А. А. ГОЛЬДБЕРГ, Л. С. КОЧИНЯН, С. Ц. САРКИСЯН

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ТИПА ПИКАРА

1°. Пусть f — мероморфная в $\mathbb{C}$ функция, не равная тождественно постоянной. Будем без пояснений использовать стандартные обозначения неванлинновской теории распределения значений [1], в частности, через $n(r, a, f)$ обозначается число a -точек функции f в круге $\{z: |z| \leq r\}$. Пусть φ — непрерывная функция, $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$. Нам будут интересовать условия, при которых можно утверждать, что уравнение

$$f(z) = \varphi(|z|) \quad (1)$$

имеет хотя бы один корень в $\mathbb{C}$. Оказывается, что случай, когда (1) не имеет корней в $\mathbb{C}$, возможен лишь тогда, когда $\varphi(r)$ при $r \rightarrow \infty$ достаточно быстро стремится к предельному значению, которое является пикаровским исключительным значением для f . Условие, что в правой части (1) стоит функция от $|z|$, а не просто от z , очень существенно, как показывают известные примеры (например, $f(z) = e^z + z$, $\varphi(z) = z$).

Приведем сначала формулировки полученных результатов.

Теорема 1. Пусть f — произвольная мероморфная функция и $f \neq$ постоянной. Если не существует предела функции φ при $r \rightarrow \infty$, то уравнение (1) имеет хотя бы один корень в $\mathbb{C}$. Если при этом функция f трансцендентная, то уравнение (1) имеет неограниченное множество корней.

Если $\varphi(r) \rightarrow a$ при $r \rightarrow \infty$, то не уменьшая общности, можно считать, что $a = \infty$. В самом деле, если $a \neq \infty$, то мы рассмотрели бы уравнение $f_1(z) = \varphi_1(|z|)$, где $f_1 = (f - a)^{-1}$, $\varphi_1 = (\varphi - a)^{-1}$. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что если φ имеет предел при $r \rightarrow \infty$, то он равен ∞ .

Теорема 2. Пусть $\varphi(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Если f имеет непустое конечное множество полюсов, то уравнение (1) имеет по крайней мере один корень. Если f имеет бесконечное число полюсов, то уравнение (1) имеет неограниченное множество корней.

Теорема 3. Пусть $\varphi(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Если f — целая функция и

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \{T(r, f) - \ln |\varphi(r)|\} > 5 \ln 2, \quad (2)$$

то уравнение (1) имеет по крайней мере один корень. Если f имеет не более конечного числа полюсов и

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{T(r, f) - \ln |\varphi(r)|}{\ln r} = \infty, \quad (3)$$

то уравнение (1) имеет неограниченное множество корней в $\mathbb{C}$.

Теорема 4. Пусть $\varphi(r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow \infty$. Если f имеет не более конечного числа полюсов и

$$\underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \{ \ln M(r, f) - \ln |\varphi(r)| \} > 0, \quad (4)$$

то уравнение (1) имеет непустое множество корней, причем неограниченное, если f — трансцендентная функция.

Замечание. В теоремах 1–4 говорится о неограниченных, а не просто о бесконечных множествах корней в $\mathbb{C}$, так как очевидно, что уравнение (1) может иметь неизолированные корни. Например, если

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z - 1 + \frac{1}{z - 1} \right),$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{2} - 1 & \text{при } 0 \leq r \leq 2, \\ 1 & \text{при } 2 \leq r < \infty, \end{cases}$$

то множество корней (1) является окружностью $\{z: |z - 1| = 1\}$.

Очевидно, если бы в (4) стоял верхний предел вместо нижнего, то теорема 4 содержала бы теорему 3. Хотя нам не удалось так усилить теорему 4, все же условие (4) можно ослабить. Этот и другие вопросы, касающиеся точности полученных достаточных условий, будут обсуждены в конце статьи, где будут также указаны некоторые открытые вопросы.

Постановка задачи, рассматриваемой в этой статье, принадлежит Б. Я. Левину (1962 г.). Ему же принадлежит идея, лежащая в основе доказательства теоремы 3. Авторы приносят Б. Я. Левину искреннюю благодарность.

Уравнение (1) с $\varphi(|z|) = |z|^2$ впервые рассматривалось в статье С. Ц. Саркисяна [2], который применил полученные результаты при изучении обобщенных систем Коши–Римана и М. Б. Балка [7], изучавшего распределение значений бианалитических функций.

2°. При доказательстве всех четырех теорем будет использована следующая лемма.

Лемма 1. Если для некоторого ρ , $0 < \rho < \infty$, выполняется $n(\rho, \varphi(\rho), f) > 0$, то уравнение (1) имеет по крайней мере один корень. Если существует последовательность (ρ_n) , стремящаяся к ∞ , такая, что $n(\rho_n, \varphi(\rho_n), f) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то множество корней уравнения (1) неограничено.

Доказательство. Пусть $f = g_1/g_2$, где g_1 и g_2 — целые функции без общих нулей. Функцию φ также можно представить в виде

$\varphi = \varphi_1/\varphi_2$, где φ_1 и φ_2 непрерывны и ограничены на $\mathbf{R}_+$ и одновременно не обращаются в нуль. В самом деле, нетрудно построить непрерывную на $\mathbf{R}_+$ функцию φ_1 такую, что $\varphi_1(r) = \varphi(r)$, если $|\varphi(r)| \leq 1$, и $|\varphi_1(r)| = 1$, если $|\varphi(r)| > 1$. Определим φ_2 так: $\varphi_2(r) = 1$, если $|\varphi(r)| \leq 1$, $\varphi_2(r) = \varphi_1(r)/\varphi(r)$, если $|\varphi(r)| > 1$. Очевидно, φ_2 также непрерывная функция на $\mathbf{R}_+$, причем если $\varphi_1(r) = 0$, то $\varphi_2(r) = 1$, а если $\varphi_2(r) = 0$, то $|\varphi_1(r)| = 1$. Тождество $\varphi = \varphi_1/\varphi_2$ легко проверяется. Введем непрерывную в $\mathbf{C}$ функцию $G(z) = \varphi_2(|z|)g_1(z) - \varphi_1(|z|)g_2(z)$. Легко видеть, что множество корней уравнения (1) совпадает с множеством нулей функции G .

Пусть $n(\rho, \varphi(\rho), f) > 0$. Предположим, что уравнение (1) не имеет корней. Тогда функция $\psi(r) = \frac{1}{2\pi} \Delta_r \text{Arg } G$, где через $\Delta_r \text{Arg } G$ обозначено приращение $\text{Arg } G$ на окружности $\{z: |z| = r\}$, определена и непрерывна на $]0, \infty[$.

Поскольку функция ψ принимает лишь целочисленные значения, то она тождественно равна постоянной. Но по принципу аргумента, примененному к целой функции $\varphi_2(\rho)g_1(z) - \varphi_1(\rho)g_2(z)$, имеем $\psi(\rho) = n(\rho, \varphi(\rho), f) > 0$. Поэтому $\psi(r) \equiv \psi(\rho) > 0$. Из того, что $\psi(1/n) > 0$, по принципу аргумента вытекает, что целая функция $\varphi_2(1/n)g_1(z) - \varphi_1(1/n)g_2(z)$ имеет в круге $\{z: |z| < 1/n\}$ по крайней мере один нуль z_n . Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве $\varphi_2(1/n)g_1(z_n) - \varphi_1(1/n)g_2(z_n) = 0$, получим, что $G(0) = 0$, т. е. уравнение (1) имеет корень при $z = 0$, вопреки предположению. Тем самым первое утверждение леммы 1 доказано.

Пусть $n(\rho_n, \varphi(\rho_n), f) \rightarrow \infty$ и $\rho_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Предположим, что все корни уравнения (1) лежат в круге $\{z: |z| < R < \infty\}$. Тогда функция $\psi(r)$ определена на $]R, \infty[$ и тождественно равна постоянной на этом интервале. Но при $\rho_n > R$ имеем $\psi(\rho_n) = n(\rho_n, \varphi(\rho_n), f) \rightarrow \infty$, и мы приходим к противоречию.

3°. Доказательство теоремы 1. Так как функции φ непрерывна и не имеет предела при $r \rightarrow \infty$, то множество предельных точек $\varphi(r)$ при $r \rightarrow \infty$ бесконечно. Поэтому существует такое $a \in \mathbf{C}$, что $\varphi(\rho_n) \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$ и уравнение $f(z) = a$ имеет хотя бы один корень и бесконечное число корней, если f — трансцендентная функция. Не уменьшая общности, можно считать, что $a = \infty$. Пусть z_0 — полюс f . Из известных теорем о локальном поведении аналитических функций следует, что существует такая проколота окрестность U точки z_0 и такое M , что для всех $m \geq M$ множество $U \cap \{z: |f(z)| = m\}$ является замкнутой жордановой кривой $\Gamma(m)$, обходящей z_0 , и приращение $\text{Arg } f$ по $\Gamma(m)$ равно $-2\pi\lambda$, где λ — порядок полюса f в z_0 . Возьмем настолько большое ρ , что $|\varphi(\rho)| > M$ и $U \subset \{z: |z| < \rho\}$. Очевидно, что на $\Gamma(m)$ с $m = |\varphi(\rho)|$ существует корень уравнения $f(z) = \varphi(\rho)$. Следовательно, $n(\rho, \varphi(\rho), f) > 0$ и по лемме 1 уравнение (1) имеет хотя бы один корень.

В случае, когда f — трансцендентная функция, возьмем наперед заданное число n полюсов $z_1, \dots, z_n$ и такое M , что для всех $m \geq M$ можно построить описанные выше кривые $\Gamma_1(m), \dots, \Gamma_n(m), \Gamma_j(m)$ обходит z_j . Возьмем настолько большое ρ_n , что $\rho_n > n$, $|\varphi(\rho_n)| \geq M$ и все кривые $\Gamma_j(M)$, $1 \leq j \leq n$, лежат в круге $\{z: |z| < \rho_n\}$. Тогда уравнение $f(z) = \varphi(\rho_n)$ имеет по крайней мере по одному корню на каждой кривой $\Gamma_j(m)$, где $m = |\varphi(\rho_n)|$, следовательно, $n(\rho_n, \varphi(\rho_n), f) \geq n$. По лемме 1 уравнение (1) имеет неограниченное множество корней.

Доказательство теоремы 2 точно такое, как доказательство теоремы 1, с тем различием, что информация о наличии полюсов у функции f введена в условие теоремы. Теорема 2 для $\varphi(|z|) = |z|^2$ по существу была доказана в [7], лемма 1, и в [8], теорема 1. Используемый М. Б. Балком метод может быть легко приспособлен и для доказательства наших теорем 1 и 2.

4°. Доказательство теоремы 3. Пусть $f(0) \neq \infty$. Если выполнено условие (2), то существует положительное число η и последовательность (r_n) , монотонно стремящаяся к ∞ , такие, что для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$T(r_n, f) > \ln |\varphi(r_n)| + 5 \ln 2 + \eta, \quad (5)$$

$$|\varphi(r_n)| > \frac{1}{4}. \quad (6)$$

Обозначим $r'_n = \min \{r \geq r_n: |\varphi(r)| = 2 |\varphi(r_n)|\}$. Обозначим через E_n кривую $E_n = \{a = \varphi(r): r_n \leq r \leq r'_n\}$. Очевидно, что $E_n \subset \{a: |a| \leq 2 |\varphi(r_n)|\}$. По известной теореме Д. По́я ([3], стр. 294) трансфинитный диаметр d_n множества E_n не меньше $|\varphi(r_n)|/4$, так как длина отрезка, соединяющего точки $\varphi(r_n)$ и $\varphi(r'_n)$, не меньше $|\varphi(r_n)|$. Согласно известному соотношению $d_n = \exp(-\gamma_n)$, где γ_n — постоянная Робэна для множества E_n , имеем $\gamma_n \leq \ln(4/|\varphi(r_n)|)$.

Пусть $\mu_n(a)$ — распределение Робэна единичной массы на E_n . По формуле О. Фростмана ([1], гл. VI, § 4) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{E_n} \ln \frac{1}{|f(0) - a|} d\mu_n(a) + N(r, \infty, f) = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{E_n} \ln \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\mu_n(a) + \int_{E_n} N(r, a, f) d\mu_n(a). \end{aligned} \quad (7)$$

Из свойств распределения Робэна следует, что для

$$u_n(z) = \int_{E_n} \ln \frac{1}{|z - a|} d\mu_n(a) \quad (8)$$

выполняется

$$u_n(z) = \gamma_n \text{ при } z \in E_n, \quad u_n(z) \leq \gamma_n \text{ при } z \in \bar{E}_n. \quad (9)$$

При $|z| \geq 4 |\varphi(r_n)|$ и $a \in E_n$ имеем $|z/(z-a)| \leq 2$, следовательно, с учетом (6) и (8)

$$u_n(z) = -\ln|z| + \int_{E_n} \ln \left| \frac{z}{z-a} \right| d\mu_n(a) \leq -\ln^+|z| + \ln 2. \quad (10)$$

Из (9) следует, что для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется

$$u_n(z) \leq \gamma_n \leq \ln(4/|\varphi(r_n)|).$$

Так как при $|z| \leq 4 |\varphi(r_n)|$ выполняется

$$\ln \frac{4}{|\varphi(r_n)|} + \ln^+|z| \leq \ln 16,$$

то из (10) получаем, что

$$u_n(z) \leq -\ln^+|z| + \ln 16.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{E_n} \ln \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|} d\mu_n(a) \leq -m(r, f) + \ln 16. \quad (11)$$

Далее

$$\int_{E_n} \ln \frac{1}{|f(0)-a|} d\mu_n(a) \geq \ln \frac{1}{|f(0)| + 2|\varphi(r_n)|}. \quad (12)$$

Из (7), (11) и (12) получаем

$$\begin{aligned} & \int_{E_n} N(r, a, f) d\mu_n(a) \geq T(r, f) + \\ & + \ln \frac{1}{|f(0)| + 2|\varphi(r_n)|} - \ln 16 = \\ & = T(r, f) - \ln |\varphi(r_n)| - 5 \ln 2 - \ln \left(1 + \frac{|f(0)|}{2|\varphi(r_n)|} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая (5), получаем

$$\int_{E_n} N(r_n, a, f) d\mu_n(a) > \eta - \ln \left(1 + \frac{|f(0)|}{2|\varphi(r_n)|} \right),$$

следовательно, при достаточно больших r_n выполняется

$$\int_{E_n} N(r_n, a, f) d\mu_n(a) > 0. \quad (14)$$

Тогда существует $a_n \in E_n$ такое, что $N(r_n, a_n, f) > 0$. Отсюда вытекает, что $n(r_n, a_n, f) > 0$. Пусть $\rho_n, r_n \leq \rho_n \leq r_n$, таково, что $a_n = \varphi(\rho_n)$. Тогда $n(\rho_n, \varphi(\rho_n), f) \geq n(r_n, \varphi(\rho_n), f) > 0$ и по лемме 1 уравнение (1) имеет по крайней мере один корень.

Если $f(0) = \infty$ и

$$f(z) = c_\lambda z^{-\lambda} + c_{\lambda-1} z^{-\lambda-1} + \dots, c_\lambda \neq 0,$$

$\lambda \in \mathbf{N}$, то в (7) вместо интеграла в левой части равенства стоит $\ln(1/|c_\lambda|)$ и в правой части неравенства (12) вместо $-\ln(|f(0)| + 2|\varphi(r_n)|)$ будет стоять $-\ln|c_\lambda|$. Очевидно, это не повлияет на справедливость дальнейших рассуждений.

Замечание. Если $f(0) = 0$, то из (13) легко получаем, что уравнение (1) имеет корень, если существует хотя бы одно r такое, что $|\varphi(r)| > 1/4$ и $T(r, f) - \ln|\varphi(r)| > 5 \ln 2$.

Пусть теперь f имеет не более конечного числа полюсов и выполняется (3). Если $f(0) \neq \infty$, то возьмем такое $\delta > 0$, что $|f(z)| \leq M$ при $|z| \leq \delta$ и такое r_0 , что $|\varphi(r)| > M$ при $r \geq r_0$.

Возьмем последовательность $(r_n), r_n \geq r_0, r_n \rightarrow \infty$, такую, что

$$\frac{T(r_n, f) - \ln|\varphi(r_n)|}{\ln r_n} \rightarrow \infty \quad (15)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Повторяя прежние рассуждения, приходим к (13), откуда, учитывая (15), получаем

$$K_n = \frac{1}{\ln r_n} \int_{E_n} N(r_n, a, f) d\mu_n(a) \rightarrow \infty \quad (16)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Но у нас $E_n \cap \{|a| \leq M\} = \emptyset$, поэтому для любого $a \in E_n$

$$N(r_n, a, f) \leq n(r_n, a, f) \ln \frac{r_n}{\delta}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что

$$\frac{\ln(r_n/\delta)}{\ln r_n} \int_{E_n} n(r_n, a, f) d\mu_n(a) \geq K_n \rightarrow \infty.$$

Очевидно, существует $\rho_n, r_n \leq \rho_n \leq r_n$, такое, что

$$n(r_n, \varphi(\rho_n), f) \geq \frac{K_n \ln r_n}{\ln(r_n/\delta)} \rightarrow \infty.$$

Тем более $n(\rho_n, \varphi(\rho_n), f) \rightarrow \infty$ и из леммы 1 следует, что уравнение (1) имеет неограниченное множество корней.

Если $f(0) = \infty$, то мы не можем получить (17), поэтому несколько видоизменим рассуждения. Пусть на окружности $\{z: |z| = \delta\}$ выполняется $|f(z)| < \rho$.

Запишем формулу Фростмана (7) (в которой первое слагаемое слева равно $-\ln |c_n|$) для $r > \delta$ и для $r = \delta$ и из первого равенства вычтем второе. Тогда получим

$$N(r, \infty, f) - N(\delta, \infty, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{E_n} \ln \frac{1}{|f(re^{i\theta}) - a|} d\mu_n(a) - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{E_n} \ln \frac{1}{|f(\delta e^{i\theta}) - a|} d\mu_n(a) + \int_{E_n} \{N(r, a, f) - N(\delta, a, f)\} d\mu_n(a). \quad (18)$$

Так как

$$N(r, a, f) - N(\delta, a, f) \leq n(r, a, f) \ln \frac{r}{\delta},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{E_n} \ln \frac{1}{|f(\delta e^{i\theta}) - a|} d\mu_n(a) \geq \ln \frac{1}{\mu + 2|\varphi(r_n)|},$$

то учитывая (11), получим

$$\ln \frac{r_n}{\delta} \int_{E_n} n(r_n, a, f) d\mu_n(a) \geq T(r_n, f) - \ln |\varphi(r_n)| - 5 \ln 2 - \\ - \ln \left(1 + \frac{\mu}{2|\varphi(r_n)|} \right) - N(\delta, \infty, f),$$

после чего, используя (15), как выше, приходим к соотношению $n(r_n, \varphi(r_n), f) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и доказываем теорему.

5°. Доказательство теоремы 4. Сначала докажем такую лемму.

Лемма 2. Пусть F — неубывающая выпуклая на $[x_0, \infty[$ функция, $F(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow +\infty$, h и τ_1 — постоянные, $0 < h \leq \tau_1 < \infty$.

Обозначим $E = \left\{ x \in [x_0, \infty[: F\left(x + \frac{h}{F'(x)}\right) < F(x) + \tau_1 \right\}$, где под F'

понимаем левостороннюю производную при $x > x_0$ и правостороннюю при $x = x_0$. Тогда

$$d_+(E) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{mes } |E \cap [x_0, x]|}{x} \geq 1 - \frac{h}{\tau_1}. \quad (19)$$

Доказательство. Обозначим $A = [x_0, \infty[\setminus E$, $A(r) = A \cap [x_0, r]$, $A_1(r) = A \cap [r, \infty[$. Пусть $r_1 = \min \{r : r \in A\}$. Обозначим через r_1' корень уравнения $F(x) = F(r_1) + \tau_1$. Очевидно, этот корень единственный, $r_1' > r_1$ и $r_1 + h/F'(r_1) \geq r_1'$. Пусть выбраны $r_1, \dots, r_{n-1}$ и $r_1', \dots, r_{n-1}'$. Тогда выбираем $r_n = \min \{r : r \in A_1(r_{n-1}')\}$ и r_n' такое, что

$$F(r'_n) = F(r_n) + \eta, \quad (20)$$

и выводим, что

$$r_n < r'_n \leq r_n + \frac{h}{F'(r_n)}. \quad (21)$$

Из (20) следует, что $F(r_n) \geq (n-1)\eta + F(x_0)$, значит, r_n монотонно стремится к ∞ при $n \rightarrow \infty$. Фиксируем x , $x > x_0$. Пусть $r_n \leq x$, $r_{n+1} > x$. Тогда $A(x) \subset \bigcup_{j=1}^n [r_n, r'_n]$ и

$$\text{mes } A(x) \leq \sum_{j=1}^n (r'_n - r_n) \leq h \sum_{j=1}^n \frac{1}{F'(r_j)}, \quad (22)$$

в силу (21). Поскольку F — выпуклая функция, то

$$F'(r_{j+1})(r_{j+1} - r_j) > F(r_{j+1}) - F(r_j) \geq \eta, \quad j \in \mathbb{N},$$

$$\frac{1}{F'(r_{j+1})} \leq \frac{r_{j+1} - r_j}{\eta}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{F'(r_j)} &= \frac{1}{F'(r_1)} + \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^{n-1} (r_{j+1} - r_j) = \frac{1}{F'(r_1)} + \frac{r_n - r_1}{\eta} \leq \\ &\leq \frac{1}{F'(r_1)} + \frac{x - r_1}{\eta}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (22) и (23) получаем, что

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{mes } A(x)}{x} \leq \frac{h}{\eta},$$

откуда сразу следует (19).

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 4. Предположим, что f — трансцендентная функция. Не уменьшая общности, можно считать, что все полюсы f , если они имеются, лежат в круге $\{z: |z| < 1\}$. Разложив f в ряд Лорана в $\{z: |z| \geq 1\}$ и обозначив через f_0 правильную часть этого разложения, а через ω — главную часть, видим, что $f = f_0 + \omega$, где f_0 — трансцендентная целая функция, а ω — рациональная функция, аналитическая при $|z| \geq 1$ и имеющая нуль в ∞ .

Будем обозначать $M(r) = M(r, f)$, $M_0(r) = M(r, f_0)$. Очевидно, что $M(r) = M_0(r) + o(1)$, $r \rightarrow \infty$. Из (4) получаем, что существует такое положительное число η , что для всех r , начиная с некоторого, выполняется $M_0(r) > e^\eta |\varphi(r)|$. Обозначим $\rho = \rho(r) = \min \{x \geq r: |\varphi(x)| = M_0(r)\}$. Пусть $\nu(r)$ — центральный индекс функции f_0 , $\zeta = \zeta(r) = \text{re } \theta(r)$ — такая точка, что $|f_0(\zeta(r))| = M_0(r)$. Обозначим через $D(r)$ сектор

$$D(r) = \{z: ||z| - r| < r \nu(r)^{-1}, |\arg z - \theta(r)| < \nu(r)^{-15/16}\}.$$

Известно ([4], стр. 101, теорема 29), что для всех $r \geq 1$, кроме, возможно, множества E_1 интервалов конечной логарифмической длины (т. е. $\int_{E_1} d \ln r < \infty$) при $z \in D(r)$ выполняется

$$f_0(z) = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\nu(r)} f_0(\zeta)(1 + \omega_r(z)), \quad |\omega_r(z)| < K\nu(r)^{-1/16}, \quad (24)$$

где K — некоторая постоянная. Зафиксируем число h , $0 < h < 1$, $h < r/2$. Пусть $q = q(r) = [\nu(r)^{1/32}]$, $\psi(r) = \arg(f_0(\zeta(r))/\varphi(\rho(r)))$, $|\psi(r)| \leq \pi$. Тогда легко видеть, что при всех достаточно больших r

$$\Delta(r) = \left\{ z: ||z| - r| < hr\nu(r)^{-1}, \left| \arg z - \theta(r) + \frac{\psi(r)}{\nu(r)} \right| < \frac{(2q(r)-1)\pi}{\nu(r)} \right\} \subset D(r).$$

Следовательно, для $r \in E_2$, где E_2 — некоторое множество конечной логарифмической меры, при $z \in \Delta(r)$ выполняется (24).

Для некоторого измеримого множества $E \subset]1, \infty[$ величина

$$d_*(E) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_1^r \chi(t, E) dt,$$

где $\chi(t, E)$ — характеристическая функция множества E , называется нижней плотностью E , а величина

$$dl_*(E) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \chi(t, E) d \ln t$$

— нижней логарифмической плотностью E .

Покажем, что на некотором множестве E_3 таком, что $dl_*(E_3) > 0$, выполняется

$$r \left(1 + \frac{h}{\nu(r)}\right) < \rho(r), \quad r \in E_3. \quad (25)$$

В силу монотонности $M_0(r)$ для этого достаточно показать, что

$$M_0 \left(r \left(1 + \frac{h}{\nu(r)}\right) \right) < M_0(\rho(r)), \quad r \in E_3. \quad (26)$$

Но для всех достаточно больших r

$$M_0(\rho(r)) > e^\eta |\varphi(\rho(r))| = e^\eta M_0(r).$$

Значит, (26) будет доказано, если мы покажем, что

$$M_0 \left(r \left(1 + \frac{h}{\nu(r)}\right) \right) < e^\eta M_0(r), \quad r \in E_3. \quad (27)$$

Обозначим $\Psi(t) = \ln M_0(e^t)$, $t \in \mathbb{R}$. По теореме Адамара о трех кругах $\Psi(t)$ — возрастающая выпуклая функция. Тогда по лемме 2 неравенство

$$\Psi\left(t + \frac{2h}{\Psi'(t)}\right) < \Psi(t) + \tau \quad (28)$$

выполняется на некотором множестве E_4 , таком, что $d_*(E_4) > 1 - (2h)/\tau > 0$. Заменяя в (28) $t = \ln r$ и обозначая через E_5 образ E_4 при отображении $t \rightarrow e^t$, получим, что $dl_*(E_5) = d_*(E_4) > 0$ и при $r \in E_5$ выполняется

$$M_0\left(r\left(1 + \frac{2h}{d \ln M_0(r)}\right)\right) \leq M_0\left(\exp\left\{\ln r + \frac{2h}{d \ln M_0(r)}\right\}\right) < e^\tau M_0(r), \quad (29)$$

где под $d \ln M_0(r)/d \ln r$ понимаем левостороннюю производную. Известно, что вне некоторого множества конечной логарифмической меры

$$\nu(r) = (1 + o(1)) \frac{d \ln M_0(r)}{d \ln r}, \quad r \rightarrow \infty$$

(см. [5], часть 1, п. 4; [6], стр. 171, теорема 1.3.18). Тогда вне некоторого множества E_6 конечной логарифмической меры

$$\nu(r) > \frac{1}{2} \frac{d \ln M_0(r)}{d \ln r}, \quad r \notin E_6. \quad (30)$$

Приняв $E_3 = E_5 \setminus E_6$, из (29) и (30) получим (27), а следовательно, и (25). Из (25) вытекает, что

$$\Delta(r) \subset \{z: |z| < \rho(r)\}. \quad (31)$$

Будем теперь рассматривать только значения $r \in E_7 = E_3 \setminus E_2$, $dl_*(E_7) > 0$. Покажем, что для всех достаточно больших $r \in E_7$ уравнение $f(z) = \varphi(\rho(r))$ имеет в $\Delta(r)$ ровно $2q(r) - 1$ корней. Пусть $\varphi(\rho(r)) = M_0(r) \exp(i\psi_1(r))$. Используя (24), запишем

$$\begin{aligned} f(z) - \varphi(\rho(r)) &= f_0(z) - M_0(r) e^{i\psi_1(r)} + \omega(z) = \\ &= \left\{ \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\nu(r)} e^{i\psi(r)} - 1 \right\} M_0(r) e^{i\psi_1(r)} + \\ &+ \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\nu(r)} f(\zeta) \omega_r(z) + \omega(z). \end{aligned}$$

Обозначим

$$\Phi_1(z) = \left\{ \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\nu(r)} e^{i\psi(r)} - 1 \right\} M_0(r) e^{i\psi_1(r)},$$

$$\Phi_2(z) = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\nu(r)} f(\zeta) \omega_r(z) + \omega(z).$$

В $\Delta(r)$ функция Φ_1 имеет ровно $2q - 1$ нулей, — столько, сколько раз обращается в нуль

$\exp \{i((x - \theta(r))\nu(r) + \psi(r))\} = 1$ при

$$\left| x - \theta(r) + \frac{\psi(r)}{\nu(r)} \right| < \frac{(2q-1)\pi}{\nu(r)}.$$

Так как $f(z) - \varphi(\rho(r)) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$, то нам достаточно показать, что на $\partial\Delta(r)$ выполняется $|\Phi_2(z)| < |\Phi_1(z)|$ и применить теорему Руше. При $z \in \partial\Delta(r)$, $|z| = r + hr\nu(r)^{-1}$ имеем ($r \rightarrow \infty$)

$$\frac{|\Phi_2(z)|}{|\Phi_1(z)|} \leq \frac{\left(1 + \frac{h}{\nu(r)}\right)^{\nu(r)} K\nu(r)^{-1/16} + O\left(\frac{1}{r}\right)}{\left(1 + \frac{h}{\nu(r)}\right)^{\nu(r)} - 1} =$$

$$= (1 + o(1))(e^h K\nu(r)^{-1/16} + O(1/r))(e^h - 1)^{-1} = o(1).$$

Аналогично при $z \in \partial\Delta(r)$, $|z| = r - hr\nu(r)^{-1}$ имеем

$$\frac{|\Phi_2(z)|}{|\Phi_1(z)|} \leq (1 + o(1))(e^{-h} K\nu(r)^{-1/16} + O(1/r))(1 - e^{-h})^{-1} = o(1).$$

Если

$$z \in \partial\Delta(r), \arg z = \theta(r) - \frac{\psi(r)}{\nu(r)} \pm (2q-1)\frac{\pi}{\nu(r)},$$

то

$$\frac{|\Phi_2(z)|}{|\Phi_1(z)|} \leq \frac{\left(\frac{|z|}{r}\right)^{\nu(r)} K\nu(r)^{-1/16} + O\left(\frac{1}{r}\right)}{\left(\frac{|z|}{r}\right)^{\nu(r)} + 1} \leq$$

$$\leq K\nu(r)^{-1/16} + O\left(\frac{1}{r}\right) = o(1).$$

Значит, при $z \in \partial\Delta(r)$ имеем $|\Phi_2(z)/\Phi_1(z)| = o(1) < 1$ для всех достаточно больших r . Следовательно, $f(z) = \varphi(\rho(r))$ имеет в $\Delta(r)$ ровно $2q(r) - 1$ корней, и с учетом (31) получаем

$$n(\rho(r), \varphi(\rho(r)), f) \geq 2q(r) - 1.$$

Теперь возьмем любую последовательность $r_n \rightarrow \infty$, $r_n \in E$, положим $\rho_n = \rho(r_n)$ и, принимая во внимание, что $q(r_n) \rightarrow \infty$, найдем, что $n(\rho_n, \varphi(\rho_n), f) \rightarrow \infty$. Из леммы 1 следует, что уравнение (1) имеет неограниченное множество корней.

Если f имеет хотя бы один полюс, то наличие у уравнения (1) по крайней мере одного корня следует из теоремы 2. Остается рассмотреть случай, когда f — многочлен. В этом случае также опираемся на теорему Руше, но предыдущие рассуждения существенно упрощаются, так как вместо (24) мы можем воспользоваться соотношением $f(z) = a \cdot z^\nu (1 + o(1))$ при $z \rightarrow \infty$ и, более того, в (4) заменить нижний предел верхним.

Замечание. В случае, когда f — трансцендентная функция, условие (4) можно заменить следующим более слабым: для любого, ε , $1 > \varepsilon > 0$, и произвольного $E \subset [1, \infty[$, такого, что $d_{l_*}(E) \geq 1 - \varepsilon$, выполняется

$$\overline{\lim}_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in E}} |\ln M(r, f) - \ln |\varphi(r)|| > 0.$$

Доказательство проводится как выше, но h берем столь малым, чтобы выполнялось $(2h)/r_1 < \varepsilon$. Тогда $d_*(E_4) \geq 1 - \varepsilon$ и в дальнейших рассуждениях ничего менять не надо.

6°. Условия теоремы 3, по-видимому далеки от неулучшаемых. Если бы в теореме 4 можно было в условии (4) заменить нижний предел верхним (как шаг в этом направлении см. замечание в конце 5°), то теорема 4 полностью покрывала бы теорему 3. Во всяком случае, вероятно, в (2) можно заменить $5 \ln 2$ нулем.

Пример $f = z^{-n}$, $\varphi(r) = r$ с $T(r, f) = n \ln^+ r$ показывает, что в (3) нельзя справа поставить какое-либо конечное число и утверждать, что уравнение (1) имеет неограниченное множество корней (в нашем примере все n корней уравнения (1) лежат на единичной окружности).

В теореме 4 нельзя вместо (4) требовать лишь $\ln M(r, f) > \ln |\varphi(r)|$ для всех достаточно больших r . На это указывает пример:

$$f(z) = ie^z, \quad \varphi(r) = \exp \left\{ r \cos \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{\pi}{2r} \right) \right\},$$

для которого при всех $r \geq 0$ выполняется $\ln M(r, f) > \ln \varphi(r)$, но уравнение (1) не имеет ни одного корня.

Львовский государственный университет
им. И. Франко.

Всесоюзный научно-исследовательский
институт радиофизических измерений

Поступила 17.1.1977

Ա. Ա. ԴՈԼԴԲԵՐԴ, Լ. Ս. ՔՈՉԻՆՅԱՆ, Ս. Ծ. ՍԱՐԿԻՍՅԱՆ. Պիկարի տիպի մի շարք բեռեմ-
ների մասին (ամփոփում)

Դիտարկվում է $f(z) = \varphi(|z|)$ հավասարումը, որտեղ f -ը վերջավոր հարթության մեջ մերոմորֆ ֆունկցիա է, իսկ φ -ն $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ անընդհատ արտապատկերումն է: Ստացված են մի շարք բավարար պայմաններ, որոնց դեպքում նշված հավասարումն ունի մեկ արմատ կամ անվերջ բազմություն արմատներ:

A. A. GOLDBERG, L. S. KOCHINIAN, S. C. SARKISIAN. *On some theorems of Picard's type (summary)*

The equation $f(z) = \varphi(|z|)$ is considered where f is a function meromorphic in the finite plane and $\varphi(r)$ is a continuous mapping $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. A number of sufficient conditions has been received for the mentioned equation to have at least one root or an infinite set of roots.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. Невалинна. Однозначные аналитические функции, ГИТТЛ, М.—Л., 1941.
2. С. Ц. Саркисян. О разрушении решений систем уравнений с частными производными, ДАН Арм.ССР, 36, № 5, 1963, 271—276.
3. Г. М. Голузин. Геометрическая теория функций комплексного переменного, Изд. „Наука“, изд. 2, М., 1966.
4. G. Valltron. Lectures on the general theory of integral functions, Ed. Privat, Toulouse, 1923.
5. G. Valltron. Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions a correspondance régulière, Ann. fac. sci. univ. Toulouse, 5, 1913, 117—257.
6. Ш. И. Стрелиц. Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений, Изд. „Минтис“, Вильнюс, 1972.
7. М. Б. Балк. Теорема Пикара для целых бинаналитических функций, ДАН СССР, 152, № 6, 1963, 1282—1285.
8. М. Б. Балк. Уточнение теоремы Пикара для некоторых классов бинаналитических функций, Лит. мат. сб., № 4, № 3, 1964, 297—301.