ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XIII, № 1, 1978 Математика

И. В. КОВАЛИШИНА, Г. М. ЧУБКОВА-ВИДОВА

ПРОБЛЕМА НЕВАНЛИННЫ-ПИКА ДЛЯ НЕВАНЛИННОВСКИХ СИММЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ В ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Введение

Основы общей теории аналитических J-нерастягивающих матриц-функций впервые были изложены В. П. Потаповым в его диссертации, опубликованной в 1955 году [4]. Аналитические J-нерастягивающие матрицы-функции сразу же нашли применение в теории линейных операторов в гильбертовом пространстве: введенная В. С. Лившицем характеристическая матрица-функция несамосопряженного оператора является J-нерастягивающей.

Следующим этапом в развитии теории явились исследования В. П. Потапова и его сотрудников по аналитической теории электрических цепей [6]. Одним из важнейших установленных здесь фактов является то, что при естественном дополнительном требовании вещественности $w(\lambda)$ на вещественной оси объекты теории становятся физичными: каждая такая рациональная J-растягивающая матрица-функция при $J=\begin{vmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{vmatrix}$ является проходной матрицей пассивного $4m$-полюсника с сосредоточенными параметрами, и наоборот. Тем самым теория J-растягивающих матриц-функций стала одним из математических проявлений закона сохранения энергии.

С другой стороны, в конце 60-х годов профессором В. П. Потаповым был намечен перспективный план исследований по применению теории аналитических J-растягивающих матриц-функций к решению классических задач анализа. Под этим общим названием объединены задачи Шура, Неванлинны—Пика, Лёвнера, Каратеодори, Каратеодори — Фейера, проблемы моментов Стилтьеса, Гамбургера, Хаусдорфа, задачи о продолжении эрмитово-положительных функций, абсолютно монотонных функций и др.

Исследования, проведенные по этому плану, показали, что все эти разнородные по своей постановке задачи следует рассматривать как задачи теории J-растягивающих матриц-функций. В самом деле, для всех этих задач характерно появление в заключительной фазе или на решающем этапе исследования функций $w(z)$ определенного класса (чаще всего неванлинновских), являющихся либо прямо либо опосредствовано решением поставленной задачи. В случае множественности решений совокупность всех таких функций $w(z)$ описывается дробно-линейным преобразованием

$$w(z)=[a(z)\,\omega(z)+b(z)][c(z)\,\omega(z)+d(z)]^{-1}$$

матрица коэффициентов которого

$$\mathbf{A}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix}$$

строится по данным задачи и является одним из объектов теории J-растягивающих матриц-функций, а параметр является произвольной неванлинновской функцией.

Ценность исследований в области электрических цепей и классических задач состоит не только в построении аналитической теории электрических цепей и решений всех классических задач методами теории J-растягивающих матриц-функций, но также и в обогащении самой теории новыми фактами.

Так теория электрических цепей привела к появлению групповой элементарной матрицы-функции и ее частных случаев—вещественной, симплектической и реактивной матриц-функций. Описание структуры групповой матрицы-функции, и особенно ее частных случаев, потребовало преодоления значительных аналитических трудностей. Решение задач Шура, Каратеодори и проблемы моментов привело к созданию целой теории еше одного J-растягивающего объекта—так называемого кратного множителя [7].

Настоящая работа состоит из двух частей: в первой—изучается частный случай групповой элементарной матрицы-функции $\mathbf{A}(z)$ порядка $2m$, обладающей дополнительно свойством симплектичности, то есть матрицы-функции, удовлетворяющей следующим трем условиям:

$$1)\ \mathbf{A}(z)\,J_2\mathbf{A}^*(z)-J_2>0,\ \operatorname{Jm} z>0,\ J_2=\begin{bmatrix} 0 & -iI_m \\ iI_m & 0 \end{bmatrix},$$

$$2)\ \mathbf{A}(z)\,J_2\mathbf{A}^*(z)=J_2,\ \operatorname{Jm} z=0,$$

$$3)\ \mathbf{A}'(z)\,J_2\,\mathbf{A}(z)=J_2.$$

Матрицу-функцию $\mathbf{A}(z)$ будем называть *элементарной симплектичной.*

Полученные здесь результаты о структуре, отщеплении, параметризации $\mathbf{A}(z)$ полного ранга являются вкладом в общую теорию J-растягивающих матриц-функций и, кроме того, могут быть полезными в теории электрических цепей.

Вторая часть работы посвящена постановке и решению частной проблемы Неванлинны—Пика для матриц m-го порядка, когда в узлах интерполяции заданы значения искомой функции $w(z)$

$$w(z_j)=w_j\ (j=1,2,\cdots)$$

и значения ее производных

$$\dot{w}(z_j) = \dot{w}_j.$$

Итоги проведенного в этой части исследования являются еще одним свидетельством мощности методов теории J-растягивающих матриц-функций, позволяющих совершенно *единообразно* решить любую классическую задачу.

§ 1. Элементарные симплектические матрицы-функции

Пусть J_2-растягивающая в верхней полуплоскости матрица-функция $w(z)$ имеет полюсы в точках

$$z_1,\ \bar{z}_1;\ z_2,\ \bar{z}_2,\ \cdots,\ z_n,\ \bar{z}_n$$

порядков $s_1, s_2, \cdots, s_n$ соответственно, и пусть

$$w(z) = \frac{2i\tau_k c_k}{(z-z_k)^{s_k}} + \frac{d_k}{(z-z_k)^{s_{k-1}}} + \cdots \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

$$w(z) = -\frac{2i\tau_k \bar{c}_k}{(z-\bar{z}_k)^{s_k}} + \frac{\bar{d}_k}{(z-\bar{z}_k)^{s_{k-1}}} + \cdots, \quad Jm\, z_k = \tau_k \neq 0$$

ее лорановы разложения.

Тогда основное матричное неравенство [7] для $w(z)$ имеет вид (см. стр. 64)

Элементарная симплектическая матрица-функция $\omega(z)$ с полюсами в точках $z_k, \bar{z}_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, нормированная равенством $\omega(\infty) = I$, может быть записана следующим образом

$$\omega(z) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k a_k}{z - z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k \bar{a}_k}{z - \bar{z}_k}, \quad z_k = \sigma_k + i\tau_k,\ \tau_k \neq 0, \tag{1}$$

а ее структура характеризуется теоремой:

Теорема 1. *Матрица-функция* (1) *является элементарной в том и только в том случае, когда выполнены следующие два условия:*

$$A = \begin{bmatrix} 2\tau_1 a_1^* J_2 a_1 & 2\tau_1 a_1^* J_2 \bar{b}_1 \cdots & \dfrac{4\tau_1\tau_n a_1^* J_2 a_n}{\frac{z_n - \bar{z}_1}{i}} & -\dfrac{4\tau_1\tau_n a_1^* J_2 \bar{a}_n}{\frac{\bar{z}_n - \bar{z}_1}{i}} \\ -2\tau_1 \bar{a}_1^* J_2 b_1 & -2\tau_1 \bar{a}_2^* J_2 \bar{a}_1 \cdots & -\dfrac{4\tau_1\tau_n \bar{a}_1^* J_2 a_n}{\frac{z_n - z_1}{i}} & \dfrac{4\tau_1\tau_n \bar{a}_1^* J_2 a_n}{\frac{\bar{z}_n - z_1}{i}} \\ \sim\ \sim\ \sim & \sim\ \sim\ \sim & \sim\ \sim\ \sim & \sim\ \sim\ \sim \\ \dfrac{4\tau_n\tau_1 a_n^* J_2 a_1}{\frac{z_1 - \bar{z}_n}{i}} & -\dfrac{4\tau_n\tau_1 a_n^* J_2 \bar{a}_1}{\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_n}{i}} \cdots & 2\tau_n a_n^* J_2 a_n & 2\tau_n a_n^* J_2 \bar{b}_n \\ -\dfrac{4\tau_n\tau_1 \bar{a}_n^* J_2 v_1}{\frac{z_1 - z_n}{i}} & \dfrac{4\tau_n\tau_1 \bar{a}_n^* J_2 \bar{a}_1}{\frac{\bar{z}_1 - z_n}{i}} \cdots & -2\tau_n \bar{a}_n^* J_2 b_n & -2\tau_n \bar{a}_n^* J_2 \bar{a}_n \end{bmatrix} \geqslant 0$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B^* & C \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{ccccc|c}
2\tau_1 \dot{c}_1 J_2 c_1 & 2\tau_1 \dot{c}_1 J_2 \bar{d}_1 & \cdots & \dfrac{4\tau_1\tau_n \dot{c}_1 J_2 c_n}{\frac{z_n - \bar{z}_1}{i}} & -\dfrac{4\tau_1\tau_n \dot{c}_1 J_2 \bar{c}_n}{\frac{\bar{z}_n - z_1}{i}} & \dfrac{2\tau_1 \dot{c}_1}{\bar{z} - \bar{z}_1} \\
-2\tau_1 \bar{\dot{c}}_1 J_2 d_1 & -2\tau_1 \bar{\dot{c}}_1 J_2 \bar{c}_1 & \cdots & -\dfrac{4\tau_1\tau_n \bar{\dot{c}}_1 J_2 c_n}{\frac{z_n - z_1}{i}} & \dfrac{4\tau_1\tau_n \bar{\dot{c}}_1 J_2 \bar{c}_n}{\frac{\bar{z}_n - z_1}{i}} & -\dfrac{2\tau_1 \bar{\dot{c}}_1}{\bar{z} - z_1} \\
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\
\dfrac{4\tau_n\tau_1 \dot{c}_n J_2 c_1}{\frac{z_1 - \bar{z}_n}{i}} & -\dfrac{4\tau_n\tau_1 \dot{c}_n J_2 \bar{c}_1}{\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_n}{i}} & \cdots & 2\tau_n \dot{c}_n J_2 c_n & 2\tau_n \dot{c}_n J_2 \bar{d}_n & \dfrac{2\tau_n \dot{c}_n}{\bar{z} - \bar{z}_n} \\
-\dfrac{4\tau_n\tau_1 \bar{\dot{c}}_n J_2 c_1}{\frac{z_1 - z_n}{i}} & \dfrac{4\tau_n\tau_1 \bar{\dot{c}}_n J_2 \bar{c}_1}{\frac{\bar{z}_1 - z_n}{i}} & \cdots & -2\tau_n \bar{\dot{c}}_n J_2 d_n & -2\tau_n \bar{\dot{c}}_n J_2 \bar{c}_n & -\dfrac{2\tau_n \bar{\dot{c}}_n}{\bar{z} - z_n} \\
\hline
-\dfrac{2\tau_1 c_1}{z_1 - z} & \dfrac{2\tau_1 \bar{c}_1}{\bar{z}_1 - z} & \cdots & -\dfrac{2\tau_n c_n}{z_n - z} & \dfrac{2\tau_n \bar{c}_n}{\bar{z}_n - z} & \dfrac{w(z) J_2 w^*(z) - J_2}{\frac{z - \bar{z}}{i}}
\end{array}\right] \geqslant 0$$

Справедливо и дуальное неравенство.

$$(B)\begin{cases} \overline{a}_k^* J_2 a_k = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \\ [2\tau_1 J_2 a_1, -2\tau_1 J_2 \overline{a}_1, \cdots, 2\tau_n J_2 a_n, -2\tau_n J_2 \overline{a}_n] = [I, I, \cdots, I, I]A, \end{cases}$$

где

$$b_k = I + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{2i\tau_j a_j}{z_k - z_j} - \sum_{j=1}^{n} \frac{2i\tau_j \overline{a}_j}{z_k - \overline{z}_j}.$$

При этом J_2-форма элементарной функции представляется в виде

$$(C)\ \frac{\omega^*(z) J_2 \omega(z) - J_2}{\dfrac{z - \overline{z}}{i}} = \left[\frac{I}{\overline{z} - \overline{z}_1}, \frac{I}{\overline{z} - z_1}, \cdots, \frac{I}{\overline{z} - \overline{z}_n}, \frac{I}{\overline{z} - z_n}\right] A \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z - z_1} \\ \dfrac{I}{z - \overline{z}_1} \\ \sim\sim \\ \dfrac{I}{z - z_n} \\ \dfrac{I}{z - \overline{z}_n} \end{bmatrix}.$$

Имеет место также

Теорема 2. (об отщеплении элементарных множителей). *Пусть матрица-функция $w(z)$ имеет полюсы в точках*

$$z_1, \overline{z}_1, z_2, \overline{z}_2, \cdots, z_n, \overline{z}_n \quad (\operatorname{Im} z_k = \tau_k \neq 0)$$

со следующими лорановыми разложениями:

$$w(z) = \frac{2i\tau_k c_k}{(z - z_k)^{s_k}} + \frac{d_k}{(z - z_k)^{s_k - 1}} + \cdots,$$

$$w(z) = -\frac{2i\tau_k \overline{c}_k}{(z - \overline{z}_k)^{s_k}} + \frac{\overline{d}_k}{(z - \overline{z}_k)^{s_k - 1}} + \cdots,$$

и пусть матрицы $X_1, X_2, \cdots, X_{2n-1}, X_{2n}$ найдены из уравнения

$$AQ = Z$$

$$\begin{bmatrix} 2\tau_1 c_1^* J_2 c_1 & 2\tau_1 c_1^* \overline{d}_1 & \cdots & \dfrac{4\tau_1\tau_n c_1^* J_2 c_n}{\dfrac{z_n - \overline{z}_1}{i}} & -\dfrac{4\tau_1\tau_n c_1^* J_2 \overline{c}_n}{\dfrac{\overline{z}_n - \overline{z}_1}{i}} \\ -2\tau_1 \overline{c}_1^* J_2 d_1 & -2\tau_1 \overline{c}_1^* J_2 \overline{c}_1 & \cdots & -\dfrac{4\tau_1\tau_n \overline{c}_1^* J_2 c_n}{\dfrac{z_n - z_1}{i}} & \dfrac{4\tau_1\tau_n \overline{c}_1^* J_2 \overline{c}_n}{\dfrac{\overline{z}_n - z_1}{i}} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \dfrac{4\tau_n\tau_1 c_n^* J_2 c_1}{\dfrac{z_1 - \overline{z}_n}{i}} & -\dfrac{4\tau_n\tau_1 c_n^* J_2 \overline{c}_1}{\dfrac{\overline{z}_1 - \overline{z}_n}{i}} & \cdots & 2\tau_n c_n^* J_2 c_n & 2\tau_n c_n^* J_2 \overline{d}_n \\ -\dfrac{4\tau_n\tau_1 \overline{c}_n^* J_2 c_1}{\dfrac{z_1 - z_n}{i}} & \dfrac{4\tau_n\tau_1 \overline{c}_n^* J_2 \overline{c}_1}{\dfrac{\overline{z}_1 - z_n}{i}} & \cdots & -2\tau_n \overline{c}_n^* J_2 d_n & -2\tau_n c^* J_2 \overline{c}_n \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,\,2n-1} & q_{1,\,2n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2,\,2n-1} & q_{2,\,2n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ q_{2n-1,\,1} & q_{2n-1,\,2} & \cdots & q_{2n-1,\,2n-1} & q_{2n-1,\,2n} \\ q_{2n,\,1} & q_{2n,\,2} & \cdots & q_{2n,\,2n-1} & q_{2n,\,2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\tau_1 c_1^* \\ -2\tau_1 \bar{c}_1^* \\ \vdots \\ 2\tau_n c_n^* \\ -2\tau_n \bar{c}_n^* \end{bmatrix}$$

по формулам

$$\begin{aligned} &q_{11} + q_{12} + \cdots + q_{1,\,2n-1} + q_{1,\,2n} = X_1, \\ &q_{21} + q_{22} + \cdots + q_{2,\,2n-1} + q_{2,\,2n} = X_2, \\ &\sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \sim \\ &q_{2n-1,\,1} + q_{2n-1,\,2} + \cdots + q_{2n-1,\,2n-1} + q_{2n-1,\,2n} = X_{2n-1}, \\ &q_{2n,\,1} + q_{2n,\,2} + \cdots + q_{2n,\,2n-1} + q_{2n,\,2n} = X_{2n}. \end{aligned}$$

Тогда

1) *матрица-функция*

$$\omega(z) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k c_k X_{2k-1} J_2}{z - z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k \bar{c}_k X_{2k} J_2}{z - \bar{z}_k}$$

является элементарной;

2) $\omega(z)$ *отщепляется от* $w(z)$ *слева*

$$w(z) = \omega(z) \cdot w_1(z);$$

3) *при этом отщеплении порядки полюсов в точках*

$$z_1,\ \bar{z}_1,\ z_2,\ \bar{z}_2, \cdots, z_n,\ \bar{z}_n$$

у частного $w_1(z)$ *понижаются на единицу;*

4) *порядки полюсов обратной матрицы* $w_1^{-1}(z)$ *не повышаются.*

Замечание 1. Пусть

$$\omega(z) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k a_k}{z - z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k \bar{a}_k}{z - \bar{z}_k} = \frac{2i\tau_k a_k}{z - z_k} + b_k + \cdots$$

— элементарная матрица-функция и (см. стр. 54) соответствующее ей основное матричное неравенство отщепления.

Сейчас третье условие леммы о блок-матрице [4] имеет вид

$$C - X^* A X = 0$$

и означает, что построенный по формулам теоремы 2 элементарный множитель

$$\hat{\omega}(z) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k \hat{a}_k}{z - z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k \bar{\hat{a}}_k}{z - \bar{z}_k}$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B^* & C \end{vmatrix} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 2\tau_1 \dot{a}_1 J_2 a_1 & 2\tau_1 \dot{a}_1 J_2 \bar{b}_1 & \cdots & \dfrac{4\tau_1 \tau_n \dot{a}_1 J_2 a_n}{\frac{\bar{z}_n - z_1}{i}} & - & \dfrac{4\tau_n \tau_1 \dot{a}_1 J_3 \bar{a}_n}{\frac{\bar{z}_n - z_1}{i}} & \dfrac{2\tau_1 a_1^*}{\bar{z} - \bar{z}_1} \\ -2\tau_1 \bar{\dot{a}}_1 J_2 b_1 & -2\tau_1 \bar{a}_1 J_2 \bar{a}_1 & \cdots & -\dfrac{4\tau_1 \tau_n \bar{\dot{a}}_1 J_2 a_n}{\frac{\bar{z}_n - z_1}{i}} & & \dfrac{4\tau_1 \tau_n \bar{\dot{a}}_1 J_2 \bar{a}_n}{\frac{\bar{z}_n - z_1}{i}} & -\dfrac{2\tau_1 \bar{\dot{a}}_1}{\bar{z} - z_1} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \\ \hline \dfrac{4\tau_n \tau_1 \dot{a}_n J_2 a_1}{\frac{z_1 - \bar{z}_n}{i}} & -\dfrac{4\tau_n \tau_1 \dot{a}_n J_2 \bar{a}_1}{\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_n}{i}} & \cdots & 2\tau_n \dot{a}_n J_2 a_n & & 2\tau_n \dot{a}_n J_2 \bar{b}_n & \dfrac{2\tau_n \dot{a}_n}{\bar{z} - \bar{z}_n} \\ -\dfrac{4\tau_n \tau_1 \bar{\dot{a}}_n J_2 a_1}{\frac{z_1 - z_n}{i}} & \dfrac{4\tau_n \tau_1 \bar{\dot{a}}_n J_2 \bar{a}_1}{\frac{\bar{z}_1 - z_n}{i}} & \cdots & -2\tau_n \bar{\dot{a}}_n J_2 b_n & & -2\tau_n \bar{\dot{a}}_n J_2 \bar{a}_n & -\dfrac{2\tau_n \bar{\dot{a}}_n}{\bar{z} - z_n} \\ \hline -\dfrac{2\tau_1 a_1}{z_1 - z} & \dfrac{2\tau_1 \bar{a}_1}{\bar{z}_1 - z} & \cdots & -\dfrac{2\tau_n a_n}{z_n - z} & & \dfrac{2\tau_n \bar{a}_n}{\bar{z}_n - z} & \dfrac{\omega(z) J_2 \omega^*(z) - J_2}{\frac{z - \bar{z}}{i}} \end{array}\right] \geqslant 0 \qquad (2)$$

совпадает с $\omega(z)$:

$$\omega(z)=\hat{\omega}(z).$$

Замечание 2. Умножим неравенство (2) для элементарной матрицы-функции справа на

$$T=\begin{bmatrix} S_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & S_2 & \cdots & 0 & 0\\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim\\ 0 & 0 & \cdots & S_{2n} & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I\end{bmatrix}=\begin{vmatrix} S & 0\\ 0 & I\end{vmatrix},$$

слева на T^*, где $S_1, S_2, \cdots, S_{2n}$ — произвольные неособенные матрицы порядка $2m\times 2m$. Описанная в теореме 2 процедура приводит к построению элементарного множителя $\tilde{\omega}(z)$, совпадающего с $\omega(z)$.

Действительно, перепишем неравенство (2) в виде

$$\begin{pmatrix} A & B\\ B^* & C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0\\ X^* & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & C-X^*AX\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & X\\ 0 & I\end{pmatrix}\geq 0.$$

По замечанию I блок $C-X^*AX=0$, поэтому

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A & B\\ B^* & C\end{pmatrix}=\operatorname{rang} A.$$

В новом неравенстве

$$\begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}\\ \tilde{B}^* & C\end{pmatrix}=T^*\begin{pmatrix} A & B\\ B^* & C\end{pmatrix}T=\begin{pmatrix} S^* & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B\\ B^* & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S^*AS & S^*B\\ B^*S & C\end{pmatrix}\geq 0$$

в силу неособенности T

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}\\ \tilde{B}^* & C\end{pmatrix}=\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A & B\\ B^* & C\end{pmatrix}$$

и неособенности S

$$\operatorname{rang}\tilde{A}=\operatorname{rang} A.$$

Следовательно, и сейчас справедливо равенство

$$C-\tilde{X}^*\tilde{A}\tilde{X}=0,$$

что и требовалось.

Среди групповых элементарных матриц-функций

$$\omega(z)=I+\sum_{k=1}^{n}\frac{2i\tau_k a_k}{z-z_k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2i\tau_k\bar{a}_k}{z-\bar{z}_k}$$

особое значение имеют так называемые элементарные матрицы-функции *полного ранга*.

Имеет место общий факт:

Для любой J_2 — растягивающей матрицы-функции

$$w(z) \quad \left(J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -iI_m \\ iI_m & 0 \end{bmatrix} \right)$$

ранг старшего коэффициента лоранового разложения в окрестности некоторого полюса z_k не превосходит m, т. е. если

$$w(z) = \frac{2i\tau_k C_k}{(z - z_k)^{s_k}} + \cdots,$$

то rang $C_k \leqslant m$.

C_k будем называть коэффициентом полного ранга, если rang $C_k = m$.

Элементарную матрицу-функцию

$$\omega(z) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k a_k}{z - z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k \bar{a}_k}{z - \bar{z}_k}$$

будем называть матрицей-функцией полного ранга, если rang $a_k = m$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$.

Существование и структура элементарной матрицы-функции полного ранга устанавливаются следующей теоремой:

Теорема 3. (*о параметризации*). *Если элементарная симплектическая матрица-функция*

$$\omega(z) = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k a_k}{z - z_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2i\tau_k \bar{a}_k}{z - \bar{z}_k}$$

является функцией полного ранга, то для нее единственным образом определяются „параметры“

$$w_1, w_2, \cdots; w_n, \dot{w}_1, \dot{w}_2, \cdots, \dot{w}_n,$$

являющиеся квадратными матрицами m-ого порядка, удовлетворяющими условию

$$A_{2n} = \begin{bmatrix} \dfrac{w_1 - \dot{w}_1}{z_1 - \bar{z}_1} & \dot{w}_1 & \dfrac{w_1 - \dot{w}_2}{z_1 - \bar{z}_2} & \dfrac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2} & \cdots & \dfrac{w_1 - \dot{w}_n}{z_1 - \bar{z}_n} & \dfrac{w_1 - w_n}{z_1 - z_n} \\ \ddot{w}_1 & \dfrac{\dot{w}_1 - w_1}{\bar{z}_1 - z_1} & \dfrac{\dot{w}_1 - \dot{w}_2}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} & \dfrac{\dot{w}_1 - w_2}{\bar{z}_1 - z_2} & \cdots & \dfrac{\dot{w}_1 - \dot{w}_n}{\bar{z}_1 - \bar{z}_n} & \dfrac{\dot{w}_1 - w_n}{\bar{z}_1 - z_n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \dfrac{w_n - \dot{w}_1}{z_n - \bar{z}_1} & \dfrac{w_n - w_1}{z_n - z_1} & \dfrac{w_n - \dot{w}_2}{z_n - \bar{z}_2} & \dfrac{w_n - w_2}{z_n - z_2} & \cdots & \dfrac{w_n - \dot{w}_n}{z_n - \bar{z}_n} & \dot{w}_n \\ \dfrac{\dot{w}_n - \dot{w}_1}{\bar{z}_n - \bar{z}_1} & \dfrac{\dot{w}_n - w_1}{\bar{z}_n - z_1} & \dfrac{\dot{w}_n - \dot{w}_2}{\bar{z}_n - \bar{z}_2} & \dfrac{\dot{w}_n - w_2}{\bar{z}_n - z_2} & \cdots & \ddot{w}_n & \dfrac{\dot{w}_n - w_n}{\bar{z}_n - z_n} \end{bmatrix} > 0,$$

такие, что $\omega(z)$ допускает представление

$$\omega(z)=I+iJ_2[I,\ I,\ \cdots,\ I,\ I]\,H\begin{bmatrix}\dfrac{I}{z-z_1}\\[2mm]\dfrac{I}{z-\bar z_1}\\ \sim\sim\\ \dfrac{I}{z-z_n}\\[2mm]\dfrac{I}{z-\bar z_n}\end{bmatrix}, \tag{3}$$

где

$$H=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1^*\\ I\end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix}w_1\\ I\end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{bmatrix}w_n^*\\ I\end{bmatrix} & \\ & & & & \begin{bmatrix}w_n\\ I\end{bmatrix}\end{bmatrix} A_{2n}^{-1}\begin{bmatrix}[w_1,\ I] & & & & \\ & [w_1^*,\ I] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [w_n,\ I] & \\ & & & & [w_n^*,\ I]\end{bmatrix}.$$

Обратно, любая матрица-функция указанного вида является элементарной симплектической матрицей-функцией полного ранга.

Представление (3) *назовем параметризацией элементарной матрицы-функции полного ранга.*

Доказательство.

1°. Пусть $\omega(z)$ — элементарная симплектическая матрица-функция полного ранга.

Запишем для $\omega(z)$ основное матричное неравенство [7] (см. стр.58).

Пусть неособенные матрицы $S_k^{(1)}$ и $S_k^{(2)}$ $(k=1,2,\cdots,n)$ таковы, что

$$S_k^{(1)}\,2\tau_k\,a_k=\begin{pmatrix}w_k & I\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$S_k^{(2)}\,2\tau_k\,\bar a_k=\begin{pmatrix}w_k^* & I\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Умножим (4) слева на матрицу

$$T=\begin{bmatrix}S_1^{(1)}(\mu_1-z_1)^{s_1} & & & & & \\ & -S_1^{(2)}(\mu_2-\bar z_1)^{s_1} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & S_n^{(1)}(\mu_{2n-1}-z_n)^{s_n} & & \\ & & & & -S_n^{(2)}(\mu_{2n}-\bar z_n)^{s_n} & \\ & & & & & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},$$

$$
\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c}
\dfrac{\omega(\mu_1) J_2 \omega^*(\mu_1) - J_2}{\dfrac{\mu_1 - \bar{\mu}_1}{i}} & \dfrac{\omega(\mu_1) J_2 \omega^*(\mu_2) - J_2}{\dfrac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{i}} & \dots & \dfrac{\omega(\mu_1) J_2 \omega^*(\mu_{2n}) - J_2}{\dfrac{\mu_1 - \bar{\mu}_{2n}}{i}} & \dfrac{\omega(\mu_1) - \omega(z)}{\dfrac{\mu_1 - z}{i}} \\
\dfrac{\omega(\mu_2) J_2 \omega^*(\mu_1) - J_2}{\dfrac{\mu_2 - \bar{\mu}_1}{i}} & \dfrac{\omega(\mu_2) J_2 \omega^*(\mu_2) - J_2}{\dfrac{\mu_2 - \bar{\mu}_2}{i}} & \dots & \dfrac{\omega(\mu_2) J_2 \omega^*(\mu_{2n}) - J_2}{\dfrac{\mu_2 - \bar{\mu}_{2n}}{i}} & \dfrac{\omega(\mu_2) - \omega(z)}{\dfrac{\mu_2 - z}{i}} \\
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\
\dfrac{\omega(\mu_{2n}) J_2 \omega^*(\mu_1) - J_2}{\dfrac{\mu_{2n} - \bar{\mu}_1}{i}} & \dfrac{\omega(\mu_{2n}) J_2 \omega^*(\mu_2) - J_2}{\dfrac{\mu_{2n} - \bar{\mu}_1}{i}} & \dots & \dfrac{\omega(\mu_{2n}) J_2 \omega^*(\mu_{2n}) - J_2}{\dfrac{\mu_{2n} - \bar{\mu}_{2n}}{i}} & \dfrac{\omega(\mu_{2n}) - \omega(z)}{\dfrac{\mu_{2n} - z}{i}} \\
\hline
 & * & & & \dfrac{\omega^*(z) J_2 \omega(z) - J_2}{\dfrac{z - \bar{z}}{i}}
\end{array} \right] > 0. \qquad (4)
$$

справа на T^* и перейдем к пределу при

$$\mu_{2k-1} \to z_k,\ \mu_{2k} \to \bar{z}_k\ (k=1, 2, \cdots, n).$$

Новое неравенство имеет вид

$$T\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} T^* = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{B}^* & C \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{cccccccc|c}
\frac{w_1-\dot{w}_1}{z_1-\bar{z}_1} & 0 & w_1 & 0\cdots & \frac{w_1-\dot{w}_n}{z_1-\bar{z}_n} & 0 & \frac{w_1-w_n}{z_1-z_n} & 0 & \begin{bmatrix} w_1 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{z-z_1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\dot{w}_1 & 0 & \frac{\dot{w}_1-w_1}{\bar{z}_1-z_1} & 0\cdots & \frac{\dot{w}_1-\dot{w}_n}{\bar{z}_1-\bar{z}_n} & 0 & \frac{\dot{w}_1-w_n}{\bar{z}_1-z_n} & 0 & \begin{bmatrix} \dot{w}_1 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{z-\bar{z}_1} \\
0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim\ \sim\ \sim\ \sim \\
\frac{w_n-\dot{w}_1}{z_n-\bar{z}_1} & 0 & \frac{w_n-w_1}{z_n-z_1} & 0\cdots & \frac{w_n-\dot{w}_n}{z_n-\bar{z}_n} & 0 & w_n & 0 & \begin{bmatrix} w_n & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{z-z_n} \\
0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\frac{\dot{w}_n-\dot{w}_1}{\bar{z}_n-\bar{z}_1} & 0 & \frac{\dot{w}_n-w_1}{\bar{z}_n-z_1} & 0\cdots & \dot{w}_n & 0 & \frac{\dot{w}_n-w_n}{\bar{z}_n-z_n} & 0 & \begin{bmatrix} \dot{w}_n & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{z-\bar{z}_n} \\
0 & 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
 & & & * & & & & & \frac{\omega^*(z) J_2 \omega(z) - J_2}{\frac{z-\bar{z}}{i}}
\end{array}\right] \geqslant 0.$$

Формулы теоремы 2 (см. замечание 2) приведут к построению элементарной матрицы-функции $\tilde{\omega}(z)$, совпадающей с $\omega(z)$.

Для этого введем обозначения

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & \begin{bmatrix} \dot{w}_1 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} w_n & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \\ & & & \begin{bmatrix} \dot{w}_n & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I}{z-z_1} \\ \frac{I}{z-\bar{z}_1} \\ \sim\ \sim \\ \frac{I}{z-z_n} \\ \frac{I}{z-\bar{z}_n} \end{bmatrix} = \tilde{Z} \begin{bmatrix} \frac{I}{z-z_1} \\ \frac{I}{z-\bar{z}_1} \\ \sim\ \sim \\ \frac{I}{z-z_n} \\ \frac{I}{z-\bar{z}_n} \end{bmatrix}; \quad \tilde{X} = \tilde{Q} \cdot \begin{bmatrix} \frac{I}{z-z_1} \\ \frac{I}{z-\bar{z}_1} \\ \sim\ \sim \\ \frac{I}{z-z_n} \\ \frac{I}{z-\bar{z}_n} \end{bmatrix}.$$

Известно [7], что уравнение $A\tilde{X} = \tilde{B}$, следовательно и

$$\tilde{A}\tilde{Q} = \tilde{Z}$$

имеет решение, но тогда оно будет иметь и решение вида

$$
Q_0=\begin{bmatrix}
q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,4n} \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
\sim & \sim & \sim & \sim \\
q_{4n-1,1} & q_{4n-1,2} & \cdots & q_{4n-1,4n} \\
0 & 0 & \cdots & 0
\end{bmatrix}.
$$

Равенство

$$\widetilde{A}\,\widetilde{Q}_0=\widetilde{Z}$$

равносильно

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{w_1-\dot{w}_1}{z_1-\overline{z}_1} & w'_1 & \cdots & \dfrac{w_1-\dot{w}_n}{z_1-\overline{z}_n} & \dfrac{w_1-w_n}{z_1-z_n} \\
\dot{w}'_1 & \dfrac{\dot{w}_1-w_1}{\overline{z}-z_1} & \cdots & \dfrac{\dot{w}_1-\dot{w}_n}{\overline{z}_1-\overline{z}_n} & \dfrac{\dot{w}_1-w_n}{\overline{z}_1-z_n} \\
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\
\dfrac{w_n-\dot{w}_1}{z_n-\overline{z}_1} & \dfrac{w_n-w_1}{z_n-z_1} & \cdots & \dfrac{w_n-\dot{w}_n}{z_n-\overline{z}_n} & w'_n \\
\dfrac{\dot{w}_n-\dot{w}_1}{\overline{z}_n-\overline{z}_1} & \dfrac{\dot{w}_n-w_1}{\overline{z}_n-z_1} & \cdots & \dot{w}'_n & \dfrac{\dot{w}_n-w_n}{\overline{z}_n-z_n}
\end{bmatrix}\times
$$

$$
\times\begin{bmatrix}
q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,4n-1} & q_{1,4n} \\
q_{31} & q_{32} & \cdots & q_{3,4n-1} & q_{3,4n} \\
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\
q_{4n-3,1} & q_{4n-3,2} & \cdots & q_{4n-3,4n-1} & q_{4n-3,4n} \\
q_{4n-1,1} & q_{4n-1,2} & \cdots & q_{4n-1,4n-1} & q_{4n-1,4n}
\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
[w_1, I] & & & & \\
& [\dot{w}_1, I] & & & \\
& & \ddots & & \\
& & & [w_n, I] & \\
& & & & [\dot{w}_n, I]
\end{bmatrix}.
$$

Последнее соотношение распадается на два равенства

$$
A_{2n}\cdot\begin{bmatrix}
q_{11} & q_{13} & \cdots & q_{1,4n-1} \\
q_{31} & q_{33} & \cdots & q_{3,4n-1} \\
\sim & \sim & \sim & \sim \\
q_{4n-3,1} & q_{4n-3,3} & \cdots & q_{4n-3,4n-1} \\
q_{4n-1,1} & q_{4n-1,3} & \cdots & q_{4n-1,4n-1}
\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
w_1 & & & & \\
& \dot{w}_1 & & & \\
& & \ddots & & \\
& & & w_n & \\
& & & & \dot{w}_n
\end{bmatrix},
$$

$$
A_{2n}\cdot\begin{bmatrix}
q_{12} & q_{14} & \cdots & q_{1,4n} \\
q_{32} & q_{34} & \cdots & q_{3,4n} \\
\sim & \sim & \sim & \sim \\
q_{4n-3,2} & q_{4n-3,4} & \cdots & q_{4n-3,4n} \\
q_{4n-1,2} & q_{4n-1,4} & \cdots & q_{4n-1,4n}
\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
I & & & & \\
& I & & & \\
& & \ddots & & \\
& & & I & \\
& & & & I
\end{bmatrix}.
$$

Из второго вытекает, что матрица A_{2n} неособенная, поэтому

$$
\begin{bmatrix}
q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,4n-1} & q_{1,4n} \\
q_{31} & q_{32} & \cdots & q_{3,4n-1} & q_{3,4n} \\
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\
q_{4n-3,1} & q_{4n-3,2} & \cdots & q_{4n-3,4n-1} & q_{4n-3,4n} \\
q_{4n-1,1} & q_{4n-1,2} & \cdots & q_{4n-1,4n-1} & q_{4n-1,4n}
\end{bmatrix}=A_{2n}^{-1}\cdot
\begin{bmatrix}
[w_1, I] & & & & \\
& [\dot{w}_1, I] & & & \\
& & \ddots & & \\
& & & [w_n, I] & \\
& & & & [\dot{w}_n, I]
\end{bmatrix}. \tag{5}
$$

Используя правило построения элементарной матрицы-функции $\overline{\omega}(z)$, отщепляющейся от $\omega(z)$ [7], положим

$$[2\tau_1\tilde{a}_1, -2\tau_1 \tilde{\tilde{a}}_1, \cdots, 2\tau_n \tilde{a}_n, -2\tau_n \tilde{\tilde{a}}_n] = J_2\, [I, I, \cdots, I, I]\, \tilde{H},$$

где

$$\tilde{H} = \tilde{Q}_0^* \tilde{A}\, \tilde{Q}_0 = \begin{bmatrix} q^*_{11} & 0 & \cdots & q^*_{4n-1,1} & 0 \\ q^*_{12} & 0 & \cdots & q^*_{4n-1,2} & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ q^*_{1,4n} & 0 & \cdots & q^*_{4n-1,4n} & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{w_1 - w_1^*}{z_1 - \bar{z}_1} & 0 & \dot{w}_1 & 0 & \cdots & \frac{w_1 - w_n^*}{z_1 - \bar{z}_n} & 0 & \frac{w_1 - w_n}{z_1 - z_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dot{w}_1^* & 0 & \frac{w_1^* - w_1}{\bar{z}_1 - z_1} & 0 & \cdots & \frac{w_1^* - w_n^*}{\bar{z}_1 - \bar{z}_n} & 0 & \frac{w_1^* - w_n}{\bar{z}_1 - z_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \frac{w_n - w_1^*}{z_n - \bar{z}_1} & 0 & \frac{w_n - w_1}{z_n - z_1} & 0 & \cdots & \frac{w_n - w_n^*}{z_n - \bar{z}_n} & 0 & \dot{w}_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{w_n^* - w_1^*}{\bar{z}_n - \bar{z}_1} & 0 & \frac{w_n^* - w_1}{\bar{z}_n - z_1} & 0 & \cdots & \dot{w}_n^* & 0 & \frac{w_n^* - w_n}{\bar{z}_n - z_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,4n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ q_{4n-1,1} & q_{4n-1,2} & \cdots & q_{4n-1,4n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} q^*_{11} & q^*_{31} & \cdots & q^*_{4n-3,1} & q^*_{4n-1,1} \\ q^*_{12} & q^*_{32} & \cdots & q^*_{4n-3,2} & q^*_{4n-1,2} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ q^*_{1,4n-1} & q^*_{3,4n-1} & \cdots & q^*_{4n-3,4n-1} & q^*_{4n-1,4n-1} \\ q^*_{1,4n} & q^*_{3,4n} & \cdots & q^*_{4n-3,4n} & q^*_{4n-1,4n} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{w_1 - w_1^*}{z_1 - \bar{z}_1} & \dot{w}_1 & \cdots & \frac{w_1 - w_n^*}{z_1 - \bar{z}_n} & \frac{w_1 - w_n}{z_1 - z_n} \\ \dot{w}_1^* & \frac{w_1^* - w_1}{\bar{z}_1 - z_1} & \cdots & \frac{w_1^* - w_n^*}{\bar{z}_1 - \bar{z}_n} & \frac{w_1^* - w_n}{\bar{z}_1 - z_n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ \frac{w_n - w_1^*}{z_n - \bar{z}_1} & \frac{w_n - w_1}{z_n - z_1} & \cdots & \frac{w_n - w_n^*}{z_n - \bar{z}_n} & \dot{w}_n \\ \frac{w_n^* - w_1^*}{\bar{z}_n - \bar{z}_1} & \frac{w_n^* - w_1}{\bar{z}_n - z_1} & \cdots & \dot{w}_n^* & \frac{w_n^* - w_n}{\bar{z}_n - z_n} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1,\,4n-1} & q_{1,\,4n} \\ q_{31} & q_{32} & \cdots & q_{3,\,4n-1} & q_{3,\,4n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ q_{4n-3,\,1} & q_{4n-3,\,2} & \cdots & q_{4n-3,\,4n-1} & q_{4n-3,\,4n} \\ q_{4n-1,\,1} & q_{4n-1,\,2} & \cdots & q_{4n-1,\,4n-1} & q_{4n-1,\,4n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} w_1^* \\ I \end{vmatrix} & & & & \\ & \begin{vmatrix} w_1 \\ I \end{vmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{vmatrix} w_n^* \\ I \end{vmatrix} & \\ & & & & \begin{vmatrix} w_n \\ I \end{vmatrix} \end{bmatrix} A_{2n}^{-1} \begin{bmatrix} [w_1,\ I] & & & & \\ & [w_1^*,\ I] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [w_n,\ I] & \\ & & & & [w_n^*,\ I] \end{bmatrix}.$$

Здесь мы использовали соотношение (5).

Теперь строим матрицу-функцию

$$\tilde{\omega}(z) = I + i\,[2\tau_1 \tilde{a}_1,\ -2\tau_1 \tilde{\tilde{a}}_1, \cdots,\ 2\tau_n \tilde{a}_n,\ -2\tau_n \tilde{\tilde{a}}_n] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z-z_1} \\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_1} \\ \sim\ \sim \\ \dfrac{I}{z-z_n} \\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_n} \end{bmatrix} = I + i\,J_2\,[I,\ I, \cdots, I\ I]\,\tilde{H} \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z-z_1} \\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_1} \\ \sim\ \sim \\ \dfrac{I}{z-z_n} \\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_n} \end{bmatrix},$$

и эта матрица-функция, в силу замечания 2, равна $\omega(z)$

$$\tilde{\omega}(z) = \omega(z).$$

2°. Пусть теперь $z_1, z_2, \cdots, z_n$—произвольный набор точек из верхней полуплоскости, а матрицы

$$w_1,\ w_2, \cdots,\ w_n,\ \dot{w}_1,\ \dot{w}_2, \cdots,\ \dot{w}_n$$

удовлетворяют условию

$$A_{2n} = \begin{vmatrix} \dfrac{w_1-\dot{w}_1}{z_1-\bar{z}_1} & w_1 & \cdots & \dfrac{w_1-\dot{w}_n}{z_1-\bar{z}_n} & \dfrac{w_1-w_n}{z_1-z_n} \\ \dot{w}_1 & \dfrac{\dot{w}_1-w_1}{\bar{z}_1-z_1} & \cdots & \dfrac{\dot{w}_1-\dot{w}_n}{\bar{z}_1-\bar{z}_n} & \dfrac{\dot{w}_n-w_n}{\bar{z}_1-z_n} \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix}
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\
\dfrac{w_n - w_1^*}{z_n - \bar z_1} & \cdots & \dfrac{w_n - w_1}{z_n - z_1} & \dfrac{w_n - w_n^*}{z_n - \bar z_n} & \dot w_n^* \\
\dfrac{w_n^* - w_1^*}{\bar z_n - \bar z_1} & \cdots & \dfrac{w_n^* - w_1}{\bar z - z_1} & \dot w_n^* & \dfrac{w_n^* - w_n}{\bar z_n - z_n}
\end{vmatrix} > 0.
$$

Рассмотрим матрицу

$$
H = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^* \\ I \end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix} w_1 \\ I \end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{bmatrix} w_n^* \\ I \end{bmatrix} & \\ & & & & \begin{bmatrix} w_n \\ I \end{bmatrix} \end{bmatrix} A_{2n}^{-1} \begin{bmatrix} [w_1, I] & & & & \\ & [w_1^*, I] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [w_n, I] & \\ & & & & [w_n^*, I] \end{bmatrix}
$$

и построим матрицу-функцию

$$
\omega(z) = I + i\,[2\tau_1 a_1, -2\tau_1 \bar a_1, \cdots, 2\tau_n a_n, -2\tau_n \bar a_n] \times
$$

$$
\times \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z - z_1} \\ \dfrac{I}{z - \bar z_1} \\ \sim \sim \\ \dfrac{I}{z - z_n} \\ \dfrac{I}{z - \bar z_n} \end{bmatrix} = I + iJ_2[I, I, \cdots, I, I]\, H \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z - z_1} \\ \dfrac{I}{z - \bar z_1} \\ \sim \sim \\ \dfrac{I}{z - z_n} \\ \dfrac{I}{z - \bar z_n} \end{bmatrix}. \tag{6}
$$

Покажем, что $\omega(z)$—элементарная матрица-функция полного ранга.

Для этого вычислим J_2-форму, используя тождество для матрицы H

$$
H \begin{bmatrix} I \\ I \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I \\ I \end{bmatrix} J_2[I, I, \cdots, I, I]\, H = -i\,(HZ - \bar Z H), \tag{7}
$$

легко следующее из тождества для A^{2n}:

$$\begin{bmatrix} w_1 & & & & & \\ & w_1^* & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & w_n & \\ & & & & & w_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \\ I \end{bmatrix} [I, I, \cdots, I, I] - \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \\ I \end{bmatrix} [I, I, \cdots, I, I] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} w_1^* & & & & & \\ & w_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & w_n^* & \\ & & & & & w_n \end{bmatrix} = ZA_{2n} - A_{2n}\overline{Z},$$

где

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 I & & & & & \\ & \bar z_1 I & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & z_n I & \\ & & & & & \bar z_n I \end{bmatrix}.$$

$$\omega^*(z)\, J_2\, \omega(z) - J_2 = -i \left[\frac{I}{\bar z - \bar z_1}, \frac{I}{\bar z - z_1}, \cdots, \frac{I}{\bar z - \bar z_n}, \frac{I}{\bar z - z_n} \right] \times$$

$$\times H \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \\ I \end{bmatrix} + i\,[I, I, \cdots, I, I]\, H \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z - z_1} \\ \dfrac{I}{z - \bar z_1} \\ \sim \sim \\ \dfrac{I}{z - z_n} \\ \dfrac{I}{z - \bar z_n} \end{bmatrix} -$$

$$-i \left[\frac{I}{\bar z - \bar z_1}, \frac{I}{\bar z - z_1}, \cdots, \frac{I}{\bar z - \bar z_n}, \frac{I}{\bar z - z_n} \right] (HZ - \overline{Z}H) \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z - z_1} \\ \dfrac{I}{z - \bar z_1} \\ \sim \sim \\ \dfrac{I}{z - z_n} \\ \dfrac{I}{z - \bar z_n} \end{bmatrix} =$$

$$
= \frac{z-\bar z}{i}\left[\frac{I}{z-\bar z_1},\ \frac{I}{z-z_1},\ \ldots,\ \frac{I}{z-\bar z_n},\ \frac{I}{z-z_n}\right] H \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z-z_1} \\ \dfrac{I}{z-\bar z_1} \\ \sim\ \sim \\ \dfrac{I}{z-z_n} \\ \dfrac{I}{z-\bar z_n} \end{bmatrix},
$$

откуда, в силу неотрицательности H, следует элементарность $\omega(z)$.

Симплектичность $\omega(z)$ также легко проверяется.

Убедимся теперь, что $\omega(z)$ полного ранга. В самом деле, из тождества (7), переписанного с учетом (6) в виде

$$
\begin{bmatrix} 2\tau_1 a_1^* \\ -2\tau_1 \bar a_1^* \\ \sim\ \sim\ \sim \\ 2\tau_n a_n^* \\ -2\tau_n \bar a_n^* \end{bmatrix} J_2 \left[2\tau_1 a_1,\ -2\tau_1 \bar a_1,\ \ldots\ 2\tau_n a_n,\ -2\tau_n \bar a_n\right] =
$$

$$
= \left[\begin{matrix}
\dfrac{z_1-\bar z_1}{i}\begin{bmatrix} w_1^* \\ I \end{bmatrix}\alpha_{11}\left[w_1, I\right] & 0 & \cdots \\
0 & \dfrac{\bar z_1-z_1}{i}\begin{bmatrix} w_1 \\ I \end{bmatrix}\alpha_{22}\left[w_1^*, I\right] & \cdots \\
\sim\ \sim\ \sim\ \sim\ \sim & \sim\ \sim\ \sim\ \sim\ \sim & \sim\ \sim \\
\dfrac{z_1-\bar z_n}{i}\begin{bmatrix} w_n^* \\ I \end{bmatrix}\alpha_{2n-1,1}\left[w_1, I\right] & \dfrac{\bar z_1-\bar z_n}{i}\begin{bmatrix} w_n^* \\ I \end{bmatrix}\alpha_{2n-1,2}\left[w_1^*, I\right] & \cdots \\
\dfrac{z_1-z_n}{i}\begin{bmatrix} w_n \\ I \end{bmatrix}\alpha_{2n,1}\left[w_1, I\right] & \dfrac{\bar z_1-z_n}{i}\begin{bmatrix} w_n \\ I \end{bmatrix}\alpha_{2n,2}\left[w_1^*, I\right] & \cdots
\end{matrix}\right.
$$

$$
\left.\begin{matrix}
\cdots & \dfrac{z_n-\bar z_1}{i}\begin{bmatrix} w_1^* \\ I \end{bmatrix}\alpha_{1,2n-1}\left[w_n, I\right] & \dfrac{\bar z_n-\bar z_1}{i}\begin{bmatrix} w_1^* \\ I \end{bmatrix}\alpha_{1,2n}\left[w_n^*, I\right] \\
\cdots & \dfrac{z_n-z_1}{i}\begin{bmatrix} w_1 \\ I \end{bmatrix}\alpha_{2,2n-1}\left[w_n, I\right] & \dfrac{\bar z_n-z_1}{i}\begin{bmatrix} w_1 \\ I \end{bmatrix}\alpha_{2,2n}\left[w_n^*, I\right] \\
\sim\ \sim & \sim\ \sim\ \sim\ \sim\ \sim & \sim\ \sim\ \sim\ \sim\ \sim \\
\cdots & \dfrac{z_n-\bar z_n}{i}\begin{bmatrix} w_n^* \\ I \end{bmatrix}\alpha_{2n-1,2n-1}\left[w_n, I\right] & 0 \\
\cdots & 0 & \dfrac{\bar z_n-z_n}{i}\begin{bmatrix} w_n \\ I \end{bmatrix}\alpha_{n,2n}\left[w_n^*, I\right]
\end{matrix}\right],
$$

где

$$A_{2n}^{-1}=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1,\,2n-1} & \alpha_{1,\,2n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2,\,2n-1} & \alpha_{2,\,2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_{2n-1,\,1} & \alpha_{2n-1,\,2} & \cdots & \alpha_{2n-1,\,2n-1} & \alpha_{2n-1,\,2n}\\ \alpha_{2n,\,1} & \alpha_{2n,\,2} & \cdots & \alpha_{2n,\,2n-1} & \alpha_{2n,\,2n}\end{bmatrix},$$

вытекают равенства

$$2\tau_1\, a_1^*\, J_2\, a_1=\begin{bmatrix} w_1^*\\ I\end{bmatrix}\alpha_{11}\,[w_1,\ I]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\tau_n\, a_n^*\, J_2\, a_n=\begin{bmatrix} w_n^*\\ I\end{bmatrix}\alpha_{2n-1,\,2n-1}\,[w_n,\ I],$$

из которых следует, что $\operatorname{rang} a_k=m$ $(k=1,\ 2,\cdots,\ n)$.

3°. Докажем, наконец, единственность представления (3). Допуская, что $\omega(z)$ имеет два представления

$$\omega(z)=I+iJ_2\,[I,\ I,\ \cdots,\ I,\ I]\,H\begin{bmatrix}\dfrac{I}{z-z_1}\\ \dfrac{I}{z-\bar z_1}\\ \cdots\\ \dfrac{I}{z-z_n}\\ \dfrac{I}{z-\bar z_n}\end{bmatrix},$$

$$\omega(z)=I+iJ_2\,[I,\ I,\cdots,\ I,\ I]\,\tilde H\begin{bmatrix}\dfrac{I}{z-z_1}\\ \dfrac{I}{z-\bar z_1}\\ \cdots\\ \dfrac{I}{z-z_n}\\ \dfrac{I}{z-\bar z_n}\end{bmatrix},$$

получаем, в силу равенства J_2-форм,

$$\left[\frac{I}{\bar z-\bar z_1},\ \frac{I}{\bar z-z_1},\cdots,\ \frac{I}{\bar z-\bar z_n},\ \frac{I}{\bar z-z_n}\right]H\begin{bmatrix}\dfrac{I}{z-z_1}\\ \dfrac{I}{z-\bar z_1}\\ \cdots\\ \dfrac{I}{z-z_n}\\ \dfrac{I}{z-\bar z_n}\end{bmatrix}=$$

$$= \left[\frac{I}{z-\bar{z}_1}, \frac{I}{z-z_1}, \cdots, \frac{I}{z-\bar{z}_n}, \frac{I}{z-z_n}\right] \tilde{H} \begin{bmatrix} \frac{I}{z-z_1} \\ \frac{I}{z-\bar{z}_1} \\ \sim \sim \\ \frac{I}{z-z_n} \\ \frac{I}{z-\bar{z}_n} \end{bmatrix},$$

из которого следует, что

$$fHg^* = f\tilde{H}g^*,$$

т. е. $H = \tilde{H}$, откуда $A_{2n} = \tilde{A}_{2n}$, что и требовалось.

§ 2. Проблема Неванлинны-Пика

Постановка задачи следующая: дана последовательность точек

$$z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots \left(\frac{z_k - \bar{z}_k}{2i} > 0\right)$$

из открытой верхней полуплоскости и две последовательности квадратных матриц m-го порядка

$$\begin{matrix} w_1, & w_2, \cdots, & w_n, \cdots \\ \dot{w}_1, & \dot{w}_2, \cdots, & \dot{w}_n, \cdots . \end{matrix} \left(\frac{w_k - w_k^*}{2i} > 0\right)$$

из открытой верхней матричной полуплоскости; ищется неванлинновская, симметрическая матрица-функция $w(z)$, т. е. голоморфная в верхней полуплоскости матрица-функция, удовлетворяющая условиям

$$\frac{w(z) - w^*(z)}{2i} \geqslant 0, \ \operatorname{Im} z > 0$$

$$w'(z) = w(z),$$

такая, что

$$\begin{gathered} w(z_1) = w_1, \ w(z_2) = w_2, \cdots, \ w(z_n) = w_n, \cdots \\ \dot{w}(z_1) = \dot{w}_1, \ \dot{w}(z_2) = \dot{w}_2, \cdots, \ \dot{w}(z_n) = \dot{w}_n, \cdots . \end{gathered}$$

2°.1. Сначала решается усеченная задача для n наборов z_k, w_k, $\dot{w}_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$. Справедлива

Теорема 4. *Для того чтобы матрица-функция $w(z)$ была решением проблемы Неванлинны-Пика для конечного числа наборов z_k, w_k, $\dot{w}_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$, необходимо и достаточно, чтобы матрица-функция $w(z)$ удовлетворяла основному матричному неравенству*

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
\frac{w_1-\overset{*}{w}_1}{z_1-\bar z_1} & \dot w_1 & \cdots & \frac{w_1-\overset{*}{w}_n}{z_1-\bar z_n} & \frac{w_1-w_n}{z_1-z_n} & & \frac{w_1-w^*(z)}{z_1-\bar z} \\
\dot{\overset{*}{w}}_1 & \frac{\overset{*}{w}_1-w_1}{\bar z_1-z_1} & \cdots & \frac{\overset{*}{w}_1-\overset{*}{w}_n}{\bar z_1-\bar z_n} & \frac{\overset{*}{w}_1-w_n}{\bar z_1-z_n} & & \frac{\overset{*}{w}_1-w^*(z)}{\bar z_1-\bar z} \\
\sim & \sim & \sim & \sim & \sim & & \sim \\
\frac{w_n-\overset{*}{w}_1}{z_n-\bar z_1} & \frac{w_n-w_1}{z_n-z_1} & \cdots & \frac{w_n-\overset{*}{w}_n}{z_n-\bar z_n} & \dot w_n & & \frac{w_n-w^*(z)}{z_n-\bar z} \\
\frac{\overset{*}{w}_n-\overset{*}{w}_1}{\bar z_n-\bar z_1} & \frac{\overset{*}{w}_n-w_1}{\bar z_n-z_1} & \cdots & \dot{\overset{*}{w}}_n & \frac{\overset{*}{w}_n-w_n}{\bar z_n-z_n} & & \frac{\overset{*}{w}_n-w^*(z)}{\bar z_n-\bar z} \\
\hline
\frac{w(z)-\overset{*}{w}_1}{z-\bar z_1} & \frac{w(z)-w_1}{z-z_1} & \cdots & \frac{w(z)-\overset{*}{w}_n}{z-\bar z_n} & \frac{w(z)-w_n}{z-z_n} & & \frac{w(z)-w^*(z)}{z-\bar z}
\end{array}\right] =
$$

$$
=\begin{bmatrix} A_{2n} & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geqslant 0. \qquad (8)
$$

Необходимость теоремы следует из неравенства Шварца-Пика [5], записанного для точек

$$
z_1,\ \mu_1,\ z_2,\ \mu_2, \cdots,\ z_n,\ \mu_n,\ z
$$

после перехода к пределу при $\mu_k \to \bar z_k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ и принципа симметрии для неванлинновских матриц-функций

$$
w^*(\bar z) = w(z).
$$

Достаточность легко усматривается из неотрицательности блок-миноров

$$
\left[\begin{array}{cc|c}
\frac{w_k-\overset{*}{w}_k}{z_k-\bar z_k} & \dot w_k & \frac{w_k-w^*(z)}{z_k-\bar z} \\
\dot{\overset{*}{w}}_k & \frac{\overset{*}{w}_k-w_k}{\bar z_k-z_k} & \frac{\overset{*}{w}_k-w^*(z)}{\bar z_k-\bar z} \\
\hline
\frac{w(z)-\overset{*}{w}_k}{z-\bar z_k} & \frac{w(z)-w_k}{z-z_k} & \frac{w(z)-w^*(z)}{z-\bar z}
\end{array}\right] \geqslant 0.
$$

Справедлива и дуальная теорема.

Будем решать ОМН (8) при условии, что $A_{2n} > 0$. Имеет место

Теорема 5. *Общее решение $w(z)$ неравенства* (8) *представляется в виде дробно-линейного преобразования произвольной неособенной, неванлинновской, симметрической пары* $[p(z), q(z)]$

$$
\left([p, q]\begin{bmatrix} p^* \\ q^* \end{bmatrix} > 0,\ [p, q]\, J_2 \begin{vmatrix} p^* \\ q^* \end{vmatrix} \geqslant 0,\ [p, q]\, J_2 \begin{vmatrix} p' \\ q' \end{vmatrix} = 0\right)
$$

$$
w(z) = [p(z)\, b(z) + q(z)\, d(z)]^{-1}\, [p(z)\, a(z) + q(z)\, c(z)],
$$

матрица коэффициентов которого строится по матрице $A_{2n} > 0$

$$\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix} = I + iJ_2\,[I, I, \cdots, I, I]\, H \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z-z_1} \\ \dfrac{I}{z-\bar z_1} \\ \sim\ \sim \\ \dfrac{I}{z-z_n} \\ \dfrac{I}{z-\bar z_n} \end{bmatrix}, \tag{9}$$

где

$$H = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^* \\ I \end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix} w_1 \\ I \end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{bmatrix} w_n^* \\ I \end{bmatrix} & \\ & & & & \begin{bmatrix} w_n \\ I \end{bmatrix} \end{bmatrix} A_{2n}^{-1} \begin{bmatrix} [w_1, I] & & & & \\ & [w_1^*, I] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [w_n, I] & \\ & & & & [w_n^*, I] \end{bmatrix},$$

и является элементарной симплектической матрицей-функцией полного ранга с полюсами в узлах интерполяции.

Доказательство.

1) Предположим сначала, что неванлинновская, симметрическая матрица-функция $w(z)$ удовлетворяет неравенству (8)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} & & & & & & \dfrac{w_1 - w^*(z)}{z_1 - \bar z} \\ & & & & & & \dfrac{w_1^* - w^*(z)}{\bar z_1 - \bar z} \\ & & & A_{2n} & & & \sim\ \sim\ \sim\ \sim \\ & & & & & & \dfrac{w_n - w^*(z)}{z_n - \bar z} \\ & & & & & & \dfrac{w_n^* - w^*(z)}{\bar z_n - \bar z} \\ \hline \dfrac{w(z) - w_1^*}{z - \bar z_1} & \dfrac{w(z) - w_1}{z - z_1} & & \cdots & \dfrac{w(z) - w_n^*}{z - \bar z_n} & \dfrac{w(z) - w_n}{z - z_n} & \dfrac{w(z) - w^*(z)}{z - \bar z} \end{array}\right] \geqslant 0.$$

По лемме о неотрицательной блок-матрице оно эквивалентно неравенству

$$\frac{w(z)-w^*(z)}{z-\bar z}-\left[\frac{w(z)-w_1^*}{z-\bar z_1},\ \frac{w(z)-w_1}{z-z_1},\dots,\ \frac{w(z)-w_n^*}{z-\bar z_n},\ \frac{w(z)-w_n}{z-z_n}\right]\times$$

$$\times A_{2n}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{w_1-w^*(z)}{z_1-\bar z}\\ \dfrac{w_1^*-w^*(z)}{\bar z_1-\bar z}\\ \sim\ \sim\ \sim\\ \dfrac{w_n-w^*(z)}{z_n-\bar z}\\ \dfrac{w_n^*-w^*(z)}{\bar z_n-\bar z}\end{bmatrix}\geqslant 0,$$

т. е.

$$[w,I]\,\frac{J_2}{\dfrac{z-\bar z}{i}}\begin{bmatrix}w^*\\ I\end{bmatrix}-[w,I]\left[\frac{I}{z-\bar z_1},\ \frac{I}{z-z_1},\dots,\frac{I}{z-\bar z_n},\ \frac{I}{z-z_n}\right]\times$$

$$\times\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\ -w_1^*\end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix}I\\ -w_1\end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{bmatrix}I\\ -w_n^*\end{bmatrix} & \\ & & & & \begin{bmatrix}I\\ -w_n\end{bmatrix}\end{bmatrix}A_{2n}^{-1}\begin{bmatrix}[I,-w_1] & & & & \\ & [I,w_1^*] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [I,-w_n] & \\ & & & & [I,-w_n^*]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{I}{\bar z-z_1}\\ \dfrac{I}{\bar z-\bar z_1}\\ \sim\ \sim\\ \dfrac{I}{\bar z-z_n}\\ \dfrac{I}{\bar z-\bar z_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w^*\\ I\end{bmatrix}\geqslant 0. \qquad (10)$$

Построим матрицу-функцию (9).

В силу теоремы 3 $\mathbf{A}(z)$ является элементарной симплектической матрицей-функцией полного ранга с J_2-формой

$$\frac{\mathbf{A}^*(z)\,J_2\,\mathbf{A}(z)-J_2}{\dfrac{z-\bar z}{i}}=\left[\frac{I}{\bar z-z_1},\ \frac{I}{\bar z-\bar z_1},\dots,\frac{I}{\bar z-z_n},\ \frac{I}{\bar z-\bar z_n}\right]\times$$

$$\times H\begin{bmatrix}\dfrac{I}{z-z_1}\\ \dfrac{I}{z-\bar z_1}\\ \sim\ \sim\\ \dfrac{I}{z-z_n}\\ \dfrac{I}{z-\bar z_n}\end{bmatrix}.$$

Обратная матрица $A^{-1}(z)$ может быть вычислена по принципу симметрии

$$A^{-1}(z) = J_2 A^*(\bar{z}) J_2 = I - i J_2 \left[\frac{I}{z-\bar{z}_1}, \frac{I}{z-z_1}, \dots, \frac{I}{z-\bar{z}_n}, \frac{I}{z-z_n}\right] H \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \\ I \end{bmatrix}$$

и ее J_2-форма имеет вид

$$\frac{J_2 - A^{-1}(z) J_2 A^{-1*}(z)}{\frac{z-\bar{z}}{i}} = \left[\frac{I}{z-\bar{z}_1}, \frac{I}{z-z_1}, \dots, \frac{I}{z-\bar{z}_n}, \frac{I}{z-z_n}\right] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -w_1^* \end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix} I \\ -w_1 \end{bmatrix} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \begin{bmatrix} I \\ -w_n^* \end{bmatrix} & \\ & & & & \begin{bmatrix} I \\ -w_n \end{bmatrix} \end{bmatrix} A_{2n}^{-1} \begin{bmatrix} [I, -w_1] & & & & \\ & [I, -w_1^*] & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & [I, -w_n] & \\ & & & & [I, -w_n^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{I}{\bar{z}-z_1} \\ \frac{I}{\bar{z}-\bar{z}_1} \\ \sim\sim \\ \frac{I}{\bar{z}-z_n} \\ \frac{I}{\bar{z}-\bar{z}_n} \end{bmatrix}.$$

Сравнивая последнее выражение с ядром второго члена неравенства (10), замечаем, что они равны.

Таким образом, введение матрицы $A(z)$ позволяет переписать неравенство (10) в весьма компактной форме

$$[w, I] \frac{A^{-1}(z) J_2 A^{-1*}(z)}{\frac{z-\bar{z}}{i}} \begin{bmatrix} w^* \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0. \tag{11}$$

2) Определим теперь пару матриц $[p(z), q(z)]$, полагая

$$[p(z), q(z)] = [w(z), I] \, A^{-1}(z). \tag{12}$$

Очевидно, $p(z)$, $q(z)$ голоморфны в верхней полуплоскости, а из неравенств

$$[p, q] \begin{bmatrix} p^* \\ q^* \end{bmatrix} = [w, I] \, A^{-1}(z) \, A^{-1*}(z) \begin{bmatrix} w^* \\ I \end{bmatrix} > 0,$$

$$[p, q] J_2 \begin{bmatrix} p^* \\ q^* \end{bmatrix} = [w, I] \, A^{-1}(z) J_2 A^{-1*}(z) \begin{bmatrix} w^* \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0, \frac{z-\bar{z}}{i} > 0,$$

$$[p, q] J_2 \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} = [w, I] \, A^{-1}(z) \, J_2 A^{-1'}(z) \begin{bmatrix} w' \\ I \end{bmatrix} = [w, I] J_2 \begin{bmatrix} w' \\ I \end{bmatrix} = 0$$

следует, что пара $[p(z), q(z)]$ неособенная, неванлинновская и симметрическая.

Разбив матрицу-функцию $\mathbf{A}(z)$ на блоки

$$\mathbf{A}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix}$$

соответственно матрице $J_2=\begin{bmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{bmatrix}$, из (12) получим

$$[w(z),\ I]=[p(z),\ q(z)]\,\mathbf{A}(z)=[p(z),\ q(z)]\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix}=$$

$$=[p(z)\,a(z)+q(z)c(z)\ \ p(z)\,b(z)+q(z)\,d(z)],$$

откуда

$$w(z)=[p(z)\,b(z)+q(z)\,d(z)]^{-1}\,[p(z)\,a(z)+q(z)\,c(z)]. \qquad (13)$$

Первая часть теоремы доказана.

Здесь установлено, что любое решение усеченной проблемы Неванлинны-Пика представляется в виде (13), где $[p(z),\ q(z)]$ — некоторая неособенная, неванлинновская, симметрическая пара.

3) Обратно, пусть $[p(z),\ q(z)]$ — произвольная неособенная, неванлинновская, симметрическая пара голоморфных матриц-функций и пусть матрица-функция

$$\mathbf{A}(z)=\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix}$$

определена соотношением (9).

Рассмотрим пару

$$[u(z),\ v(z)]=[p(z),\ q(z)]\,\mathbf{A}(z).$$

Показано, что матрица-функция

$$v(z)=p(z)\,b(z)+q(z)\,d(z)$$

обратима в верхней полуплоскости.

Поэтому имеет смысл функция

$$w(z)=v^{-1}u=[pb+qd]^{-1}\,[pa+qc].$$

Она удовлетворяет неравенству

$$v\,[w,\ I]\,\mathbf{A}^{-1}(z)\,J_2\,\mathbf{A}^{-1*}(z)\begin{bmatrix} w^* \\ I \end{bmatrix}v^*=$$

$$=[u,\ v]\,\mathbf{A}^{-1}(z)\,J_2\,\mathbf{A}^{-1*}(z)\begin{bmatrix} u^* \\ v^* \end{bmatrix}=[p,\ q]\,J_2\begin{bmatrix} p^* \\ q^* \end{bmatrix}\geqslant 0,$$

т. е.

$$[w,\ I]\,\mathbf{A}^{-1}(z)\,J_2\,\mathbf{A}^{-1*}(z)\begin{bmatrix} w^* \\ I \end{bmatrix}\geqslant 0,$$

эквивалентному, в силу (11), неравенству (8).

Тем самым доказано, что дробно-линейное преобразование (13) с произвольной неособенной, неванлинновской, симметрической парой $[p(z), q(z)]$ в качестве параметра является общим решением усеченной задачи Неванлинны-Пика. Справедлива и дуальная теорема.

Из теоремы 5 вытекает, что усеченная задача Неванлинны-Пика, удовлетворяющая условию $A_{2n} > 0$, адекватна заданию параметризованной элементарной симплектической матрицы-функции $\mathbf{A}(z)$ (9) с полюсами в узлах интерполяции.

2°.2. Параллельно рассматривается и пошаговое решение задачи. Устанавливаются следующие факты:

1) Если

$$b_1(z) = I + iJ_2[I, I]\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1^*\\ I\end{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix}w_1\\ I\end{bmatrix}\end{bmatrix} A_2^{-1}\begin{bmatrix}[w_1, I] & \\ & [w_1^*, I]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{I}{z-z_1}\\ \dfrac{I}{z-\bar{z}_1}\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}a_1(z) & b_1(z)\\ c_1(z) & d_1(z)\end{bmatrix},$$

где

$$A_2 = \begin{bmatrix}\dfrac{w_1 - w_1^*}{z_1 - \bar{z}_1} & \dot{w}_1\\ \dot{w}_1^* & \dfrac{w_1^* - w_1}{\bar{z}_1 - z_1}\end{bmatrix} > 0$$

— элементарная симплектическая матрица-функция полного ранга, а $[p(z), q(z)]$ — произвольная неособенная, неванлинновская, симметрическая пара, то дробно-линейное преобразование

$$w(z) = [p(z)\,b_1(z) + q(z)\,d_1(z)]^{-1}\,[p(z)\,a_1(z) + q(z)\,c_1(z)] =$$
$$= b_1(z)\,\{[p(z), q(z)]\}$$

определяет матрицу-функцию $w(z)$, являющуюся общим видом неванлинновских, симметрических матриц-функций, удовлетворяющих условию

$$w(z_1) = w_1, \quad \dot{w}(z_1) = \dot{w}_1^*.$$

2) Общий вид неванлинновских, симметрических матриц-функций, удовлетворяющих любому конечному числу первых условий

$$w(z_1) = w_1;\ w(z_2) = w_2; \cdots;\ w(z_n) = w_n;$$
$$\dot{w}(z_1) = \dot{w}_1;\ \dot{w}(z_2) = \dot{w}_2; \cdots, \dot{w}(z_n) = \dot{w}_n,$$

представим в форме суперпозиции дробно-линейных преобразований

$$w(z) = b_1(z)\,\{b_2(z)\,\{\cdots\{b_n(z)\,\{[p_n(z),\ q_n(z)]\}\}\cdots\}\},$$

где $[p_n(z), q_n(z)]$ — произвольная неособенная, неванлинновская, симметрическая пара. Матрица коэффициентов результирующего дробно-

---

* Это утверждение является частным случаем теоремы 5 при $n = 1$.

линейного преобразования равна произведению элементарных симплектических множителей полного ранга

$$b_n(z)\cdot b_{n-1}(z)\cdots b_2(z)\, b_1(z) = \mathbf{A}_n(z),$$

$$b_k(z) = I + iJ_2[I, I]\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} w_k^{(k)*} \\ I \end{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix} w_k^{(k)} \\ I \end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{w_k^{(k)} - w_k^{(k)*}}{z_k - \bar{z}_k} & \dot{w}_k^{(k)} \\ \dot{w}_k^{(k)*} & \dfrac{w_k^{(k)*} - w_k^{(k)}}{\bar{z}_k - z_k}\end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} [w_k^{(k)}, I] & \\ & [w_k^{(k)*}, I]\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{I}{z - z_k} \\ \dfrac{I}{z - \bar{z}_k}\end{bmatrix},$$

где матрицы $w_k^{(k)}$ последовательно находятся по формулам

$$w_k^{(k)} = b_{k-1}^{-1}(z_k)\{b_{k-2}^{-1}(z_k)\{\cdots\{b_1^{-1}(z_k)\{w_k\}\}\cdots\}\},\quad \dot{w}_k(z_k) = \dot{w}_k^{(k)}$$

$$(k = 2, 3, \cdots, n),\quad w_1^{(1)} = w_1.$$

Отметим, что положительность информационных блоков $A_2, A_4, \cdots, A_{2n}$ обеспечивает неособенность матриц

$$\begin{bmatrix} \dfrac{w_k^{(k)} - w_k^{(k)*}}{z_k - \bar{z}_k} & \dot{w}_k^{(k)} \\ \dot{w}_k^{(k)*} & \dfrac{w_k^{(k)*} - w_k^{(k)}}{\bar{z}_k - z_k}\end{bmatrix}.$$

Таким образом, постановке любой задачи Неванлинны-Пика, удовлетворяющей условию $A_{2n} > 0$, соответствует бесконечное произведение простейших множителей полного ранга

$$\cdots b_n(z)\, b_{n-1}(z)\cdots b_2(z)\, b_1(z),$$

n-ые частичные произведения которого

$$\mathbf{A}_n(z) = b_n(z)\, b_{n-1}(z)\cdots b_2(z)\, b_1(z)$$

являются матрицами коэффициентов дробно-линейных преобразований произвольных неособенных, неванлинновских, симметрических пар $[p_n(z), q_n(z)]$, дающих общее решение соответствующей усеченной проблемы.

Справедливо и обратное утверждение. В самом деле, зададим произвольное бесконечное произведение простейших симплектических множителей полного ранга

$$\cdots b_n(z)\cdots b_2(z)\, b_1(z),$$

$$b_k(z) = I + \frac{2i\tau_k a_k}{z - z_k} - \frac{2i\bar{\tau}_k \bar{a}_k}{z - \bar{z}_k} = I + iJ_2[I, I]\times$$

$$\times \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} w_k^{(k)*} \\ I \end{bmatrix} & \\ & \begin{bmatrix} w_k^{(k)} \\ I \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{w_k^{(k)} - w_k^{(k)*}}{z_k - \bar{z}_k} & \dot{w}_k^{(k)} \\ \dot{w}_k^{(k)*} & \dfrac{w_k^{(k)*} - w_k^{(k)}}{\bar{z}_k - z_k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} [w_k^{(k)}, I] & \\ & [w_k^{(k)*}, I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{I}{z - z_k} \\ \dfrac{I}{z - \bar{z}_k} \end{bmatrix}.$$

Определим две последовательности квадратных матриц m-го порядка по следующему правилу: рассмотрим k-ое частичное произведение

$$\begin{vmatrix} a_k(z) & b_k(z) \\ c_k(z) & d_k(z) \end{vmatrix} = \mathbf{A}_k(z) = b_k(z) \cdots b_2(z)\, b_1(z)$$

и дробно-линейное преобразование произвольной неособенной, неванлинновской, симметрической пары $[p(z), q(z)]$,

$$w(z) = [p(z)\, b_k(z) + q(z)\, d_k(z)]^{-1}\, [p(z)\, a_k(z) + q(z)\, c_k(z)].$$

Обозначим

$$w(z_j) = w_j$$
$$\lim_{z \to z_j} \frac{w(z) - w_j}{z - z_j} = \dot{w}_j, \qquad (j = 1, 2, \cdots, k).$$

Считая далее $k = 1, 2, \cdots$, получаем последовательности

$$w_1,\ w_2; \cdots, w_n, \cdots$$
$$\dot{w}_1,\ \dot{w}_2, \cdots;\ \dot{w}_n, \cdots.$$

Теперь формулируем проблему Неванлинны-Пика: найти неванлинновскую, симметрическую матрицу-функцию $w(z)$, удовлетворяющую условиям

$$w(z_k) = w_k;\ \dot{w}(z_k) = \dot{w}_k \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Тем самым показано, что *проблема Неванлинны-Пика со строго положительными информационными блоками* A_{2n} $(n = 1, 2, \cdots)$ *адекватна изучению бесконечного произведения простейших множителей полного ранга.*

2'.3. Далее рассмотрим так называемые круги Вейля.

С помощью $\mathbf{A}(z)$ неравенство (9) переписывается в виде

$$[w(z), I]\, \frac{\mathbf{A}^{-1}(z)\, J_2\, \mathbf{A}^{-1*}(z)}{\dfrac{z - \bar{z}}{i}} \begin{bmatrix} w^*(z) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

или

$$[w(z), I] \begin{bmatrix} -R & S^* \\ S & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^*(z) \\ I \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{14}$$

где

$$\mathbf{A}^{-1}(z)\, J_2\, \mathbf{A}^{-1*}(z) = \begin{bmatrix} -R & S^* \\ S & -T \end{bmatrix} = W$$

— матрица Вейля.

Как и в предыдущих задачах [1], [2], [3] неравенство (14) переписывается в виде $w(z) = SR^{-1} + \sqrt{SR^{-1}S^* - T}\cdot v \cdot \frac{1}{\sqrt{R}}$, $vv^* < I$. С геометрической точки зрения это отношение означает, что решение усеченной проблемы Неванлинны-Пика при любом фиксированном z_0 $\left(\frac{z_0 - \bar{z}_0}{i} > 0\right)$ принадлежит матричному кругу $\mathbf{R}(z_0)$ с центром $c = SR^{-1}$ и радиусами:

левым

$$\rho_g = SR^{-1}S^* - T = \left\{\frac{z_0 - \bar{z}_0}{i}\left[\frac{I}{\bar{z}_0 - \bar{z}_1}, \frac{I}{\bar{z}_0 - z_1}, \ldots, \frac{I}{\bar{z}_0 - \bar{z}_n}, \frac{I}{\bar{z}_0 - z_n}\right] \times\right.$$

$$\left.\times A_{2n}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{I}{z_0 - z_1} \\ \frac{I}{z_0 - \bar{z}_1} \\ \sim \sim \\ \frac{I}{z_0 - z_n} \\ \frac{I}{z_0 - \bar{z}_n}\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

и правым

$$\rho_d = R^{-1} = \left\{\frac{z_0 - \bar{z}_0}{i}\left[\frac{I}{z_0 - z_1}, \frac{I}{z_0 - \bar{z}_1}, \ldots, \frac{I}{z_0 - z_n}, \frac{I}{z_0 - \bar{z}_n}\right] A_{2n}^{-1}\begin{bmatrix} \frac{I}{\bar{z}_0 - \bar{z}_1} \\ \frac{I}{\bar{z}_0 - z_1} \\ \sim \sim \\ \frac{I}{\bar{z}_0 - \bar{z}_n} \\ \frac{I}{\bar{z}_0 - z_n}\end{bmatrix}\right\}^{-1}$$

соответственно.

Из симплектичности $\mathbf{A}(z)$ следует, что

$$\rho_g = \bar{\rho}_d.$$

Рассматривая пошаговое решение общей проблемы Неванлинны-Пика с геометрической точки зрения, мы связываем с каждой усеченной задачей круг Вейля $\mathbf{R}_n$. Поэтому нас будет интересовать поведение кругов $\mathbf{R}_n(z)$ с ростом n. Имеют место следующие утверждения: центры $c = S_n R_n^{-1}$ стремятся к конечному пределу; радиусы ρ_g и ρ_d монотонно убывают; каждый круг Вейля вложен в предыдущий.

В силу основной теоремы С. А. Орлова [6], ранги левого и правого радиусов предельного круга не зависят от выбора $z \neq z_k$.

Для вполне неопределенной проблемы Неванлинны-Пика (оба радиуса имеют неособенные пределы) справедлива теорема, являющаяся обобщением известного критерия Данжуа. Здесь используется разложение элементарных множителей на произведение двучленных множителей [4].

$$b_k(z) = I + \frac{2i\tau_k a_k}{z - z_k} - \frac{2i\tau_k \bar{a}_k}{z - \bar{z}_k} = b_{k1}(z)\, b_{k2}(z) =$$

$$= \left(I + \frac{2i\tau_k}{z - z_k} P_{k1}\right)\left(I - \frac{2i\tau_k}{z - \bar{z}_k} P_{k2}\right),$$

где

$$P_{k1}^2 = P_{k1};\ P_{k1} J_2 \geqslant 0;\ P_{k2}^2 = P_{k2};\ P_{k2} J_2 \leqslant 0.$$

Для удобства записи перейдем в единичный круг и будем считать; что двучленные множители нормированы к модулю в $m, \zeta = 0$. Тогда

$$b_k(\zeta) = \left\{I - \left(\frac{1 - \bar{\zeta}_k \zeta}{\zeta_k - \zeta} \cdot \frac{\zeta_k}{|\zeta_k|}\right) P_{k1}\right\}\left\{I - \left(1 - \frac{\zeta_k - \zeta}{1 - \bar{\zeta}_k \zeta} \cdot \frac{|\zeta_k|}{\zeta_k}\right) P_{k2}\right\}$$

и имеет место

Теорема 6. (*критерий Данжуа*). *Для того чтобы проблема Неванлинны-Пика была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{(1 - |\zeta_k|)\, P_{k1} + \left(1 - \frac{1}{|\zeta_k|}\right) P_{k2}\right\} \quad (|\zeta_k| < 1).$$

Одесский электротехнический институт
связи им. А. С. Попова,

Одесский технологический институт
холодильной промышленности

Поступила 20.IV.1976

Ի. Վ. ԿՈՎԱԼԻՇԻՆԱ, Գ. Մ. ՉՈՒԲԿՈՎԱ-ՎԻԴՈՎԱ. Նևանլիննա-Պիկի պրոբլեմը վերին կիսահարթությունում նևանլիննյան. սիմետրիկ մատրից-ֆունկցիաների համար (*ամփոփում*)

Ներկա հոդվածում դիտարկվում է Նևանլիննա-Պիկի խնդիրը $w(z)$ m-րդ կարգի նևանլիննյան մատրից-ֆունկցիաների համար

$$\frac{w(z) - w^*(z)}{z - \bar{z}} \geqslant 0,$$

որոնք բավարարում են լրացուցիչ սիմետրիկության պայմանի

$$w'(z) = w(z).$$

խնդիրը լուծվում է անալիտիկ J-ձգվող մատրից-ֆունկցիաների տեսության մեթոդներով։

I. V. KOVALISHINA. G. M. CHUBKOVA-VIDOVA. *Nevanlinne-Peak problem for nevanlinne's symmetric matrix-functions in the upper halfplane* (summary)

This article deals with Nevanlinne-Peak problem for nevanlinna matrix-functions $w(z)$ of m-th order $\left(\dfrac{w(z) - w^*(z)}{z - \bar{z}} > 0\right)$, satisfying an additional symmetry condition $w'(z) = w(z)$.

This problem is solved by the methods of the theory of analitic J-stretching matrix-function.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. В. Ковалишина, В. П. Потапов.* Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика, ДАН Арм.ССР, LIX, № 1, 1974.
2. *И. В. Ковалишина.* J-растягивающие матрицы-функции в задаче Каратеодори, ДАН Арм.ССР, LIX, № 3, 1974.
3. *И. В. Ковалишина.* J-растягивающие матрицы-функции и классическая проблема моментов, ДАН Арм.ССР, LX, № 1, 1975.
4. *В. П. Потапов.* Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Труды ММО, том 4, 1955.
5. *В. П. Потапов.* Общие теоремы о структуре и отщеплении элементарных множителей аналитических матриц-функций, ДАН Арм.ССР, XIVIII, № 5, 1969.
6. *А. В. Ефимов, В. П. Потапов.* J-растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории электрических цепей, УМН, XXVIII, вып. 1 (169), 1973.
7. *И. В. Ковалишина.* Аддитивное разложение произвольной реактивной матрицы-функции, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика“, VI, № 1, 1971.
8. *С. А. Орлов.* О сходимости и характере расходимости монотонных семейств аналитических J-сжимающих матриц-функций, ДАН Арм.ССР, LIX, № 4, 1974.
9. *Г. М. Чубкова-Видова.* Об элементарных множителях J-несжимающих, симплектических матриц-функций в верхней полуплоскости, журн. „Молодой научный работник“, (ЕГУ), 2 (22), 1975.