,\, \Omega}.$$

2. Выберем некоторый положительный, достаточно малый, параметр h, называемый шагом сетки.

Рассмотрим в пространстве R_3 кубическую сетку с шагом h. Через $\square_{ijk}$ обозначим ячейку сетки: $ih \leqslant x_1 \leqslant (i+1)h$, $jh \leqslant x_2 \leqslant (j+1)h$, $kh \leqslant x_3 \leqslant (k+1)h$. Каждую ячейку сетки разобьем на шесть треугольных пирамид, которые назовем симплексами и будем обозначать их через Δ_k, где $k = 1, 2, \cdots, 6$ (рис. 1).

* Буквой C с индексами внизу и без них здесь и везде ниже обозначаются различные положительные постоянные в неравенствах, не зависящие от h и рядом стоящих множителей.

Через Ω^h, называемой сеточной областью, обозначим наименьшее объединение симплексов, содержащее $\bar{\Omega}$. Вершины симплексов, составляющих Ω^h, назовем узлами сетки и обозначим через R^h.

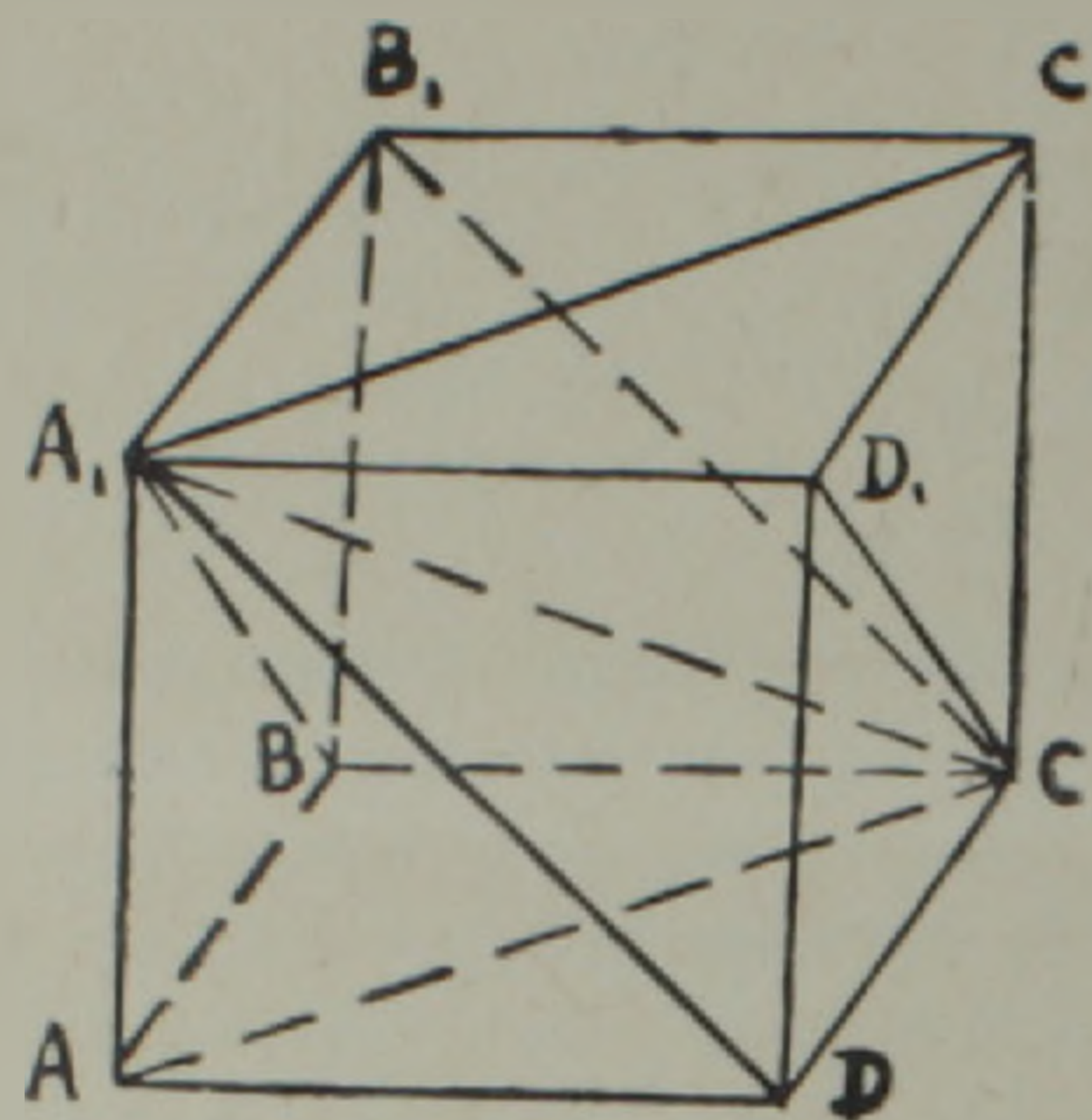

Рис. 1.

Пусть поверхность Λ разбита на конечное число не налегающих друг на друга кусков $\Lambda = \cup \Lambda_m$, и для каждого Λ_m существует область $\Pi_m \subset R_2$ и регулярное отображение: $\Phi_m\ \Pi_m \to R_3$, такое, что $\Phi_m(\Pi_m) = \Lambda_m$. Рассмотрим цилиндры $Q_m^+ = [0, \sqrt{3}h] \times \Pi_m$, $Q_m^- = [-\sqrt{3}h,\ 0] \times \Pi_m$ и отображения $\Phi_m^*\colon Q_m \to R_3$, $Q_m = Q_m^+ \cup Q_m^-$:

$$\Phi_m^*(r, t_1, t_2) = \Phi_m(t_1, t_2) + rn^+(\Phi_m(t_1, t_2)),\ r \in [0, \sqrt{3}h]$$

$$\Phi_m^*(r, t_1, t_2) = \Phi_m(t_1, t_2) + rn^-(\Phi_m(t_1, t_2)),\ r \in [-\sqrt{3}h, 0],\ (t_1, t_2) \in \Pi_m$$

где n^+ и n^- есть единичные векторы конормали к поверхности Λ, для определения которых надо брать предельные значения коэффициентов a_{ij} из Ω_1 и Ω_2 соответственно.

Множества $\cup \Phi_m^*(Q_m^+)$ и $\cup \Phi_m^*(Q_m^-)$ обозначим через ω_1^h и ω_2^h соответственно. Таким образом, область $\omega^h = \omega_1^h \cup \omega_2^h$ состоит из точек Ω, удаленных от Λ не более, чем на $\sqrt{3}\,h$ по направлению конормали.

Координаты (r, t_1, t_2) в $Q_m = [-\sqrt{3}\ h, \sqrt{3}h] \times \Pi_m$, $r \in [-\sqrt{3}h, \sqrt{3}\ h]$, $(t_1, t_2) \in \Pi_m$ выберем так, чтобы для якобианов отображений Φ^* выполнялось неравенство

$$C_1 \leqslant \left| \frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(r, t_1, t_2)} \right| \leqslant C_2.$$

Через Ω_e^h обозначим множество всех тех симплексов, которые имеют непустое пересечение с областью $\Omega_e \setminus \omega_e^h$, где $e = 1, 2$. Пусть $\Omega^h(\Lambda) = \Omega^h \setminus (\Omega_1^h \cup \Omega_2^h)$; ясно, что $\Omega^h(\Lambda) \subset \omega^h$.

Второе из условий (3) в системе координат (r, t_1, t_2) примет вид,

$$A_{11}^{+}(0, t_1, t_2)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^{+} + A_{12}^{+}(0, t_1, t_2)\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^{+} + A_{13}^{+}(0, t_1, t_2)\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^{+} =$$

$$= A_{11}^{-}(0, t_1, t_2)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^{-} + A_{12}^{-}(0, t_1, t_2)\left(\frac{\partial u}{\partial t_1}\right)^{-} + A_{13}^{-}(0, t_1, t_2)\left(\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)^{-}. \quad (6)$$

При помощи преобразований

$$\left.\begin{aligned} \xi &= t_1 + t_2 - \frac{A_{12}^{+}(0, t_1, t_2) + A_{13}^{+}(0, t_1, t_2)}{A_{11}^{+}(0, t_1, t_2)}\, r \\ \eta &= t_2 - \frac{A_{13}^{+}(0, t_1, t_2)}{A_{11}^{+}(0, t_1, t_2)}\, r \\ \zeta &= r / A_{11}^{+}(0, t_1, t_2) \end{aligned}\right|\ \text{если } r \geqslant 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= t_1 + t_2 - \frac{A_{12}^{-}(0, t_1, t_2) + A_{13}^{-}(0, t_1, t_2)}{A_{11}^{-}(0, t_1, t_2)}\, r \\ \eta &= t_2 - \frac{A_{13}^{-}(0, t_1, t_2)}{A_{11}^{-}(0, t_1, t_2)}\, r \\ \zeta &= r / A_{11}^{-}(0, t_1, t_2) \end{aligned}\right|\ \text{если } r < 0$$

перейдем к системе (ξ, η, ζ).

При помощи непосредственных вычислений можно убедиться в том, что условие (6) в системе (ξ, η, ζ) примет вид:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^{+} = \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)^{-}. \quad (7)$$

Все симплексы, составляющие $\Omega^h(\Lambda)$, пересекаются с поверхностью Λ. Возможны два случая:

а) одна вершина симплекса находится по одну сторону поверхности Λ, а три другие—по другую;

б) две вершины симплекса находятся по одну сторону поверхности Λ, а две другие—по другую.

Проведем новое разбиение области $\Omega^h(\Lambda)$. Для этого рассмотрим некоторый симплекс $ABCA_1$, удовлетворяющий случаю а) (рис. 2). Пусть вершина A_1 принадлежит Ω_1, а три остальные — Ω_2. Проделаем следующее:

1) выделим все те ребра симплекса, которые пересекаются с поверхностью Λ $(AA_1, BA_1$ и $CA_1)$;

2) перейдем от системы (x, y, z) к системе (r, t_1, t_2), а затем к системе (ξ, η, ζ); образы концов отделенных ребер в системе (ξ, η, ζ) соединим отрезком прямой, при этом прообраз точки пересечения отрезка с плоскостью $\zeta = 0$ в системе (x, y, z) назовем точкой разрыва; ясно, что точки разрыва находятся на поверхности Λ, и каждому ребру соответствует одна точка разрыва; обозначим точки разрыва через N_1, N_2 и N_3 соответственно;

3) каждую точку разрыва соединим с концами (соответствующей) отделенного ребра, после чего „стираем“ данное отделенное ребро; отрезком прямой соединим те точки разрыва, которые соответствуют одной грани симплекса;

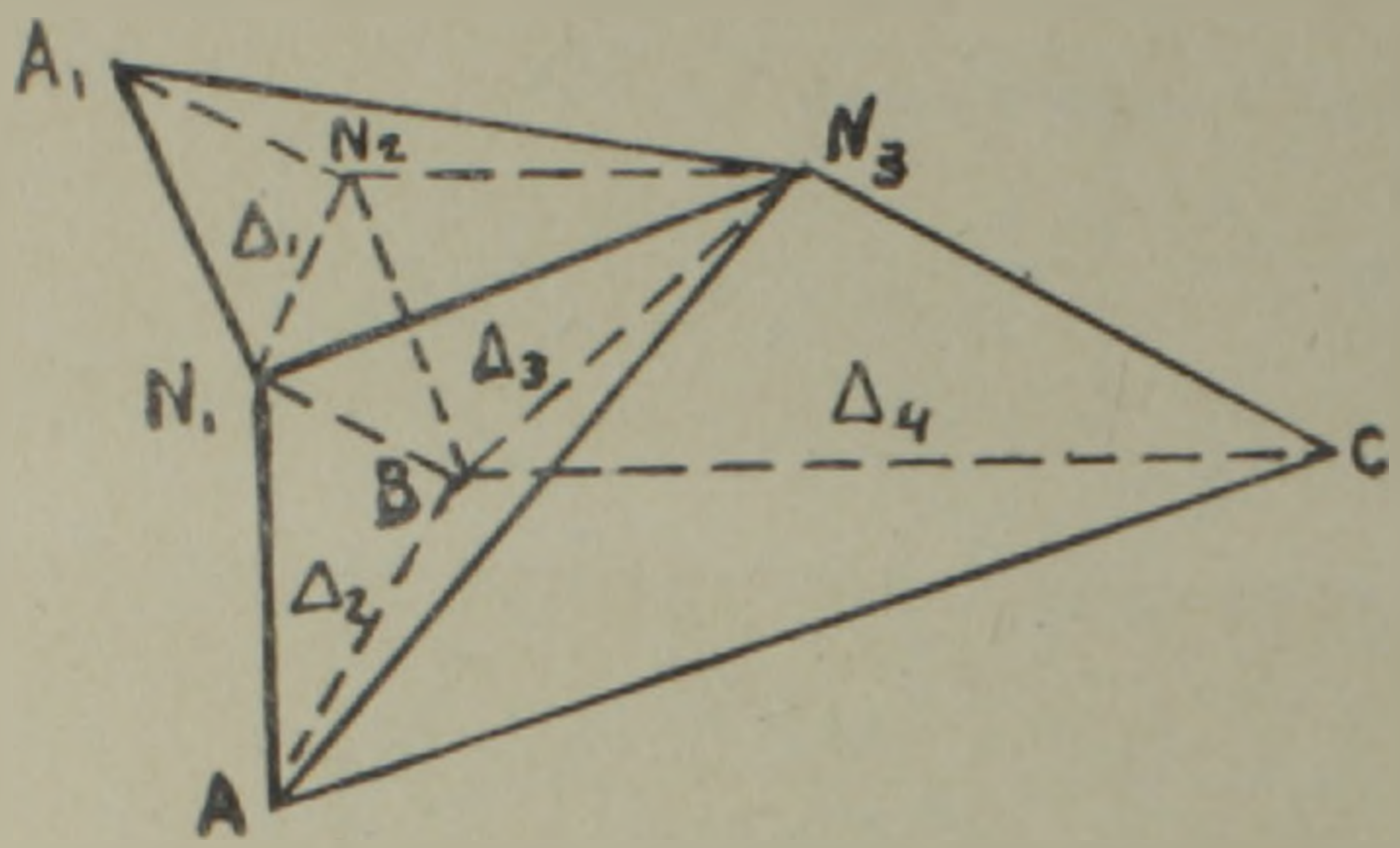

Рис. 2.

4) в результате построений 1)—3) получим треугольную пирамиду $A_1N_1N_2N_3$ и пятигранник $N_1N_2N_3ABC$; разобьем пятигранник на треугольные пирамиды $BN_1N_2N_3$, ABN_1N_3, $ABCN_3$; многогранник $A_1N_1N_2N_3ABC$ назовем „ломаным симплексом“;

5) те же самые преобразования проделаем для каждого симплекса вида а).

Теперь перейдем к случаю б). Рассмотрим, например, симплекс BCA_1B_1 (рис. 3). Пусть вершины A_1 и B_1 принадлежат Ω_1, а B и C—обла-

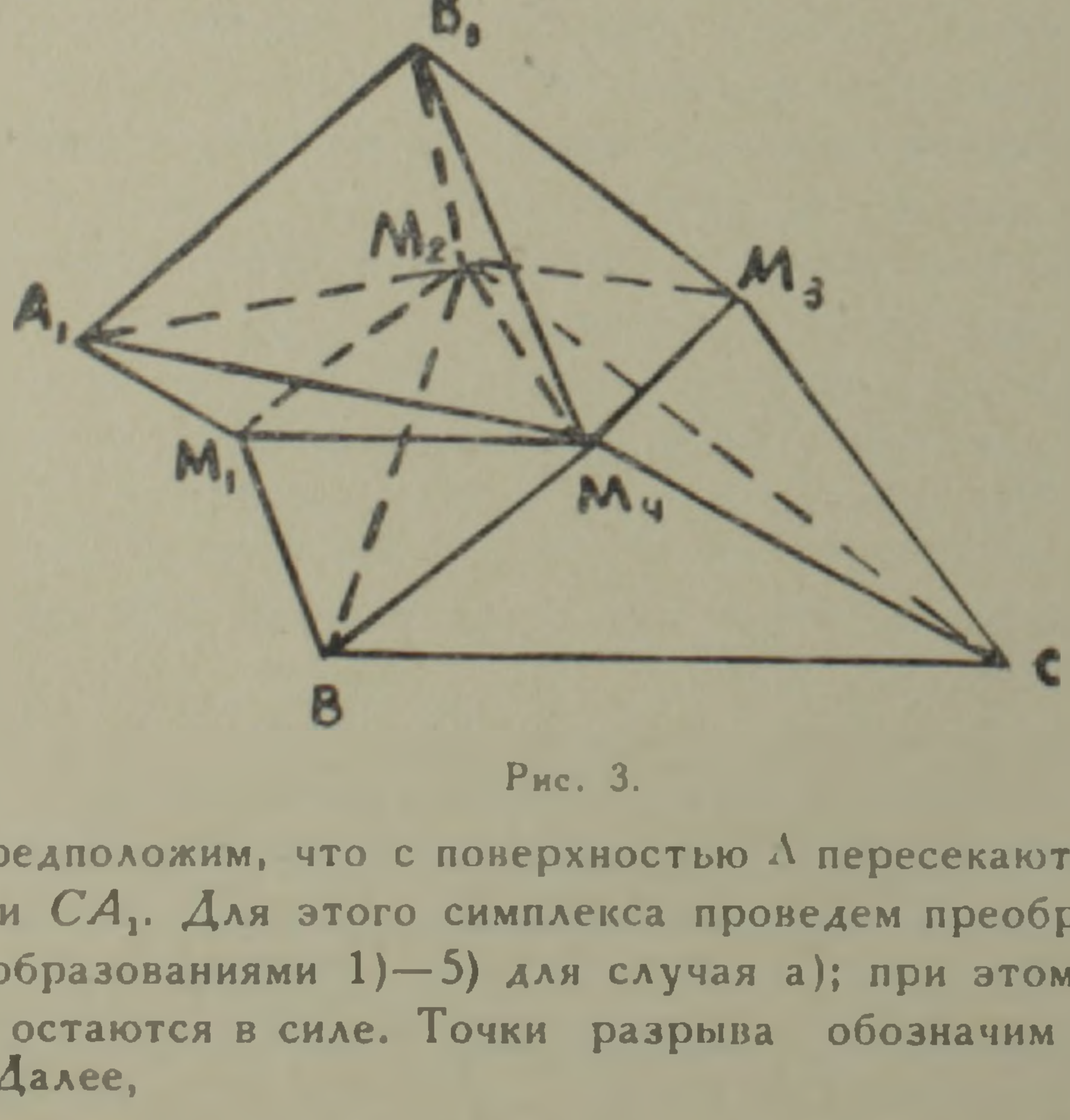

Рис. 3.

сти Ω_2. Предположим, что с поверхностью Λ пересекаются ребра BA_1, BB_1, CB_1 и CA_1. Для этого симплекса проведем преобразования, схожие с преобразованиями 1)—5) для случая а); при этом преобразования 1)—3) остаются в силе. Точки разрыва обозначим через M_1, M_2, M_3 и M_4. Далее,

4) соединим отрезком прямой те две точки разрыва, которые соответствуют различным граням и расстояние между которыми меньше, чем расстояние между двумя другими (на рис. 3 это точки M_2 и M_4); точки M_2 и M_4 соединим с вершинами B, C, A_1 и B_1, если они не были соединены до этого.

Полученный в результате многогранник, состоящий из шести треугольных пирамид, назовем „ломаным симплексом".

5) те же самые преобразования проделаем для каждого симплекса вида 6).

Замечание 1. Новое разбиение симплексов, имеющих общую грань, надо проводить так, чтобы, во-первых, части, на которые разбиваются симплексы, не пересекались и, во-вторых, не образовывалось „пустот". Ясно, что точка разрыва N_2 совпадает с точкой разрыва M_1, а точка N_3 — с точкой M_4 (рис. 2 и 3).

Замечание 2. Если точка разрыва совпадает с узлом, то дополнительных трудностей в связи с этим не возникает.

3. Перенумеруем все узлы из R^h, и каждому узлу $(x^k, y^k, z^k) \in R^h$ поставим в соответствие функцию $\varphi_k(x, y, z)$, которая равна единице в узле (x^k, y^k, z^k), нулю — в остальных узлах, а в точках разрыва определяется однозначно так же, как это делалось в [2], то есть посредством линейной интерполяции в системе (ξ, η, ζ). После того, как определены значения функции $\varphi_k(x, y, z)$ в узлах и точках разрыва, она восполняется линейно на всех регулярных симплексах и треугольных пирамидах, составляющих „ломаные симплексы", оставаясь при этом непрерывной.

Для произвольной сеточной функции $\underline{\omega} = \{\omega_k\}$, определенной на R^h, поставим ее кусочно-линейное восполнение следующим образом:

$$\bar{\omega}(x, y, z) = \sum_{(x^k, y^k, z^k) \in R^h} \omega_k \varphi_k(x, y, z), \quad \tilde{\omega}(x^k, y^k, z^k) = \omega_k. \tag{8}$$

Множество функций вида (8) обозначим через H_h. Ясно, что $H_h \subset \subset W_2^1(\Omega^h)$.

Приближенным решением нашей краевой задачи назовем функцию $\bar{v} \in H_h$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$L(\tilde{v}, \tilde{\varphi}) = (f, \tilde{\varphi}) \tag{9}$$

при произвольной $\bar{\varphi} \in H_h$.

Полученная ВРС является пятнадцатиточечной. Нетрудно проверить, что для уравнения Лапласа она становится семиточечной.

§ 2. Вспомогательные утверждения и оценка скорости сходимости

1. Пусть $Q = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ — симплекс в пространстве переменных (x_1, x_2, x_3). По теореме вложения [3] функция u из $W_2^2(Q)$ при $m = 3$ эквивалентна непрерывной функции и

$$\|u\|_{C(Q)} \leqslant C\, \|u\|_{2,\,Q}\,. \tag{10}$$

Если $u \in W_2^2(Q)$ и принимает нулевые значения в вершинах симплекса Q, то по теореме С. Л. Соболева об эквивалентной нормировке пространств $W_p^l(Q)$ [3] справедливо неравенство

$$\|u\|_{2,\,Q}^2 \leqslant C \sum_{(2)} \int\limits_Q |D^2 u|^2\, dx_1 dx_2 dx_3 \tag{11}$$

и, следовательно,

$$\|u\|_{1,\,Q}^2 \leqslant C \sum_{(2)} \int\limits_Q |D^2 u|^2\, dx_1 dx_2 dx_3, \tag{12}$$

где $D^2 u$ означает (здесь и далее) любую из частных производных порядка два:

$$D^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^i\, \partial x_2^j\, \partial x_3^k}\,,\quad i + j + k = 2,$$

причем символ $\sum\limits_{(2)}$ означает, что суммируются все производные порядка два.

Из неравенств (10) и (11) следует, что

$$\max_{(x_1,\, x_2,\, x_3) \in Q} |u\,(x_1,\, x_2,\, x_3)|^2 \leqslant C \sum_{(2)} \int\limits_Q |D^2 u|^2\, dx_1 dx_2 dx_3. \tag{13}$$

Пусть линейное преобразование $x_k = x_k'/h$ $(k = 1,\, 2,\, 3)$ переводит симплекс Q в симплекс $\Delta = \{0 \leqslant x_1' \leqslant h,\ 0 \leqslant x_2' \leqslant h - x_1',\ 0 \leqslant x_3' \leqslant x_1'\}$, тогда неравенства (12) и (13) соответственно примут вид

$$\|u\|_{1,\,\Delta}^2 \leqslant Ch^2 \sum_{(2)} \int\limits_\Delta |D^2 u|^2\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3', \tag{14}$$

$$\max_{(x_1',\, x_2',\, x_3') \in \Delta} |u\,(x_1',\, x_2',\, x_3')|^2 \leqslant Ch \sum_{(2)} \int\limits_\Delta |D^2 u|^2\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3'. \tag{15}$$

2. Пусть u есть обобщенное решение нашей задачи. Напомним, что область Ω^h накрывает область Ω. Поэтому для того чтобы построить в Ω^h кусочно-линейное восполнение $\bar{u}$ функции u, ее следует продолжить за пределы Ω. Так как в области Ω_2 функция $u \in W_2^2(\Omega_2)$, то через границу S продолжим ее с сохранением класса и нормы $W_2^2(\Omega_2)$ [4].

Тогда [5]

$$\|u - \bar{v}\|_{1,\,\Omega} \leqslant C\, \|u - \tilde{u}\|_{1,\,\Omega^h}\,. \tag{16}$$

Для оценки правой части неравенства (16) нам понадобится еще два типа продолжений функции u: первое — из Ω_1 в Ω_2 с сохранением класса и нормы $W_2^2(\Omega_1)$, которое обозначим через u_1, второе — из Ω_2 в Ω_1 с сохранением класса и нормы $W_2^2(\Omega_2)$, которое обозначим через u_2.

Лемма. *Пусть $u \in W_2^2(\Omega_k)$, $k=1, 2$. Тогда в области Ω_k^h при достаточно малом h имеет место неравенство*

$$\|u - \bar{u}\|_{1, \Omega_l^h} \leqslant Ch \|u\|_{2, \Omega_l} \quad (l=1, 2). \tag{17}$$

На доказательстве этой леммы останавливаться не будем, так как оно легко проводится с применением неравенства (14).

Теперь оценим разность $u - \bar{u}$ для „ломаных симплексов".

Пусть „ломаный симплекс" Δ состоит из четырех симплексов: Δ_1, Δ_2, Δ_3 и Δ_4 (рис. 2). Обозначим через (ξ_i, η_i, ζ_i), $(i=1, 2, 3, 4)$ образы вершины A, B, C и A_1 в системе (ξ, η, ζ).

Пусть (ξ_i, η_i, ζ_i), $i=1, 2, 3, 4$ есть вершины симплекса Δ' и

$$\max_{1 < i,\, j < 4} |\xi_i - \xi_j| = e_1 h, \quad \max_{1 < i,\, j < 4} |\eta_i - \eta_j| = e_2 h,$$

$$\max_{1 < i,\, j < 4} |\zeta_i - \zeta_j| = e_3 h,$$

где e_1, e_2 и e_3 — положительные постоянные, не зависящие от h.

Из условия (7) следует, что функция $u(\xi, \eta, \zeta)$ в $\omega^h(\xi, \eta, \zeta)$ принадлежит W_2^2 ($\omega^h(\xi, \eta, \zeta)$ есть образ ω^h). Через $\bar{u}(\xi, \eta, \zeta)$ обозначим ту линейную функцию, значения которой в точках (ξ_i, η_i, ζ_i), где $i=1$ 2, 3, 4, совпадают со значениями функции $u(\xi, \eta, \zeta)$. Так как $u - \bar{u} \in W_2^2(\Delta')$ и $u(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \bar{u}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, то производя замену переменных — $\xi = e_1 x_1'$, $\eta = e_2 x_2'$, $\zeta = e_3 x_3'$, а затем применяя неравенство (15) и, наконец, возвращаясь к старым переменным, получим

$$\max_{(\xi, \eta, \zeta) \in \Delta'} |u(\xi, \eta, \zeta) - \bar{u}(\xi, \eta, \zeta)|^2 \leqslant Ch \sum_{(2)} \int_{\Delta'} |D^2 u|^2 d\xi d\eta d\zeta.$$

Пусть точки N_k' $(k=1, 2, 3)$ есть образы точек N_k $(k=1, 2, 3)$ в системе координат (ξ, η, ζ). Так как в точках N_k функции $\bar{u}$ и $\bar{u}$ совпадают, то из последнего неравенства получим, что

$$|u(N_k') - \bar{u}(N_k)|^2 \leqslant Ch \int_{\Delta'} \sum_{(2)} |D^2 u|^2 d\xi d\eta d\zeta, \quad k=1, 2, 3.$$

Возвращаясь к переменным (x, y, z), приходим к неравенству

$$|u(N_k)-\tilde{u}(N_k)|^2 \leqslant Ch\sum_{(2)}\left(\int_{Q_1}|D^2 u|^2\,dxdydz+\int_{Q_2}|D^2u|^2\,dxdydz\right), \quad (18)$$

где $Q_1\subset\Omega_1$, $Q_2\subset\Omega_2$ и $Q_1\cup Q_2$ — прообраз Δ'.

Имеем

$$\|u-\tilde{u}\|^2_{1,\,ABCN_1N_2N_3A_1}=\sum_{i=1}^{4}\|u-\tilde{u}\|^2_{1,\,\Delta_i}. \quad (19)$$

Пусть, например, $A_1N_1\geqslant A_1N_2\geqslant A_1N_3$. Введем обозначение: $h_i=A_1N_i$ $(i=1, 2, 3)$. При помощи линейного преобразования симплекс Δ_1 переведем в симплекс $\Delta_1'=\{0\leqslant x_1'\leqslant h_1,\ 0\leqslant x_2'\leqslant h_2(h_1-x_1')/h_1,\ 0\leqslant x_3'\leqslant h_3 x_1'/h_1$, так, чтобы точка A_1 перешла в $(0, 0, 0)$, N_1 — в $(h_1, 0, 0)$, N_2 — в $(0, h_2, 0)$, а N_3 — в $(h_1, 0, h_3)$.

Для первого слагаемого в правой части последнего равенства

$$\|u-\tilde{u}\|^2_{1,\,\Delta_1}=\sum_{k=1}^{3}\int_{\Delta_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x_k}\right|^2 dx_1dx_2dx_3\equiv i_1+i_2+i_3.$$

Оценим i_1:

$$\begin{aligned} i_1\leqslant C\Bigg\{&\int_{\Delta_1'}\left|\frac{\partial u(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_1'}-\frac{\partial u_1(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_1'}\right|^2 dx_1'\,dx_2'\,dx_3'+\\ &+\int_{\Delta_1'}\left|\frac{\partial u_1(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_1'}-\frac{\partial\tilde{u}_1(x_1', x_2', x_3')}{\partial x_1'}\right|^2 dx_1'\,dx_2'\,dx_3'+ \qquad (20)\\ &+\int_{\Delta_1'}\frac{|u(h_1, 0, 0)-\tilde{u}(h_1, 0, 0)|^2}{h_1^2}\,dx_1'dx_2'dx_3'\Bigg\};\end{aligned}$$

здесь принято во внимание совпадение функций u_1 и u в точках $(0, 0, 0)$ и $(h_1, 0, 0)$. Оценка первого слагаемого в правой части (20) выведена в [5]. Оценка второго слагаемого и третьего следует из леммы и из неравенства (18) соответственно. Возвращаясь к переменным (x, y, z), получим

$$i_1\leqslant Ch^2\sum_{(2)}\int_{Q_3}(|D^2 u_1|^2+|D^2 u_2|^2)\,dxdydz,$$

где $Q_3=\Delta_1\cup Q_1\cup Q_2$.

Слагаемые i_2 и i_3 оцениваются точно так же. Следовательно

$$\|u-\tilde{u}\|^2_{1,\,\Delta_1}\leqslant Ch^2\sum_{(2)}\int_{Q_3}(|D^2u_1|^2+|D^2 u_2|^2)\,dxdydz.$$

Остальные слагаемые в правой части равенства (19) оцениваются аналогично. Поэтому

$$\|u-\bar{u}\|_{1,\,ABCN_1\Lambda_2N_1\Lambda_1} \leqslant Ch^2\left(\|u_1\|^2_{2,\,Q^h}+\|u_2\|^2_{2,\,Q^h}\right),$$

где $Q^h = Q_3 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \cup \Delta_4$.

Суммируя последнее неравенство по всем „ломаным симплексам“, получим

$$\|u-\tilde{u}\|^2_{1,\,\Omega^h(\Delta)} \leqslant Ch^2\left(\|u\|^2_{2,\,\Omega_1}+\|u\|^2_{2,\,\Omega_2}\right). \tag{21}$$

Из неравенств (17) и (21) следует, что

$$\|u-\tilde{u}\|^2_{1,\,\Omega^h} \leqslant Ch^2\left(\|u\|^2_{2,\,\Omega_1}+\|u\|^2_{2,\,\Omega_2}\right). \tag{22}$$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть u есть обобщенное решение задачи, а $\bar{v}$ — приближенное, определяемое тождеством* (9). *Тогда при достаточно малых h имеют место оценки*

$$\|u-\bar{v}\|_{1,\,\Omega} \leqslant Ch\,\|f\|_{0,\,\Omega}, \tag{23}$$

$$\|u-\bar{v}\|_{1,\,\Omega} \leqslant Ch^2\,\|f\|_{0,\,\Omega}. \tag{24}$$

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы доказывается просто. Для этого надо воспользоваться неравенствами (16), (22) и (5). Докажем справедливость неравенства (24).

Для простоты изложения предположим, что $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, хотя заметим, что неравенство (24) имеет место и при ненулевых b_1, b_2 и b_3. Тогда для любых функций φ и ψ из $W_2^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\mathbf{L}(\varphi,\ \psi) = \mathbf{L}(\psi,\ \varphi). \tag{25}$$

Из интегральных тождеств (4) и (9) следует, что

$$\mathbf{L}(u-\bar{v},\ \tilde{\varphi}) = 0$$

при произвольной $\bar{\varphi}$ из H_h.

Преобразуем тождественно последнее равенство:

$$\mathbf{L}(u-\bar{v},\ \Phi) = \mathbf{L}(u-\bar{v},\ \Phi-\bar{\varphi}). \tag{26}$$

Выберем Φ специальным образом, а именно, возьмем в качестве Φ решение нашей задачи с правой частью $u-\bar{v}$; тогда из неравенств (22) и (5) следует, что

$$\|\Phi-\tilde{\Phi}\|_{1,\,\Omega} \leqslant Ch\,\|u-\bar{v}\|_{0,\,\Omega}. \tag{27}$$

Функция Φ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\mathrm{L}\,(\Phi,\ \psi) = (u - \bar{v},\ \psi)$$

при произвольной ψ из $W_2^1(\Omega)$.

В последнем тождестве, если положить ψ равным $u-\bar{v}$, а также, если учесть равенства (25) и (26), получим

$$\|u-\bar{v}\|^2_{1,\Omega} = \mathrm{L}\,(u - \tilde{v},\ \Phi - \bar{\varphi}).$$

В качестве $\bar{\varphi}$ возьмем функцию $\tilde{\Phi} \in H_h$. Тогда

$$\|u - \bar{v}\|^2_{1,\Omega} = \mathrm{L}\,(u - \bar{v},\ \Phi - \tilde{\Phi}) \leqslant C\,\|u - \bar{v}\|_{1,\Omega} \cdot \|\Phi - \bar{\Phi}\|_{1,\Omega},$$

откуда, с учетом неравенств (23) и (27), получим неравенство (24). Теорема доказана.

В заключение выражаю глубокую благодарность Л. А. Оганесяну за постановку задачи, внимание к работе и ценные замечания.

Ереванский государственный университет

Поступила 15.IX.1977

ՅՈՒ. Գ. ԴԱԴԱՅԱՆ. Եռաչափ տիրույթի կանոնավոր ցանցում խզվող գործակիցներով էլիպտիկ հավասարումների լուծումը վարիացիոն-տարբերական մեթոդով *(ամփոփում)*

Հոդվածում խզվող գործակիցներով էլիպտիկ հավասարումների լուծման համար եռաչափ տիրույթի կանոնավոր ցանցում կառուցվում են վարիացիոն-տարբերական սխեմաներ կտոր առ կտոր գծային լրացումների միջոցով: Ցույց է տրվում, որ ստացված սխեմաների զուգամիտության արագությունը W_2^1 տարածությունում h կարգի է, իսկ L_2 տարածությունում՝ h^2 կարգի, որտեղ h-ը ցանցի քայլի երկարությունն է:

Yu. G. DADAJAN. *Variational difference method for the solution of elliptic equations in three dimensional domain with discontinuous coefficients on regular set* (summary)

For the solution of elliptic equations in three dimensional domain with discontinuous coefficients variational difference schemes are constructed on regular set by piecewise-linear supplements. It is proved that the speed of convergence of schemes in the norm of W_2^1 space has order h and in the norm of L_2 has order h^2, where h is the step of the set.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. *А. Ладыженская.* Краевые задачи математической физики, М., Изд. „Наука", 1973.
2. *Ю. Г. Дадаян, Л. А. Оганесян.* Вариационно-разностные схемы на регулярной сетке для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, журн. „Молодой научный работник", Изд. ЕрГУ, 24 (2), Ереван, 1976.
3. *С. Л. Соболев.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1950.
4. *В. М. Бабич.* К вопросу о распространении функций, УМН, вып. 7, № 2 (54), 1953, 111—113.
5. *Л. А. Оганесян, В. Я. Ривкинд, Л. А. Руховец.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 1, В сб. „Дифференциальные уравнения и их применение", вып. 5, Вильнюс, 1973.