ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIII, № 2, 1978 Математика

Б. А. ГОЛИНСКИЙ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ НА ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ МНОГОЧЛЕНЫ С ОБОБЩЕННЫМ ЯКОБИЕВЫМ ВЕСОМ

Пусть $\{p_n(x)\}_0^\infty$ — ортогональные многочлены (о.н.м.) на отрезке $[-1,1]$ с весом $p(x)$ — неотрицательной суммируемой на отрезке $[-1,1]$ не эквивалентной нулю функцией, а $\{q_n(x)\}_0^\infty$ — о.н.м. на отрезке $[-1,1]$ с весом $q(x)=(1-x^2)\,p(x)$. Обозначим $\varphi(\theta)=p(\cos\theta)|\sin\theta|$. Очевидно, $\varphi(\theta)$ — неотрицательная, не эквивалентная нулю суммируемая 2π-периодическая четная функция. Примем ее за вес, а соответствующие о.н.м. на единичной окружности обозначим через $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$, так что имеют место соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_n(e^{i\theta})\,\overline{\varphi_m(e^{i\theta})}\,\varphi(\theta)\,d\theta=\delta_{nm}, \tag{1}$$

$$\varphi_n(z)=\varkappa_n z^n+\cdots;\quad \varkappa_n>0,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

О.н.м. $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$ выражаются через о.н.м. $\{p_n(x)\}_0^\infty$ по известным формулам (см. [1], стр. 301):

$$\varphi_{2n}(e^{i\theta})=\frac{1}{2}e^{in\theta}\{\lambda_n p_n(\cos\theta)+i\mu_n q_{n-1}(\cos\theta)\sin\theta\},$$

$$\varphi_{2n-1}(e^{i\theta})=\frac{1}{2}e^{i(n-1)\theta}\{\mu_n p_n(\cos\theta)+i\lambda_n q_{n-1}(\cos\theta)\sin\theta\},$$

где

$$\lambda_n=\sqrt{2\pi}\sqrt{1+a_{2n-1}},\quad \mu_n=\sqrt{2\pi}\sqrt{1-a_{2n-1}},\quad a_n=\frac{\varphi_{n+1}(0)}{\varkappa_{n+1}} \tag{2}$$

Обозначим через $\Phi(\theta)$ обобщенный якобиев вес

$$\Phi(\theta)=H(\theta)\prod_{k=1}^{p}|e^{i\theta}-e^{i\theta_k}|^{2\alpha_k}=2^{\sum_{k=1}^{p}\alpha_k}H(\theta)\prod_{k=1}^{p}(1-\cos(\theta-\theta_k))^{\alpha_k}, \tag{2}$$

$$-\infty<\theta<\infty,\ 2\pi m\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_p<2\pi(m+1),\ m=0,\pm1,\pm2,\cdots,2\alpha_k>-1,$$

$0<H(\theta)$ — 2π-периодическая непрерывная на всей оси функция класс $C_{2\pi}$), удовлетворяющая условию регулярности А. Зигмунда: $\frac{\omega(t,H)}{t}\in L_1(0,\pi)$, $\omega(\delta,H)$ — модуль непрерывности функции $H(\theta)$.

Класс таких функций будем обозначать через $Z_{2\pi}$. Введем пространство $L_{s,\varphi}(0,2\pi)$ и норму в нем:

$$\|f\|_{s,\varphi} \equiv \|f\|_{L_{s,\varphi}(0,2\pi)} = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^s \varphi(t)\, dt\right\}^{\frac{1}{s}} < \infty,\ 1 \leqslant s < \infty,$$

$L_{s,1}(0,2\pi) \equiv L_s(0,2\pi)$, $\|f\|_{s,1} \equiv \|f\|_s$; $L_{1,1}(0,2\pi) \equiv L_1(0,2\pi)$, $L_\infty(0,2\pi) \equiv C_{2\pi}$.

Для $f(\theta) \in C_{2\pi}$

$$\|f\|_\infty \equiv \|f\| = \operatorname*{Max}_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} |f(\theta)|,\ \omega(\delta, f) = \operatorname*{Max}_{|h| \leqslant \delta} \|f(\theta + h) - f(\theta)\|.$$

О.н.м. на единичной окружности, соответствующие весу $\varphi_\alpha(\theta) = (1-\cos\theta)^\alpha$, обозначим $\{\varphi_{\alpha,n}(e^{i\theta})\}_{n=0}^{\infty}$. При доказательстве леммы-2 настоящей заметки мы воспользовались методом Г. Сегё (см. [2], стр. 75). Этот метод был применен Т. Фреем (см. [3], теорема 4.1) и В. М. Бадковым (см. [4], лемма 1.3). В настоящей работе доказана теорема, позволяющая получить оценки сверху для модулей ортонормальных многочленов, соответствующих весу (3) при $\theta_k - \varepsilon_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_k + \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, $k = \overline{1, p}$.

Лемма 1. *Пусть вес* $\varphi(\theta) = (1-\cos\theta)^{\alpha+\frac{1}{2}} (1+\cos\theta)^{\beta+\frac{1}{2}}$. *Тогда для соответствующих о.н.м. на единичной окружности имеем для всех* $n \geqslant 2$

$$|\varphi_{2n-1}^{(\alpha,\beta)}(e^{i\theta})|,\ |\varphi_{2n}^{(\alpha,\beta)}(e^{i\theta})| \leqslant C_1\, u_{n,-\alpha-\frac{1}{2}}(\theta)\, u_{n,-\beta-\frac{1}{2}}(\pi-\theta), \tag{4}$$

где

$$u_{n,\gamma}(\theta) = (\sqrt{1-\cos\theta} + n^{-1})^\gamma,$$

C_1 *здесь, в дальнейшем* $C_2, C_3, \cdots$ — *различные положительные постоянные.*

Доказательство. Для веса $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ о.н.м. Якоби удовлетворяют неравенствам (см. [5]):

$$|\hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(x)| \leqslant C_2(\alpha,\beta)(\sqrt{1-x}+n^{-1})^{-\alpha-\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x}+n^{-1})^{-\beta-\frac{1}{2}},$$

$$\alpha, \beta > -1,\ n \geqslant 1. \tag{5}$$

Перейдем к о.н.м. Якоби $\{\varphi_n^{(\alpha,\beta)}(e^{i\theta})\}_0^\infty$. По формулам (2) имеем

$$\varphi_{2n}(e^{i\theta}) \equiv \varphi_{2n}^{(\alpha,\beta)}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} e^{in\theta} [\lambda_n \hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) + i\mu_n \hat{p}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos\theta)\sin\theta], \tag{6$_1$}$$

$$\varphi_{2n-1}(e^{i\theta}) \equiv \varphi_{2n-1}^{(\alpha,\beta)}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} e^{i(n-1)\theta} [\mu_n \hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) + i\lambda_n \hat{p}_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos\theta)\sin\theta]. \tag{6$_2$}$$

Так как вес $\varphi(\theta)$, рассмотренный в настоящей лемме, положителен (за исключением отдельных точек), то по известной теореме (см. [5], стр. 160) для соответствующих параметров $\{a_n^{(\alpha,\beta)}\}_0^\infty$ имеем

$$|a_n^{(\alpha,\beta)}| < 1,\ n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Поэтому для $|\lambda_n|$ и $|\mu_n|$ в (6_1) и (6_2) имеем

$$|\lambda_n|, |\mu_n| < 2\sqrt{\pi},\ n = 1, 2, \cdots.$$

Кроме сказанного, имеем очевидные неравенства

$$\frac{1}{2}\left(\lambda_0 + \frac{1}{n-1}\right) < \lambda_0 + \frac{1}{n-1} < 2\left(\lambda_0 + \frac{1}{n}\right) (n \geqslant 2,\ \lambda_0 \geqslant 0). \tag{7}$$

К тому же

$$|\sin\theta| < (\sqrt{1-\cos\theta} + (n-1)^{-1})(\sqrt{1+\cos\theta} + (n-1)^{-1})\ (n > 1).$$

Применяя (5), (6) и (7) для $\lambda_0 = \sqrt{1-\cos\theta}$, получим (4).

Лемма 2. *Если* $\varphi(\theta) = \varphi_\alpha(\theta) H(\theta)$, *где* $0 < H(\theta) \in Z_{2\pi}$, $\varphi_\alpha(\theta) = 2^{-\alpha}|e^{i\theta}-1|^{2\alpha} = (1-\cos\theta)^\alpha$, $2\alpha > -1$, *то при всех* $\theta \in [0, 2\pi]$ *и* $n \geqslant 2$

$$|\varphi_n(e^{i\theta})| \leqslant C_3\, u_{n,-\alpha}(\theta). \tag{8}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в случае $H(\theta) \equiv 1$ лемма 2 является частным случаем леммы 1. В случае $\alpha = 0$: $\varphi(\theta) \equiv H(\theta)$, $u_{n,0}(\theta) = 1$. Известно ([6]), что при $0 < \varphi(\theta) \in Z_{2\pi}$ имеем равномерно для $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^*(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0} \pi(re^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta});\ \varphi_n^*(z) = z^n\,\overline{\varphi_n}\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$\pi(z) = \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} S_z(t)\, l_\varphi(t)\, dt\right\},\ z = re^{i\theta},\ S_z(t) = \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z},\ l_\varphi(t) \equiv \ln\varphi(t).$$

Так как (см. [5], стр. 25) $|\pi(e^{i\theta})|^2 \leqslant H_0^{-1}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $H_0 = \operatorname*{Min}_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} H(\theta)$, то $|\varphi_{0,n}(e^{i\theta})| \leqslant C_3$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Рассмотрим случай, когда $\alpha \neq 0$. В силу леммы 1 имеем для о.н.м., соответствующих весу $\varphi_\alpha(\theta)$, оценку

$$|\varphi_{\alpha,n}(e^{i\theta})| \leqslant C_4\, u_{n,-\alpha}(\theta). \tag{9}$$

Выразим о.н.м. $\{\varphi_n(e^{i\theta})\}_0^\infty$, соответствующие весу $\varphi(\theta)$, через о.н.м. $\{\varphi_{\alpha,k}(e^{i\theta})\}_{k=0}^n$, соответствующие весу $\varphi_\alpha(\theta)$. Легко убедиться в том, что

$$\varphi_n(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(e^{it}) \sum_{k=0}^n \overline{\varphi_{\alpha,k}(e^{it})}\, \varphi_{\alpha,k}(e^{i\theta})\, \varphi_\alpha(t)\, dt =$$

$$= \varphi_{\alpha,n}(e^{i\theta}) \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(e^{it})\, \overline{\varphi_{\alpha,n}(e^{it})}\varphi_\alpha(t)\, dt + H^{-1}(\theta)\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(e^{it})\, K_{n-1} \times$$

$$\times (e^{i\theta},\ e^{it}\cdot\varphi_\alpha)[H(\theta)-H(t)]\,\varphi_\alpha(t)\,dt.$$

Обозначим $\max\limits_{\theta\in[0,2\pi]}|\varphi_n(e^{i\theta})|\,u_{n,\alpha}(\theta)=\rho_n$, а экстремальную точку $\theta_0=\theta(n)\in\in[0,2\pi]$. Очевидно достаточно доказать, что $\rho_n\leqslant C_3$. Имеем

$$\rho_n\leqslant C_5J_1+C_6J_2, \tag{10}$$

где

$$J_1=\int\limits_0^{2\pi}|\varphi_n(e^{it})\|\varphi_{\alpha,n}(e^{it})|\,\varphi_\alpha(t)\,dt,\ J_2=u_{n,\alpha}(\theta_0)\int\limits_0^{2\pi}|\varphi_n(e^{it})\|K_{n-1}(e^{i\theta_0},e^{it};\varphi_\alpha)|\times$$

$$\times|H(\theta_0)-H(t)|\,\varphi_\alpha(t)\,dt,$$

$$K_n(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_n(z)\overline{\varphi_k(\zeta)},\ |z|\leqslant 1,\ |\zeta|\leqslant 1,$$

$$J_1=\|\varphi_n\varphi_{\alpha,n}\varphi_\alpha\|_1=\|\varphi_n\sqrt{\varphi_\alpha}\,\varphi_{\alpha,n}\sqrt{\varphi_\alpha}\|_1\leqslant\|\varphi_n\sqrt{\varphi_\alpha}\|_2=\left\|\varphi_n\sqrt{\varphi}\,\frac{1}{H}\right\|_2\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\frac{1}{\sqrt{H}}\right\|\leqslant C_7. \tag{11}$$

Введем множества $e=[\theta_0-\delta,\theta_0+\delta]$, $\delta<\pi$ и $e'=[\theta_0-\pi,\theta+\pi]\setminus e$. Интеграл в (10) возьмем по отрезку $[\theta_0-\pi,\theta_0+\pi]$ и разложим его на два по e и e', обозначив соответствующие интегралы через $J_2^{(0)}$ и J_2'. Известна формула Кристоффеля—Дарбу ([1], стр. 300)

$$K_{n-1}(e^{it},e^{i\theta};\varphi)=e^{i\theta}\,\frac{\varphi_n^*(e^{it})\,\overline{\varphi_n^*(e^{i\theta})}-\varphi_n(e^{it})\,\overline{\varphi_n(e^{i\theta})}}{e^{i\theta}-e^{it}}\ (\theta\neq t).$$

Применим ее для $\varphi(\theta)\equiv\varphi_\alpha(\theta)$ в оценке J_2'. Имеем для $t\in e'$:

$$|e^{i\theta_0}-e^{it}|=2\left|\sin\frac{t-\theta_0}{2}\right|\geqslant\frac{2}{\pi}\,\delta.$$

Учитывая это, а также то, что $|H(\theta)-H(\theta_0)|\leqslant C_8\ (0\leqslant\theta_0,\ \theta\leqslant 2\pi)$, получим

$$J_2'\leqslant C_9(\delta)\int\limits_{e'}|\varphi_n(e^{it})|\sqrt{\varphi(t)}\,|\varphi_{\alpha,n}(e^{it})|\sqrt{\varphi_\alpha(t)}\,|\varphi_{\alpha,n}(e^{i\theta_0})|\,u_{n,\alpha}(\theta_0)\frac{dt}{\sqrt{H(t)}}. \tag{12}$$

Применяя (9) и рассуждения, аналогичные тем, с помощью которых получена оценка (11), будем иметь

$$J_2'\leqslant C_{10}(\delta)\,\|\varphi_n\sqrt{\varphi}\|_2\left\|\frac{1}{H}\right\|\leqslant C_{11}(\delta). \tag{13}$$

Рассмотрим интеграл $J_2^{(0)}$. Имеем

$$J_2^{(0)}\leqslant\int\limits_{e_0}|\varphi_n(e^{it}|\,u_{n,\alpha}(\theta_0)\ \ |K_{n-1}(e^{i\theta_0},e^{it};\varphi_\alpha)|\,\omega(|t-\theta_0|)\,\varphi_\alpha(t)\,dt. \tag{14}$$

Для оценки правой части (14) рассмотрим раздельно два случая:

(I) случай: $\alpha > 0$. Имеем $\sqrt{\varphi_\alpha(t)} \leqslant u_{n,\alpha}(t)$. Как и прежде, применим формулу Кристоффеля-Дарбу и учтем, что для $t \in e_0$: $|t-\theta_0| \leqslant \pi$ и

$$|e^{it} - e^{i\theta_0}| = 2\left|\sin\frac{t-\theta_0}{2}\right| \geqslant \frac{2}{\pi}|t-\theta_0|.$$

Поэтому

$$J_2^{(0)} \leqslant 2\int_{e_0} |\varphi_n(e^{it})|\, u_{n,\alpha}(t)\, |\varphi_{\alpha,n}(e^{it})| \sqrt{\varphi_\alpha(t)}\, u_{n,\alpha}(\theta_0)\, |\varphi_{\alpha,n}(e^{i\theta_0})| \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\varphi_\alpha(t)}}{u_{n,\alpha}(t)} \frac{\omega(|t-\theta_0|)}{|t-\theta_0|}\, dt.$$

Применим оценку (9). После этого получим

$$J_2^{(0)} \leqslant C_{12}\rho_n \int_0^\delta \frac{\omega(t, H)}{t}\, dt. \tag{15}$$

Выберем δ так, чтобы

$$\int_0^\delta \frac{\omega(t, H)}{t}\, dt \leqslant (2C_{12})^{-1}. \tag{16}$$

Объединяя (15), (16), (13), (11) и (10), легко убедиться, что

$$\rho_n \leqslant C_3.$$

(II) случай: $-1 < 2\alpha < 0$. Имеем

$$J_2^{(0)} \leqslant \int_{e_0} |\varphi_n(e^{it})|\, u_{n,\alpha}(t)|\, K_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{it}; \varphi_\alpha)|\, \omega(|t-\theta_0|) \frac{u_{n,\alpha}(\theta_0)}{u_{n,\alpha}(t)} \varphi_\alpha(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \rho_n \int_{e_0} |K_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{it}; \varphi_\alpha)| \omega(|t-\theta_0|) \frac{u_{n,\alpha}(\theta_0)}{u_{n,\alpha}(t)} \varphi_\alpha(t)\, \omega(|t-\theta_0|)\, dt.$$

Применим теперь рассуждения В. М. Бадкова (см. [4]). Докажем сначала, что

$$\left[\frac{1}{2}\left|\sin\frac{t-\theta}{2}\right| + n^{-1}\right] |K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)| \leqslant C_{13}\, u_{n,\alpha}(\theta)\, u_{n,\alpha}(t). \tag{17}$$

Для этого достаточно доказать, что неравенству (17) (с различными постоянными) будут удовлетворять

$$\frac{1}{2}\left|\sin\frac{t-\theta}{2}\right| |K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)| \text{ и } n^{-1}|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)|.$$

Первое вытекает из формулы Кристоффеля-Дарбу и оценки (9).

Применяя ту же оценку, будем иметь

$$n^{-1}|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)| \leqslant C_{14}\, n^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right| +\right.\right.$$

$$+k^{-1}\Big)^{-\alpha}\left(\sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|+k^{-1}\right)^{-\alpha}\Big\}.$$

Воспользуемся неравенством

$$(b+c)^{-\alpha}\leqslant b^{-\alpha}+c^{-\alpha}\ (0<-\alpha\leqslant 1);\ b,\ c>0:$$

После чего получим

$$n^{-1}\left|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)\right|\leqslant C_{15}\, n^{-1}\left\{\sum_{\kappa=1}^{n}\left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{-\alpha}+k^{\alpha}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{t}{2}\right|^{-\alpha}+k^{\alpha}\right)\right\}\leqslant C_{15}\left\{2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{-\alpha}+\right.$$

$$\left.+2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{t}{2}\right|^{-\alpha}n^{\alpha}+2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{-\alpha}n^{\alpha}+n^{2\alpha}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant C_{15}\left\{\left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|^{-\alpha}+n^{\alpha}\right)\left(2^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\sin\frac{t}{2}\right|^{-\alpha}+n^{\alpha}\right)\right\}. \tag{18}$$

К правой части (18) применим неравенство

$$b^{-\alpha}+c^{-\alpha}\leqslant C_{16}(\alpha)\,(b+c)^{-\alpha}.$$

Это даст, что

$$n^{-1}\left|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)\right|\leqslant C_{17}(\alpha)\left[\sqrt{2}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|+n^{-1}\right]^{-\alpha}\times$$

$$\times\left[\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\right|+n^{-1}\Big]^{-\alpha}.$$

Поэтому

$$n^{-1}\left|K_{n-1}(e^{i\theta}, e^{it}; \varphi_\alpha)\right|\leqslant C_{18}(\alpha)\, u_{n,-\alpha}(\theta)\, u_{n,-\alpha}(t),$$

что и требовалось доказать. Применим (17), тогда

$$\int_{e_0}\left|K_{n-1}(e^{i\theta_0}, e^{it}; \varphi_\alpha)\right|\,\omega(|t-\theta_0|)\,\frac{u_{n-1}(\theta_0)}{u_{n-1}(t)}\,\varphi_\alpha(t)\,dt\leqslant$$

$$\leqslant C_{18}\int_{e_0}(1-\cos t)^{\alpha}\,u_{n-1,2\alpha}(t)\,\frac{\omega(|t-\theta_0|)\,dt}{\frac{1}{2}\left|\sin\frac{t-\theta_0}{2}\right|+n^{-1}}. \tag{19}$$

Интеграл в правой части (19) разложим на два: $J_{1,0}$ и $J_{2,0}$ соответственно по множествам $e_1=e_0\cap\{t\colon t>(n-1)^{-1}\}$ и $e_2=e_0\setminus e_1$. Поскольку $x^{\alpha}\uparrow$ $(x>0,\ \alpha>0)$, то для $t\in e_1$ имеем

$$u_{n-1,-2\alpha}(t)\leqslant\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^{-2\alpha}\leqslant C_{19}(\alpha)\,t^{-2\alpha}$$

и

$$J_{1,0} \leqslant \rho_n C_{20}(\alpha) \int\limits_{e_1} \frac{\omega(|t-\theta_0|)\, dt}{\frac{\pi}{2}|t-\theta_0|+(n-1)^{-1}} \leqslant \rho_n C_{21}(\alpha) \int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(t, H)}{t}\, dt.$$

Для $t \in e_2$: $t < (n-1)^{-1}$ и $u_{n-1,\,-2\alpha}(t) \leqslant C_{22}(n-1)^{2\alpha}$.

Поэтому

$$J_{2,0} \leqslant \rho_n C_{23}(\alpha)(n-1)^{2\alpha+1}\omega(\delta, H) \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \left(\sin\frac{t}{2}\right)^{2\alpha} dt \leqslant \rho_n C_{24}(\alpha)\,\omega(\delta, H).$$

Итак, в случае (II)

$$J_2^{(0)} \leqslant \rho_n \left\{ C_{24}(\alpha)\,\omega(\delta, H) + C_{21}(\alpha) \int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(t, H)}{t}\, dt \right\},$$

но

$$\omega(\delta, H) \leqslant 2(\ln 2)^{-1} \int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(t, H)}{t}\, dt.$$

Поэтому

$$J_2^{(0)} \leqslant \rho_n C_{25}(\alpha) \int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(t, H)}{t}\, dt.$$

Теперь выберем δ из условия, чтобы

$$\int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(t, H)}{t}\, dt \leqslant (2C_6 C_{25}(\alpha))^{-1}.$$

Исходя из (10) и (13), получим $\rho_n \leqslant C_{26}$. Лемма 2 полностью доказана.

Лемма 3. (см. [6]). Пусть $\varphi(\theta)$ и $\psi(\theta)$ — два веса, $h(\theta) = \psi(\theta)/\varphi(\theta)$. Тогда найдутся такие натуральные числа N и N_1, что для произвольного многочлена $\pi_N(z)$ с $\pi_N(a) \neq 0$ ($|a| = 1$) имеет место неравенство

$$|\pi_N(a)\,\varphi_n(a)| \leqslant \sum_{\nu=n-N_1}^{n+N} |\psi_\nu(a)|\,\|\psi_\nu\,\overline{\pi_N}\,h\|_{2,\psi} +$$

$$+ \|K_{n-N_1-1}(a, z; \psi)\,\pi_{N_1}(z)\,[U(\theta) - U(\alpha)]\|_{2,\psi}, \tag{20}$$

где

$$U(\theta) = \overline{\pi_N(z)}\,[\pi_{N_1}(z)]^{-1}\, h(\theta),\ z = e^{i\theta},\ a = e^{i\alpha}.$$

Лемма 4. *Пусть*

$$\varphi(\theta) = H(\theta) \prod_{j=1}^{p} |z - z_j|^{2\alpha_j}, \quad \psi(\theta) = H(\theta) |z - z_k|^{2\alpha_k}, \quad z_j = e^{i\theta_j}, \ 2\alpha_j > -1,$$

$$-\infty < \theta < \infty, \ 2\pi m < \theta_1 < \theta_2 < \cdots \theta_p < 2\pi(m+1), \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

$$0 < H(\theta) \in C_{2\pi}. \tag{21}$$

Тогда для $\theta_k - \varepsilon_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_k + \varepsilon_2$ ($[\theta_k - \varepsilon_1, \theta_k + \varepsilon_2]$ *не содержит точек, сравнимых по модулю* 2π *с точками* $\theta_j \neq \theta_k$) *имеем*

$$|\varphi_n(e^{i\theta})| \leqslant C_{27}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \sum_{\nu=n-N_1}^{n+N} |\psi_\nu(e^{i\theta})| \ (n \geqslant n_0 > 2), \tag{22}$$

где $N_1 = n_1 + \cdots + n_{k-1} + n_{k+1} + \cdots + n_p$, $N_2 = m_1 + \cdots + m_{k-1} + m_{k+1} + \cdots + m_p$, $N = N_1 + N_2$,

n_j, m_j — *неотрицательные числа такие, что* $n_j - 2\alpha_j \geqslant 1$, $n_j + m_j - \alpha_j \geqslant 0$, $j = \overline{1, p}$, $\{\psi_\nu(e^{i\theta})\}_0^\infty$ — *о.н.м., соответствующие весу* $\psi(\theta)$.

Доказательство. Введем многочлены

$$\pi_{N_1}(z) = \prod_{j=1}^{p}{}' (z - z_j)^{n_j}, \quad \pi_{N_2}(z) = \prod_{j=1}^{p}{}' (z - z_j)^{m_j}, \quad \pi_N(z) = \pi_{N_1}(z)\, \pi_{N_2}(z).$$

Очевидно

$$\overline{\pi_N(z)} = \prod_{j=1}^{p}{}' (e^{-i\theta} - e^{-i\theta_j})^{n_j + m_j} = (-1)^N \prod_{j=1}^{p}{}' (e^{i\theta} - e^{i\theta_j})^{n_j + m_j} e^{-iN\theta} \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon = e^{-\sum\limits_{j=1}^{p}{}' (m_j + n_j)\theta_j}, \quad |\pi_{N_1}(z)|^{-1} = \prod_{j=1}^{p}{}' (e^{i\theta} - e^{i\theta_j})^{-n_j}, \ h(\theta) =$$

$$= \prod_{j=1}^{p}{}' |e^{i\theta} - e^{i\theta_j}|^{-2\alpha_j}.$$

Штрих означает, что отсутствует множитель в произведении или слагаемое в сумме, соответствующие значению $j = k$.

По определению

$$U(\theta) = \overline{\pi_N(z)}\, |\pi_{N_1}(z)|^{-1} h(\theta) = (-1)^N e^{-iN\theta} \prod_{j=1}^{p}{}' (e^{i\theta} - e^{i\theta_j})^{m_j} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{p}{}' |e^{i\theta} - e^{i\theta_j}|^{-2\alpha_j} \varepsilon.$$

Так как

$$\prod_{j=1}^{p}{}' (e^{i\theta} - e^{i\theta_j})^{m_j} = 2^{N_2} e^{\frac{i}{2}\left[(\pi+\theta) N_2 + \sum\limits_{j=1}^{p}{}' m_j \theta_j\right]} \prod_{j=1}^{p}{}' \left(\sin \frac{\theta - \theta_j}{2}\right)^{m_j},$$

$$\prod_{j=1}^{p}{}' |e^{i\theta} - e^{i\theta_j}|^{-2\alpha_j} = 2^{-2\sum_{j=1}^{p}{}'\alpha_j} \prod_{j=1}^{p}{}' \left|\sin\frac{\theta-\theta_j}{2}\right|^{-2\alpha_j},$$

то

$$U(\theta) = (-1)^N 2^{N_2 - 2\sum_{j=1}^{p}{}'\alpha_j} e^{-iN\theta + \frac{i}{2}\left[N_2(\pi+\theta) + \sum_{j=1}^{p}{}' m_j\theta_j\right]} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{p}{}' \left(\sin\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)^{n_j} \prod_{j=1}^{p}{}' \left|\sin\frac{\theta-\theta_j}{2}\right|^{-2\alpha_j} \varepsilon.$$

Выберем n_j так, чтобы $n_j - 2\alpha_j > 1$, $j=\overline{1, p}$. Тогда $|U'(\theta)| \leqslant C_{28}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Считая, что θ и $\alpha \in [0, \pi]$ или $\theta, \alpha \in [\pi, 2\pi]$, будем иметь по формуле Лагранжа и неравенству для $\sin\theta$:

$$|U(\theta) - U(\alpha)| \leqslant 2C_{28}\left|\frac{\theta-\alpha}{2}\right| < \pi C_{28}\left|\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\right|. \tag{23}$$

На случай, когда $\theta \in [0, \pi]$, $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ или $\theta \in [\pi, 2\pi]$, $\alpha \in [0, \pi]$, оценка (23) получается путем введения промежуточной точки $\theta = \pi$. Итак, можно считать, что

$$|U(\theta) - U(\alpha)| \left|\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\right|^{-1} \leqslant C_{29};\ \theta, \alpha \in [0, 2\pi]. \tag{24}$$

То же будет для $\theta, \alpha \in [2\pi m, 2\pi(m+1)]$, $m = \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Применяя формулу Кристоффеля-Дарбу, получим

$$|K_n(e^{i\theta}, e^{i\alpha}, \psi)| \left|\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\right| \leqslant |\varphi_{n+1}(e^{i\theta})|\,|\varphi_{n+1}(e^{i\alpha})|. \tag{25}$$

Так как $|\pi_{N_1}(z)| \leqslant C_{30}$ $(2\pi m \leqslant \theta \leqslant 2\pi(m+1))$, то в силу (24) и (25) второе слагаемое в (20) будет меньше, чем

$$C_{31}|\varphi_{n-N_1}(e^{i\alpha})|\,\|\varphi_{n-N_1}(e^{i\theta})\,\pi_{N_1}(e^{i\theta})\|_{2,\psi} =$$

$$= C_{31}|\varphi_{n-N_1}(e^{i\alpha})| \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi_{n-N_1}(e^{i\theta})|^2 \psi(\theta)\ |\pi_{N_1}(e^{i\theta})|^2 \prod_{j=1}^{p} |e^{i\theta} - e^{i\theta_j}|^{2\alpha_j}\, d\theta\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как $2n_j + 2\alpha_j > 0$, то

$$|\pi_{N_1}(e^{i\theta})|^2 \prod_{j=1}^{p}{}' |e^{i\theta} - e^{i\theta_j}|^{2\alpha_j} \leqslant C_{32}$$

и второе слагаемое правой части (20) меньше, чем $C_{33}|\varphi_{n-N_1}(e^{i\theta})|$. Займемся первым слагаемым правой части (20).

Имеем

$$|\pi_N(e^{i\theta})| = 2^N \prod_{j=1}^{p}{}' \left|\sin\frac{\theta-\theta_j}{2}\right|^{n_j+m_j},$$

$$\|\psi_\nu \bar{\pi}_N h\|_{2,\psi} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\psi_\nu (e^{i\theta})|^2 |\pi_N (e^{i\theta})|^2 h^2 (\theta) \psi (\theta) d\theta \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Но

$$|\pi_N (e^{i\theta})|^2 h^2 (\theta) = 2^{4N-4\sum\limits_{j=1}^{p}{}' \alpha_j} \prod_{j=1}^{p}{}' \left| \sin \frac{\theta - \theta_j}{2} \right|^{2 (n_j + m_j - 2\alpha_j)}.$$

Выберем m_j так, чтобы $n_j + m_j - 2\alpha_j \geqslant 0$. Тогда $|\pi_N (e^{i\theta})|^2 h^2 (\theta) \leqslant C_{34}$. Итак

$$\|\psi_\nu \bar{\pi}_N h\|_{2,\psi} \leqslant C_{34} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |\psi_\nu (e^{i\theta})|^2 \psi (\theta) d\theta \right\}^{\frac{1}{2}} = C_{34}.$$

Поскольку $|\pi_N (e^{i\theta})| \geqslant C_{35} (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ при $\theta_k - \varepsilon_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_k + \varepsilon_2$, то тем самым лемма 4 доказана.

Теорема. *Пусть вес*

$$\Phi (\theta) = H(\theta) \prod_{j=1}^{p} |e^{i\theta} - e^{i\theta_j}|^{2\alpha_j},\ 0 < H (\theta) \in Z_{2\pi},\ -1 < 2\alpha_j,\ j = \overline{1, p},$$

$$-\infty < \theta < \infty,\ 2\pi m \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_p < 2\pi (m+1),\ m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

Тогда на всяком отрезке $[\theta_k - \varepsilon_1, \theta_k + \varepsilon_2]$, *не содержащем точек, сравнимых по модулю* 2π *с особыми точками* $\theta_j \neq \theta_k$, *имеем для всех* $n \geqslant 2$ *оценки*

$$|\Phi_n (e^{i\theta})| \leqslant C_{36} (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \{ \sqrt{1 - \cos (\theta - \theta_k)} + n^{-1} \}^{-\alpha_k}. \tag{26}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим $n \geqslant n_0 + 1$, где $n_0 = \mathrm{Max}\, \{N, 2N_1\}$*. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\theta_k = 0$, $\alpha_k = \alpha$. Положим $\psi (\theta) = H (\theta)(1 - \cos \theta)^\alpha$. Тогда по лемме 2

$$|\psi_\nu (e^{i\theta})| \leqslant C_{37} (\lambda_\theta + \nu^{-1})^{-\alpha},\ \nu \geqslant 2. \tag{27}$$

Применим лемму 4 и оценим слагаемые с индексами $\nu = n + L$, где $L = \overline{0, N}$. Поскольку $\lambda_\theta + (n + L)^{-1} < \lambda_\theta + n^{-1}$, то при $\alpha > 0$ имеем

$$[\lambda_\theta + (n + L)^{-1}]^\alpha < (\lambda_\theta + n^{-1})^\alpha. \tag{28$_1$}$$

Так как $\lambda_\theta + (n + L)^{-1} > \frac{1}{2} (\lambda_\theta + n^{-1})$ при $n > N$, то

$$[\lambda_\theta + (n + L)^{-1}]^{-\alpha} < 2^\alpha (\lambda_\theta + n^{-1})^{-\alpha}. \tag{28$_2$}$$

Оценим слагаемые с индексами $\nu = n - l$, $l = \overline{1, N_1}$. Имеем $\lambda_\theta + (n - l)^{-1} > \lambda_\theta + n^{-1}$. Поэтому

---

* Натуральные числа N и N_1 определены в лемме 4.

$$[\lambda_0+(n-l)^{-1}]^{-\alpha}<[\lambda_0+n^{-1}]^{-\alpha}. \qquad (28_3)$$

Так как $\lambda_0+(n-l)^{-1}<2(\lambda_0+n^{-1})$, то при $\alpha>0$, $n\geqslant 2N_1$ имеем

$$[\lambda_0+(n-l)^{-1}]^{\alpha}<2^{\alpha}(\lambda_0+n^{-1})^{\alpha}. \qquad (28_4)$$

Для $0<n\leqslant n_0$ многочлены $|\Phi_n(e^{i\theta})|_0^{n_0}$ ограничены и поэтому можно считать, что неравенство (26) с соответствующей постоянной C_{36} имеет место и для $n\leqslant n_0$.

Применяя лемму 4 и оценки $(28_1)-(28_4)$, получим оценку (26). Тем самым теорема полностью доказана.

Замечание 1. *В случае $H(\theta)\in \mathrm{Lip}\,1$ (: $f(\theta)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, если $f(\theta)\in C_{2\pi}$ и $\omega(\delta, f)=O(\delta^{\alpha})$, $0<\alpha\leqslant 1$) теорема является следствием леммы 33.2 из [3], которую автор, однако, не доказывает, сообщая лишь в общих чертах идею доказательства.*

Замечание 2. *Развивая метод П. К. Суетина (см. [8]), Н. П. Кривоногов (см. [9]) получил оценку сверху для $|\Phi_n(e^{i\theta})|$ и $|\Phi_n(e^{i\theta_k})|$, для случая, когда $\alpha_k>0$ $(k=\overline{1,p})$, а $0<H(\theta)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$ с $\alpha\geqslant\frac{1}{2}$.*

Замечание 3. *Аналог леммы 2 для о.н.м. на отрезке [—1,1] был доказан впервые В. М. Бадковым (см. [4], лемма 1.3). Для его доказательства приходится рассматривать два случая: когда точка, где достигается*

$$\max_{|x|\leqslant 1}\left|p_n(x)\left(\sqrt{1-x}+n^{-1}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+x}+n^{-1}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}\right|$$

совпадает с концом отрезка [—1,1] и когда она лежит внутри него. Рассмотрение этих случаев (особенно второго) связано со значительными техническими трудностями и применением новых теорем по теории ортогональных многочленов на отрезке [—1,1] (формулы Полларда и др.). Переход к о.н.м. на единичной окружности освобождает нас от необходимости рассмотрения положения экстремальной точки и тем самым делает доказательство леммы 2 технически значительно проще, чем леммы 1.3 из [4]. Теорема настоящей работы, доказательство которой основано на леммах 1—4, является аналогом теоремы 1.1 из [4] и ее доказательство проще, так как здесь не требуется аналога леммы 1.4 из [4], необходимой для случая многочленов, ортонормальных на отрезке [—1,1] и доказываемой технически весьма сложно.

Однако не только этим обусловлена, как нам кажется, важность доказанной теоремы: переход от о.н.м. на отрезке к о.н.м. на единичной окружности с помощью формул (2) возможен только для четных весов. Для произвольного веса требуется самостоятельное доказательство, что и сделано в настоящей работе.

Замечание 4. *Для случая, когда $H(\theta)\in \mathrm{Lip}\,1$, $H(\theta)$, $H^{-1}(\theta)\in L_1(0, 2\pi)$, $H(\theta_0)>0$, $p=1$ и $\alpha_1=\alpha>0$ известно (см. [10]), что* *оценка* (26) *для* $\theta = \theta_0$ *точная. Легко доказать точность этой оценки и для* $2\alpha > -1$. *Думается, что это будет так и в нашем случае, когда* $\Phi(\theta)$ *вида* (3), *однако доказать это нам не удалось.*

Харьковский авиационный
институт

Поступила 5.XI.1976

Բ. Լ. ԳՈԼԻՆՍԿԻ. Միավոր շրջանագծի վրա օրթոգոնալ բազմանդամներ ընդհանրացված Յակոբիի կշռով *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցված է, որ եթե $\Phi(\theta)$ *կշիռը ունի հետևյալ տեսքը*

$$\Phi(\theta) = H(\theta) \prod_{j=1}^{p} |e^{i\theta} - e^{i\theta_j}|^{2\alpha_j}, \; j = \overline{1, p}, \; -\infty < \theta < \infty,$$

$$2\pi m \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_p < 2\pi(m+1), \; m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots; \; 0 < H(\theta) \in Z_{2\pi}$$

$$(: H(\theta) \in C_{2\pi}, \; \omega(t, H)\, t^{-1} \in L_1(0, \pi)),$$

ապա յուրաքանչյուր $[\theta_k - \varepsilon_1, \theta_k + \varepsilon_2]$ *հատվածի վրա* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0)$, *որը չի պարունակում կետեր (համեմատելի* 2π *մոդուլով* $\theta_j \neq \theta_k$ *եզակի կետերի հետ), ունենք բոլոր* $n > 1$ *համար հետևյալ գնահատականներ համապատասխան օրթոգոնալ բազմանդամների համար*

$$|\Phi_n(e^{i\theta})| \leqslant C_{36}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \{\sqrt{1 - \cos(\theta - \theta_k)} + n^{-1}\}^{-\alpha_k}.$$

B. L. GOLINSKIĬ. *Orthogonal polynomials on the unit cyrcle with the generalized Jacoby weight* (summary)

The main result of the paper is as follous.
If the weight is of the form

$$\Phi(\theta) = H(\theta) \prod_{j=1}^{p} |e^{i\theta} - e^{i\theta_j}|^{2\alpha_j}, \; j = \overline{1, p}, \; -\infty < \theta < \infty,$$

$$2\pi m \leqslant \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_p < 2\pi(m+1), \; m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots; \; 0 < H(\theta) \in Z_{2\pi}$$

$$(: H(\theta) \in C_{2\pi}, \; \frac{\omega(t, H)}{t} \in L_1(0, \pi)),$$

then on every closed interval $[\theta_k - \varepsilon_1, \theta_k + \varepsilon_2]$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, which contains no special points $\theta_j \neq \theta_k$ the modulus of the appropriate orthonormal polynomials has the estimate

$$|\Phi_n(e^{i\theta})| \leqslant C_{36}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \{\sqrt{1 - \cos(\theta - \theta_k)} + n^{-1}\}^{-\alpha_k}$$

volid for every $n > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Сеге.* Ортогональные многочлены, М., Физматгиз, 1962.
2. *У. Гренандер, Г. Сеге.* Теплицевы формы и их приложения, ИЛ, М., 1961.
3. *T. Frey.* Publ. math., 7, № 1—4, 1960, 320—352.

4. *В. М. Бадков.* Сходимость в среднем и почти всюду рядов Фурье по многочленам, ортогональным на отрезке, Матем. сб., 95 (137), № 2 (10), 1974, 229—262.

5. *Я. Л. Геронимус.* Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке, Физматгиз, М., 1958.

6. *В. М. Бадков.* Об ограниченности в среднем ортонормированных многочленов, Мат. заметки, 13, № 5, 1973, 759—770.

7. *Б. Л. Голинский.* Уточнения асимптотических формул Г. Сеге и С. Н. Бернштейна, Изв. вузов, Математика, № 11 (78), 1968, 70—82.

8. *П. К. Суетин.* Некоторые свойства многочленов, ортогональных на сегменте Сиб. математ. журнал, 10, № 3, 1969, 653—670.

9. *Н. П. Кривоногов.* Некоторые оценки для ортогональных многочленов в случае алгебраических нулей весовой функции, Применение функционального анализа в теории приближений, Калининский госуниверситет, в. 3, 1974, 44—50.

10. *Б. Л. Голинский.* О проблеме В. А. Стеклова в теории ортогональных многочленов, Мат. заметки, 15, № 1, 1974, 21—32.