ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XIII, № 1, 1978 Математика

К. А. ЯГДЖЯН

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СЛАБО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КЛАССАХ ЖЕВРЕ

Введение

В настоящей работе исследуется задача Коши для многомерных гиперболических скалярных уравнений произвольного порядка, вырождающихся на начальной гиперплоскости. Как известно, вообще говоря, задача Коши для нестрого гиперболических уравнений не является корректной в пространствах Соболева. В связи с этим возможны два подхода в исследовании подобных задач. Один из них заключается в нахождении таких условий на оператор, при которых задача остается корректной в пространствах Соболева. Этому подходу посвящено много работ, причем в некоторых случаях найдены необходимые и достаточные условия. Из них выделим работы [1]—[4], результаты которых будут нами использованы. Другой из подходов состоит в отыскании подходящих пространств функций, в которых задача Коши является корректной. Такими классами функций оказываются классы Жевре.

Последняя задача также достаточно хорошо изучена (см., например, [5]—[9]), однако, в большинстве работ выбор класса Жевре делается в зависимости только от главной части оператора, в то время, как естественнее считать класс Жевре зависящим от всего оператора. В работе [8] именно с этой точки зрения была рассмотрена задача Коши для скалярного уравнения второго порядка на плоскости. В [8] было выявлено, что некоторые гиперболические операторы допускают двойные оценки: с потерей гладкости и без потери гладкости, но с неинтегрируемым весом, что позволило определить классы, в которых задача Коши корректна, если рассматривать младшие члены оператора как возмущение.

В настоящей работе этот метод перенесен на случай многомерных гиперболических уравнений произвольного порядка с характеристиками переменной кратности.

§ 1. Постановка задачи. Формулировка результата

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$P(x, D)\, u = f, \tag{1}$$

где

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha,\ x = (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in R^{n+1},\ D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j},$$

$x_0 \equiv t$, $a_{(m, 0, \cdots, 0)} = 1$, а оператор P — гиперболический относительно x_0, так как необходимость гиперболичности для корректности в классах Жевре задачи Коши доказана в [5], [9]. Далее обозначаем

$$P_s(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = s} a_\alpha(x) \xi^\alpha,\quad P^{(\alpha)}_{s, \beta}(x, \xi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha P_s(x, \xi),$$

а через $G(\gamma)$ — класс бесконечно дифференцируемых, определенных в R^n функций, таких, что для $f \in G(\gamma)$ существуют M и R такие, что

$$\left(\int_{R^n} |D_x^\alpha f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq M R^{|\alpha|} \Gamma(1 + \gamma|\alpha|) \tag{2}$$

для всех α, где $\Gamma(x)$ — гамма функция Эйлера. Топология в $G(\gamma)$ задается обычным образом. Через $G(\delta, \gamma, m)$, $\delta > 0$ обозначаем функции $f(t, x)$, непрерывно отображающие $[0, \delta]$ в $G(\gamma)$, вместе со своими производными по t до порядка m включительно, т. е. $G(\delta, \gamma, m) = E([0, \delta], G(\gamma), m)$ с равномерной по t топологией. Предполагается, что $a_\alpha(x) \in G(1, \gamma, m)$.

Обозначим через Λ псевдодифференциальный оператор (п.д.о.) с символом $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$, а через R—оператор интегрирования по t, т. е. для

$$u \in C(R^{n+1}),\ (Ru)(t, x) = \int_0^t u(\tau, x)\, d\tau.$$

Полагая начальные условия однородными, запишем (1) в виде интегро-дифференциальной системы первого порядка:

$$MU \equiv \frac{\partial U}{\partial t} - iA(x, D)\Lambda U - \sum_{k=0}^{m-1} B^k(x, D) R^k U = F, \tag{3}$$

где $U = (U^1, U^2, \cdots, U^m)$, $U^k = \Lambda^{k-1} D_t^{m-k} u$, $F = {}^t(f, 0, \cdots, 0)$,

$$A(x, D) = \|a^{ij}(x, D)\|^m_{i, j=1},\ a^{i+1, i}(x, D) = 1,\ a^{1i}(x, D) = a^i(x, D),$$

$$\operatorname{ord} a^i(x, D) = 0,\ i = 1, \cdots, m,$$

а остальные $a^{ij}(x, D)$ равны нулю,

$$B^k(x, D) = \|b_k^{ij}(x, D)\|^m_{i, j=1},\ b_k^{ij}(x, D) = \delta_{1i} b^{kj}(x, D),$$

где $\operatorname{ord} b^{kj} = 0$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_r$ множество дифференцируемых на $[0,1]$ вектор-функций $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$, где $\mu_i \equiv 1$, $i = 1, \cdots, m - r + 1$, удовлетворяющих условиям

$$\mu_i(+0) = 0,\ \dot{\mu}_i(t) \equiv \frac{d\mu_i(t)}{dt} \geqslant 0,\ i = m - r + 2, \cdots, m, \tag{4}$$

$$\dot{\mu}_i/\mu_i \leqslant \mathrm{const}\ \dot{\mu}_{i+1}/\mu_{i+1}, \tag{5}$$

$$\mu_{i+1}(t) \leqslant \mathrm{const}\ \mu_i(t),\ i = m - r + 2, \cdots, m - 1, \tag{6}$$

$$\dot{\mu}_{m-r+2}(t) \leqslant \mu_m(t) \tag{7}$$

с некоторой положительной постоянной $\varkappa$.

Введем теперь два вспомогательных оператора

$$M_1 = \frac{\partial}{\partial t} - iA(x, D)\,\Lambda - \sum_{k=0}^{m-1} \hat{B}^k(x, D)\,R^k, \tag{8}$$

$$M_2 = \frac{\partial}{\partial t} - i\tilde{A}(x, D)\,\Lambda - \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{B}^k(x, D)\,R^k, \tag{9}$$

где $(\tilde{A}(x, D))_{ij} = a^{ij}(x, D)$, если $i \geqslant 2$, либо $j \leqslant m - r + 1$, и $(\tilde{A}(x, D))_{ij} = 0$ — в остальных случаях; $(\hat{B}^k(x, D))_{ij} = \delta_{1i}(B^k)_{ij}$, если

$$j < m - r + 2,\ \text{и}\ (\hat{B}^k(x, D))_{ij} = \delta_{1i}(\hat{B}^k(x_0, D))_{ij},\ t^k \sum_{|\beta| < p} |\hat{B}^{k(\beta)}_{ij} \times$$
$$\times (x_0, \xi)| \leqslant c\mu_j(t),$$

если $j \geqslant m - r + 2$; $(\tilde{B}^k(x, D))_{ij} = 0$, если $j > m - r + 1$ и $(\tilde{B}^k(x, D))_{ij} = \delta_{1i}(B^k)_{ij}$ при $j \leqslant m - r + 1$.

Мы предполагаем, что оператор M является r-правильным в смысле следующего определения.

Определение 1. Оператор M вида (3) называется r-правильным, если

(i) для любого $g(t, x) \in E([0, 1]; \bigcap_{k=0}^{\infty} H^k(R^n), 0)$ задача Коши

$$M_1 V = G,\ V(0, x) = 0,\ G = {}^t(g, 0, \cdots, 0) \tag{10}$$

имеет единственное решение, принадлежащее $E([0, 1]; \bigcap_{k=0}^{\infty} H^k(R^n), 1)$;

(ii) решение задачи (10) удовлетворяет энергетическому неравенству

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i(t)\,\|V^i(t)\| \leqslant c\,\lambda^M(t) \int_0^t \lambda^{-M}(\sigma)\,\|g(\sigma)\|\,d\sigma, \tag{11}$$

если

$$\int_0^t \lambda^{-M}(\sigma)\,\|g(\sigma)\|\,d\sigma < \infty, \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_i (t) \| V^i (t) \| = \lambda^M (t)\, o(1), \ t \downarrow 0, \ \lambda (t) \equiv \mu_m (t) \tag{13}$$

с некоторыми постоянными c, $M \geqslant 0$, не зависящими от V и g;

(iii) для задачи

$$M_2 V = G, \ V(0, x) = 0, \ G = {}^t (g, 0, \cdots, 0) \tag{14}$$

имеет место оценка

$$\sum_{k=1}^{m-r+1} \| V^k (t) \| \leqslant c \int_0^t \| g (\tau) \| d\tau. \tag{15}$$

Оператор P вида (1) „r-правильный", если соответствующий ему оператор M вида (3) является r-правильным.

Отметим здесь, что кратность корней характеристического полинома r-правильного оператора равна, вообще говоря, r. r-правильными операторами являются, например, операторы, описанные в работах [1]—[4].

Таким образом, вспомогательный оператор M_1 должен допускать двойные оценки: с потерей гладкости и без потери гладкости, но с неинтегрируемым весом (11).

Обозначим через

$$C^k (x, D) = B^k (x, D) - \hat{B}^k (x, D) = \| C_k^{ij} (x, D) \|_{i,\, j=1}^{m},$$

где

$$C_k^{ij} (x, D) = \delta_{1i}\, \alpha_j^k (x, D), \ j = m - r + 2, \cdots, m, \text{ и } \ C_k^{ij} (x, D) = 0$$

для остальных j. Таким образом, $B^k (x, D) = \hat{B}^k (x, D) + C^k (x, D)$.

Сформулируем основное условие:

[A]. Существуют дифференцируемые на $(0,1]$ неотрицательные функции $\alpha_{m-r+2}, \cdots, \alpha_m$ и α и постоянная l такие, что

$$\dot{\alpha}_i (t) \geqslant 0, \quad \dot{\alpha} (t) \geqslant 0, \ i = m - r + 2, \cdots, m, \tag{16}$$

$$t^k \alpha_i^{-1} (t)\, \alpha_i^{k(\beta)} (t, x, \xi) \in G (1, \gamma, 1), \ |\xi| = 1, \ |\beta| \leqslant p. \tag{17}$$

$$\alpha_i (t) \leqslant \alpha (t) \leqslant \text{const}\, \dot{\lambda} \lambda^{l-1}, \ l > 0, \tag{18}$$

$$\mu_i^{-1} (t)\, a^{1i(\beta)} (t, x, \xi) \in G (1, \gamma, 1), \ |\xi| = 1, \ |\beta| \leqslant p, \tag{19}$$

где постоянная p зависит только от n.

Пусть $\hat{r}$ такое, что $\alpha_{m-r+i} (t) \equiv 0$, $i > \hat{r}$, $\hat{r} \leqslant r$.

Теорема 1. *Пусть вспомогательный оператор M является r-правильным, и пусть выполнено условие* [A]. *Предположим, далее, что с некоторыми положительными постоянными* δ_1, δ_2

$$\lim_{t\to 0} \max_{t_1\in[0,\,t]} \left\{ t_1 \int_0^{t_1} \alpha(s)\, ds \right\}^{1-\delta_1} \left\{ \int_{t_1}^{t} \beta(s)\, ds \right\}^{(\gamma-1)(\hat{r}-1)-1+\delta_2} = 0, \tag{20}$$

где $\beta(t) = \sum_{i=m-r+2}^{m-r+\hat{r}} \frac{\alpha_i(t)}{\mu_i(t)}$. *Тогда задача Коши*

$$Pu = f,\ D_t^k u = g_k,\ t = 0,\ k = 0, \cdots, m-1, \tag{21}$$

$f \in G(1, \gamma, 0)$, $g_k \in G(\gamma)$, *имеет единственное решение в* $G(1, \gamma, m)$.

Доказательство теоремы 1 будет проведено в § 4 после ряда вспомогательных утверждений.

Следствие 1. Пусть оператор P является r-правильным оператором, причем вместо условий (7), (17), (18) выполнены

$$\alpha_i^k(t)^{-1}\ \alpha_i^{k(\beta)}(t, x, \xi) \in G(1, \gamma, 1),\ |\beta| \leqslant p,\ |\xi| = 1, \tag{22}$$

$$\alpha_i^k(t) \leqslant \text{const}\ \dot{\mu}_i(t)\ \mu_i^{l-1}(t) \tag{23}$$

и имеют место (19), (16). Тогда для корректности задачи (21) достаточно выполнения условия

$$\lim_{t\to 0} \max_{t_1\in[0,\,t]} \left\{ t_1^{l+k} \int_0^{t_1} \alpha^k_{m-r+1+i}(s)\, ds \right\}^{k+1-\delta_1} \times$$

$$\times \left\{ \int_{t_1}^{t} \frac{\alpha^k_{m-r+1+i}(s)}{\mu_{m-r+1+i}(s)} s^k s \right\}^{(\gamma-1)\, i-(k+1)+\delta_2} = 0, \tag{24}$$

если $\alpha_i^k(t, x, \xi) = \delta_{ii_0}\ \delta_{kk_0} \alpha_i^k(t, x, \xi)$, $i = 1, 2, \cdots, r-1$, $k = 0, \cdots, m-1$.

Определение 2 [2]. Оператор P называется гиперболическим равномерно r-вырождающимся при $t = 0$, если P — строго гиперболический при $t > 0$, и существует функция $\lambda(t) \in C^1[0,1]$ такая, что $\lambda(0) = 0$, $\lambda'(t) > 0$, $0 < t \leqslant 1$, и характеристические корни полинома $P_m(x, \xi_0, \xi)$ удовлетворяют соотношениям

$$|D_x^\alpha \lambda_i(x, \xi)| \leqslant \text{const}\ \lambda^{\omega_i}\ |\xi|,\ \alpha_0 = 0,\ i = 1, \cdots, r, \tag{24'}$$

причем $1 \leqslant \omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \cdots \leqslant \omega_r$; $\lambda_i(t = 0) \neq 0$ при $r < i \leqslant m$,

$$\left| \frac{D_x^\alpha \lambda_i}{\lambda_i} \right| \leqslant \text{const}\ \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)},\ \alpha_0 = 1, \tag{24''}$$

$$(\lambda_i - \lambda_j)^2 \geqslant \text{const}\ \lambda^{2\omega_j} |\xi|^2,\ j < i \leqslant r, \tag{24'''}$$

$$(\lambda_i - \lambda_j)^2 \geqslant \text{const}\ |\xi|^2,\ r \leqslant j < i \text{ или } j \leqslant r < i. \tag{24''''}$$

С помощью теоремы 1 [9] можно получить следующие два следствия.

Следствие 2. Пусть P — оператор с аналитическими коэффициентами, равномерно r-вырождающийся при $t = 0$ с $\omega_1 = \cdots = \omega_r$, и предположим, что выполнены условия следствия 1. Тогда для того чтобы задача (21) при любых $f \in G(1, \gamma, 0)$ и $g_k \in G(\gamma)$ имела решение $u \in G(1, \gamma, 1)$ необходимо и достаточно, чтобы имело место (24).

Следствие 3. Пусть P — равномерно r-вырождающийся оператор с аналитическими коэффициентами и $r < 3$. Тогда для того чтобы задача (21) при любых $f \in G(1, \gamma, 0)$ и $g_k \in G(\gamma)$ имела решение $u \in G(1, \gamma, 1)$, необходимо и достаточно выполнение условия (20).

Отметим, далее, что если $\alpha_i(t) \leqslant c\,\mu_i(t)$, т. е. выполнены достаточные условия C^∞-корректности, то (20) не накладывает никаких дополнительных ограничений.

Следствие 4. Пусть P — r-правильный оператор. Тогда при любых младших членах задача (21) имеет решение $u \in G(1, \gamma, 1)$ для произвольных f и g_k из $G(1, \gamma, 0)$ и $G(\gamma)$ соответственно, если $\gamma \leqslant \dfrac{r}{r-1}$.

§ 2. Некоторые свойства r-правильных операторов

Лемма 1. *Пусть $\nu(t) \in C^1([0, 1])$ и $\nu(t) \geqslant 0$, $\nu^{-1}(t) f \in G(1, \gamma, 0)$. Тогда существует единственное решение задачи* (14) V *и оно непрерывно зависит от f, причём $\nu^{-1}(t)\, V \in G(1, \gamma, 1)$.*

Доказательство можно легко провести методом работы [10]. Поэтому мы его опускаем.

Лемма 2. *Для задачи $M_1 V = {}^t(g, 0, \cdots, 0)$, $V(0, x) = 0$, $g \in G(1, \gamma, 0)$ существует функция $\tilde V \in G(1, \gamma, 1)$, такая что $M_1(V - \tilde V) = {}^t(f, 0, \cdots, 0)$, $\lambda^{-M} f \in G(1, \gamma, 0)$ и $\tilde V(0, x) = 0$.*

Доказательство. Пусть $V_1 \in G(1, \gamma, 1)$ и

$$M_2 V_1 = {}^t(g, 0, \cdots, 0), \quad V_1(0, x) = 0. \tag{25}$$

Тогда

$$M_1(V - V_1) = (M_2 - M_1) V_1, \quad \mu_{m-r+2}^{-1}(M_2 - M_1) V_1 \in G(1, \gamma, 1). \tag{26}$$

Аналогично

$$M_2 V_k = (M_2 - M_1) V_{k-1}, \quad V_k(0, x) = 0, \quad k = 2, 3, \cdots. \tag{27}$$

Тогда согласно лемме 1 $V_k \in G(1, \gamma, 1)$ и

$$M_1\Big(V - \sum_{k=1}^{N} V_k\Big) = (M_2 - M_1) V_N = M_2 V_{N+1} = {}^t(f, 0, \cdots, 0), \tag{28}$$

где $\mu_{m-r+2}^{-N}(M_2 - M_1) V_N \in G(1, \gamma, 1)$ и при достаточно большом N

$$\lambda^{-M} f \in G(1, \gamma, 1), \text{ а } \tilde V = \sum_{k=1}^{N} V_k.$$

Лемма 3. *Пусть f такая, что $\lambda^{-M}f \in G(1, \gamma, 0)$. Тогда решение задачи*

$$M_1 g = F, \ g(0, x) = 0, \ F = {}^t(f, 0, \cdots, 0) \tag{29}$$

существует, единственно и $\lambda^{-M} g \in G(1, \gamma, 1)$.

Доказательство. Существование $g \in \bigcap_k H^k(R^n)$ и его единственность непосредственно следуют из того, что M_1 является r-правильным оператором. Определим

$$\Phi_m(t) = \max_{\sigma \in [0, t]} \lambda^{-M}(\sigma) \sum_{i_1, \cdots, i_m, j} \mu^j(\sigma) \| D_{i_1} \cdots D_{i_m} g(\sigma) \|, \ m = 0, 1, \cdots. \tag{30}$$

Покажем, что

$$\Phi_m(t) \leqslant N e^{dmt} (1 + t)^m a^m \Gamma(1 + \gamma m), \ m = 0, 1, \cdots. \tag{31}$$

Тогда из (31) будут следовать оставшиеся утверждения леммы. Обозначим

$$v_{i_1 \cdots i_m} = D_{i_1} \cdots D_{i_m} g.$$

Докажем (31) индукцией по m. При $m = 0$ оно очевидно. Сделаем переход от $m - 1$ к m. Пусть

$$\sum_{|\beta| < p} |a^{1j(\beta)}_{(\alpha)}(t, x, \xi)| \leqslant \mu_j(t) M K^{|\alpha| - 1} \Gamma(1 + \gamma(|\alpha| - 1)), \tag{32}$$

$$\sum_{|\beta| < p} |b^{ij(\beta)}_{(\alpha)}(t, x, \xi)| \leqslant \frac{1}{m} M K^{|\alpha|} \Gamma(1 + \gamma|\alpha|), \ j = 1, \cdots, m - r + 1. \tag{33}$$

Подействуем на обе части уравнения (29) оператором $D_{i_1} \cdots D_{i_m}$:

$$D_{i_1} \cdots D_{i_m} \left(\frac{\partial}{\partial t} - iA(x, D)\Lambda - \sum_{k=0}^{m-1} \hat{B}^k R^k \right) g = D_{i_1} \cdots D_{i_m} f. \tag{34}$$

Отсюда

$$M_1[v_{i_1 \cdots i_m}] - i[D_{i_1} \cdots D_{i_m}, A(t, x, D)]\Lambda g -$$
$$- \sum_{k=0}^{m-1} [D_{i_1} \cdots D_{i_m}, \hat{B}^k] R^k g = D_{i_1} \cdots D_{i_m} f, \tag{35}$$

где $[\cdot, \cdot]$ — коммутатор двух операторов. Подсчитав коммутатор и учитывая (32), (33) и применяя (11) к (35), получаем

$$\sum_{j=1}^{m} \mu_j(t) \| v^j_{i_1 \cdots i_m}(t) \| \leqslant c \lambda^M(t) \int_0^t \lambda^{-M}(\tau) \{ \| D_{i_1} \cdots D_{i_m} f \| +$$

$$+ M \sum_{\substack{k \\ 1 < p < m}} \sum_j [\mu^j \| v^j_{i_1 \cdots \hat{i}_p \cdots i_m k} \| + \mu^j \| v^j_{i_1 \cdots \hat{i}_p \cdots i_m} \|] +$$

$$+MK\Gamma(1+\gamma)\sum_{k,p,q,j}\mu^j\,[\|v^j_{i_1\ldots \hat{i}_p\ldots \hat{i}_q\ldots i_m k}\|+\|v^j_{i_1\ldots \hat{i}_p\ldots \hat{i}_q\ldots i_m}\|]+$$

$$+MK^2\Gamma(1+2\gamma)\sum_{k,p,r,q,j}\mu_j\,[\|v^j_{i_1\ldots \hat{i}_p\ldots \hat{i}_q\ldots \hat{i}_r\ldots i_m k}\|+\|v^j_{i_1\ldots \hat{i}_p\ldots \hat{i}_q\ldots \hat{i}_r\ldots i_m}\|]+\cdots$$

$$+MK^{m-1}\Gamma(1+\gamma(m-1))\sum_{k,j}\mu_j\,[\|v^j_k\|+\|v^j\|]+$$

$$+MK\Gamma(1+\gamma)\sum_p\sum_j\mu_j\,\|v^j_{i_1\ldots \hat{i}_p\ldots i_m}\|+$$

$$+MK^2\Gamma(1+2\gamma)\sum_{p,q,j}\mu_j\,\|v^j_{i_1\ldots \hat{i}_p\ldots \hat{i}_q\ldots i_m}\|+\cdots+$$

$$+MK^m\Gamma(1+\gamma m)\sum_j\mu_j\,\|v^j\|\}\,d\tau, \tag{36}$$

где $v_{i_1\ldots \hat{i}_p\ldots i_m}=v_{i_1\ldots i_{p-1}i_{p+1}\ldots i_m}$,

$$\Phi_m(t)\leqslant dm\int_0^t\Phi_m(\tau)\,d\tau+c\int_0^t\lambda^{-M}(\tau)\sum_{i_1,\ldots,i_m}\|D_{i_1}\cdots D_{i_m}f(\tau)\|\,d\tau+$$

$$+\frac{d}{n}\int_0^t\sum_{p=1}^m[2C_m^{p+1}n\,(\Phi_{m-p}(\tau)+\Phi_{m-p-1}(\tau))+C_m^p\,\Phi_{m-p}]\,(Kn)^p\,\Gamma(1+\gamma^p)\,d\tau, \tag{37}$$

где $d=cMn$, и $C_m^{m+1}=0$. Применяя лемму Гронуолла, получаем

$$\Phi_m(t)\leqslant c\int_0^t\lambda^{-M}(\tau)\sum_{i_1\ldots i_m}\|D_{i_1}\cdots D_{i_m}f(\tau)\|\,e^{dm(t-\tau)}\,d\tau+$$

$$+\frac{d}{n}\int_0^t e^{dm(t-\tau)}\sum_{p=1}^m[2C_m^{p+1}n\,(\Phi_{m-p}(\tau)+\Phi_{m-p-1}(\tau))+$$

$$+C_m^p\,\Phi_{m-p}(\tau)]\,(Kn)^p\,\Gamma(1+\gamma_p)\,d\tau. \tag{38}$$

Учтем теперь, что

$$\sum_{i_1,\ldots,i_m}\|D_{i_1}\cdots D_{i_m}f(t)\|\leqslant\lambda^M(t)\,MK^m\,\Gamma(1+\gamma m), \tag{39}$$

$$C_m^{p+1}n+C_m^p\leqslant\frac{m!}{(m-p)!\,p!}\,(m-p+1)(n+1), \tag{40}$$

поэтому

$$\Phi_m(t)\leqslant\frac{d}{n}\int_0^t e^{dm(t-\tau)}\,K^m\,\Gamma(1+\gamma m)\,d\tau+$$

$$+\frac{2d(n+1)}{n}\int_0^t e^{dm(t-\tau)}\sum_{p=1}^{m} C_m^p\,(m-p+1)(Kn)^p\,Ne^{d(m-p)\tau}\times$$

$$\times(1+\tau)^{m-p}\,a^{m-p}\,\Gamma(1+\gamma p)\,\Gamma(1+\gamma(m-p))\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d}{n}\cdot\frac{1}{dm}\,e^{dmt}\,K^m\,\Gamma(1+\gamma m)+$$

$$+\frac{2d(n+1)}{n}Ne^{dmt}\sum_{p=1}^{m}C_m^p\,(1+t)^{m-p+1}a^m\left(\frac{Kn}{a}\right)^p\Gamma(1+\gamma p)\,\Gamma(1+\gamma(m-p))\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{nm}\,e^{dmt}\,K^m\,\Gamma(1+\gamma m)+\frac{2d(n+1)}{n}\,Ne^{dmt}\,(1+t)^m\,a^m\,J_0, \tag{41}$$

где обозначено

$$J_0=\sum_{p=1}^{m}C_m^p\left(\frac{Kn}{a}\right)^p\Gamma(1+\gamma p)\,\Gamma(1+\gamma(m-p)). \tag{42}$$

Приведем здесь одно неравенство, которое легко доказывается:

$$J_s\equiv\sum_{p=1}^{m}C_m^p\left(\frac{Kn}{a}\right)^p\Gamma(1+\gamma p)\,\Gamma(1+\gamma(s+m-p))\leqslant\varepsilon\Gamma(1+\gamma(s+m)), \tag{43}$$

где $\varepsilon\to 0$ при $a\to\infty$, равномерно по s и m.

Учитывая (43) из (41), получаем (31), выбирая a и N достаточно большими. Лемма доказана.

Теорема 2. *Для любого $f\in G(1,\gamma,0)$ задача (29) имеет единственное решение $g\in G(1,\gamma,1)$, непрерывно зависящее от f.*

Доказательство. С помощью леммы 2 задача (29) приводится к новой с быстро убывающей при $t\downarrow 0$ правой частью, а затем применяется лемма 3.

Приведем теперь несколько более общее утверждение.

Следствие. *Пусть $\nu(t)\in C^1([0,1])$, $\dot\nu(t)\geqslant 0$, $\nu(t)>0$ и $(\dot\nu)^{-1}f\in G(1,\gamma,0)$. Тогда задача (29) имеет единственное решение g, непрерывно зависящее от f и такое, что $\nu^{-1}g\in G(1,\gamma,1)$.*

Доказательство. Предварительно доказываются леммы, аналогичные лемме 3 для операторов M_1 и M_2, затем делается редукция.

§ 3. Вспомогательные оценки для последовательных приближений

Лемма 4. *Пусть $\lambda^{-u}f\in G(1,\gamma,0)$, $\varepsilon_0(0,x)=0$, и $M_1\varepsilon_0=f$,*

$$M_1\varepsilon_n=\sum_{k=0}^{m-1}C^k R^k\,\varepsilon_{n-1},\quad \varepsilon_n(0,x)=0,\quad n=1,2,\cdots. \tag{44}$$

Определим

$$\Phi^k_{n,s}(t) \equiv \max_{0 < \sigma < t} \lambda^{-M}(\sigma) \sum_{i_1,\dots,i_s=1}^{n} \|D_{i_1}\cdots D_{i_s}\,\varepsilon^k_n(\sigma)\|,\quad k=1,\cdots,m, \tag{45}$$

$$\Phi_{n,s}(t) \equiv \sum_{k=1}^{m} \mu_k(t)\,\Phi^k_{n,s}(t). \tag{46}$$

Тогда

$$\Phi_{n,s}(t) \leqslant Na^n e^{dst}(1+t)^s b^s R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{i_1} R^{i_1+1}\right)\times\cdots\times$$

$$\times\left(\sum_{i_n=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{i_n} R^{i_n+1}\right) b^{\sum\limits_{k=1}^{n} i_k}\,\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{k=1}^{n} i_k\right)\right), \tag{47}$$

$$\Phi^{m-r+1+j}_{n,s}(t) \leqslant Na^n e^{d(s+j)t}(1+t)^{s+j} b^{s+j} R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{i_1} R^{i_1+1}\right)\times\cdots\times$$

$$\times\left(\sum_{i_n=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{i_n} R^{i_n+1}\right) b^{\sum\limits_{k=1}^{n} i_k}\,\Gamma\left(1+\gamma\left(s+j+\sum_{k=1}^{n} i_k\right)\right), \tag{48}$$

с некоторыми постоянными N, a, b.

Доказательство проводим индукцией по n и s. Выведем предварительно одно общее неравенство, которое нам понадобится в дальнейшем. Подействуем оператором $D_{i_1}\cdots D_{i_m}$ на обе части (44), затем применим (11). Обозначим $v^j_{n, i_1\cdots i_s} = D_{i_1}\cdots D_{i_s}\,\varepsilon^j_n$. Справа в результате получится сумма, один из членов которой равен

$$c\int_0^t \lambda^{-M}(\tau)\left\| D_{i_1}\cdots D_{i_s}\sum_{k=0}^{m-1} C^k R^k \varepsilon_{n-1}\right\| d\tau. \tag{49}$$

Легко усмотреть, что он оценивается сверху через

$$\frac{d}{n}\int_0^t \sum_{l=m-r+2}^{m-r+\hat{r}} \alpha_l(\tau) \sum_{p=0}^{s} C^p_s (Kn)^p\,\Gamma(1+\gamma p)\,\Phi^l_{n-p,\,s-p}(\tau)\,d\tau. \tag{50}$$

Поэтому, как и при выводе (38), получаем

$$\Phi_{n,s}(t) \leqslant \frac{d}{n}\int_0^t e^{ds(t-\tau)} \sum_{l=m-r+2}^{m-r+\hat{r}} \sum_{p=0}^{s} C^p_s (Kn)^p\,\Gamma(1+\gamma p)\,\alpha_l(\tau)\,\Phi^l_{n-1,\,s-p}(\tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{d}{n}\int_0^t e^{ds(t-\tau)} \sum_{p=1}^{s} \left[2C^{p+1}_s\, n\,(\Phi_{s-p}(\tau)+\Phi_{s-p-1}(\tau)) + C^p_s\,\Phi_{s-p}(\tau)\right]\times$$

$$\times (Kn)^p \Gamma(1+\gamma p)\, d\tau, \tag{51}$$

$d = cMn$. Пусть теперь $n = 1$, $s = 0$. Тогда

$$\Phi_{1,0}(t) \leqslant c \int_0^t \lambda^{-M}(\tau) \left| \sum_{k=0}^{m-1} C^k R^k \varepsilon_0 \right| d\tau \leqslant c \times$$

$$\times \int_0^t \alpha_l(\tau) \sum_{l=m-r+2}^{m-r+\hat{r}} \max_{0<\sigma<\tau} \|\lambda^{-M}(\sigma)\, \varepsilon_0^l(\sigma)\|\, d\tau,$$

но $\lambda^{-M} \varepsilon_0 \in G(1, \gamma, 1)$, поэтому

$$\Phi_{1,0}(t) \leqslant c R \left(\sum_{l_1=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{l_1} R^{l_1+1} \right) N K^{l_1} \Gamma(1+\gamma i_1). \tag{52}$$

Предположим теперь, что (47) имеет место при $s-1$, $n=1$, и докажем для s. Для этого воспользуемся (51):

$$\Phi_{1,s}(t) \leqslant \frac{d}{n} e^{dst} \widetilde{K}^s \overline{N} R \Bigl(\sum_{l_1=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{l_1} R^{l_1+1} \Bigr) K^{i_1} \Gamma(1+\gamma(s+i_1)) +$$

$$+ \frac{d}{n} \int_0^t e^{ds t} \overline{N} \overline{K}^s \sum_{p=1}^{s} C_s^p (Kn)^p \overline{K}^{-p} \left(\sum_{l_1=1}^{\hat{r}-1} \alpha_{l_1} R^{l_1+1} \right) \times$$

$$\times \Gamma(1+\gamma(s-p+i_1))\, K^{i_1} d\tau +$$

$$+ \frac{4d(n+1)}{n} Na\, b^s e^{dst} R\left(\sum \alpha_{l_1} R^{i_1+1}\right) b^{i_1} \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{s} C_s^p \left(\frac{Kn}{b}\right)^p (1+t)^s \Gamma(1+\gamma p) \times$$

$$\times \Gamma(1+\gamma(s-p+i_1)). \tag{53}$$

В силу (43) за счет выбора $\overline{K}$, $\overline{N}$, b, N, a достаточно большими получаем (47) с $n = 1$.

Предположим теперь, что (47) имеет место при $n-1$ для всех s. Докажем, что тогда (47) верно и при n.

При $s = 0$ (47) очевидно. Сделаем индукцию по s. Из (51) имеем

$$\Phi_{n,s}(t) \leqslant \frac{d}{n} \int_0^t e^{ds(t-\tau)} \sum_{l=m-r+2}^{m-r+\hat{r}} \alpha_l \Phi^i_{n-1,s}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{d}{n} \int_0^t e^{ds(t-\tau)} \sum_{l_1=1}^{\hat{r}-1} \sum_{p=1}^{s} C_s^p (Kn)^p \Gamma(1+\gamma p)\, \alpha_{m-r+1+l_1}(\tau)\, \Phi^{m-r+1+l_1}_{n-1,\, s-1}(\tau)\, d\tau +$$

$$+\frac{4d}{n}\int\limits_0^t e^{ds(t-\tau)}\sum_{p=1}^{s}\{C_s^{p+1}n+C_s^p\}(Kn)^p\,\Gamma(1+\gamma p)\,Na^n\,e^{d(s-p)\tau}(1+\tau)^{s-p}\times$$

$$\times b^{s-p}R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\cdots\left(\sum_{i_n=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_n}R^{i_n+1}\right)b^{\sum\limits_{l=1}^{n}i_l}\times$$

$$\times\Gamma\left(1+\gamma\left(s-p+\sum_{l=1}^{n}i_l\right)\right)=A_1+A_2+A_3. \tag{54}$$

Далее

$$A_1\leqslant\frac{d}{n}\int\limits_0^t e^{ds(t-\tau)}\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}(\tau)\,Na^{n-1}\,e^{ds\tau}\,(1+\tau)^s\,e^{dsi_1}(1+\tau)^{i_1}R^{i_1}\times$$

$$\times b^{s+i_1}R\left(\sum_{i_2=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_2}R^{i_2+1}\right)\cdots\left(\sum_{i_n=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_n}R^{i_n+1}\right)b^{\sum\limits_{l=1}^{n}i_l}\,\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{k=1}^{n}i_k\right)\right)d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d\,(1+t)^{\hat{r}-1}\,e^{dt(r-1)}}{na}Na^n\,e^{dst}(1+t)^s\,b^s\,R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\sum_{i_n=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_n}R^{i_n+1}\right)b^{\sum\limits_{k=1}^{n}i_k}\,\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{k=1}^{n}i_k\right)\right), \tag{55}$$

$$A_2\leqslant\frac{d}{n}\int\limits_0^t e^{ds(t-\tau)}\sum_{p=1}^{s}C_s^p(Kn)^p\,\Gamma(1+\gamma p)\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}\,Na^{n-1}\,e^{d(s-p)\tau}\times$$

$$\times e^{d\tau i_1}(1+\tau)^{s-p+i_1}\,b^{s-p+i_1}R^{i_1+1}\left(\sum_{i_2=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_2}R^{i_2+1}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\sum_{i_n=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_n}R^{i_n+1}\right)b^{\sum\limits_{l=2}^{n}i_l}\,\Gamma\left(1+\gamma\left(s-p+\sum_{l=1}^{n}i_l\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{de^{dt(r-1)}(1+t)^{r-1}}{na}Na^n\,e^{dst}(1+t)^s\,b^s\,R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\sum_{i_n=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_n}R^{i_n+1}\right)b^{\sum\limits_{l=1}^{n}i_l}\sum_{p=1}^{s}C_s^p\left(\frac{Kn}{a}\right)^p\Gamma(1+\gamma p)\,\Gamma\left(1+\gamma\left(s-p+\sum_{k=1}^{n}i_k\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\,Na^n\,e^{dst}(1+t)^s\,b^s\,R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\sum_{l_n=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{l_n}R^{l_n+1}\right)b^{\sum\limits_{l=1}^{n}i_l}\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{k=1}^{n}i_k\right)\right), \tag{56}$$

где $\varepsilon\to 0$ при $a\to\infty$, $b\to\infty$ равномерно по s.

Точно так же

$$A_3\leqslant 8\,\frac{d\,(n+1)}{n}\,Na^n\,e^{dst}\,(1+t)^s\,b^s\,R\left(\sum_{l_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{l_1}R^{l_1+1}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\sum_{l_n=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{l_n}R^{l_n+1}\right)b^{\sum\limits_{k=1}^{n}i_k}\sum_{p=1}^{s}C_s^p\left(\frac{Kn}{b}\right)^p\Gamma\,(1+\gamma p)\,\Gamma\left(1+\gamma\left(s-p+\sum_{n=1}^{n}i_k\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon_1\,Na^n\,e^{dst}\,(1+t)^s\,b^s\,R\,(\sum\alpha_{l_1}\,R^{l_1+1})\times\cdots$$

$$\times\,(\sum\alpha_{l_n}\,R^{l_n+1})\,b^{\sum\limits_{k=1}^{n}i_k}\,\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{k=1}^{n}i_k\right)\right), \tag{57}$$

где $\varepsilon_1\to 0$ при $b\to\infty$ равномерно по s.

Из (54)—(57) следует (47). Используя уравнение (44), из (47) получаем (48). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть z — целое неотрицательное число. Тогда существуют постоянные N, a, b, не зависящие от z такие, что для любых k и s имеет место*

$$\Phi_{z+k,\,s}(t)\leqslant Na^{z+k}\,e^{dst}\,(1+t)^s\;b^s\;\underbrace{R\beta\cdots R\beta}_{k}\times$$

$$\times\,R\left(\sum_{l_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{l_1}R^{l_1+1}\right)\times\cdots\times\left(\sum_{l_n=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{l_n}\;R^{l_n+1}\right)b^{\sum\limits_{l=1}^{z}i_l}\;\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{l=1}^{z}i_l\right)\right). \tag{58}$$

Доказательство проводим индукцией по k. При $k=0$ это очевидно совпадает с (47). Из (51) имеем

$$\Phi_{z+k,\,0}(t)\leqslant\frac{d}{n}\int_0^t\sum_{l=m-r+2}^{m}\alpha_l\Phi^l_{z+k-1,\,0}(\tau)\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d}{n}\int_0^t\sum\frac{\alpha_l}{\mu_l}\;\mu_l\;(\tau)\;\Phi^l_{z+k-1,\,0}(\tau)\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{d}{n}\int_0^t\beta\,(\tau)\;\Phi_{z+k-1,\,0}(\tau)\;d\tau, \tag{59}$$

откуда следует (58) для $s=0$. Сделаем индукцию по s. Имеем из (51)

$$\Phi_{z+k,s}(t)\leqslant\frac{d}{n}\int_0^t e^{ds(t-\tau)}\sum_{l=m-r+\hat{r}}^{m}\sum_{p=0}^{s}C_s^p(Kn)^p\frac{\alpha_l(\tau)}{\mu_l(\tau)}\mu_l(\tau)\Phi^l_{z+k-1,s-p}(\tau)d\tau+$$

$$+\frac{4d}{n}\int_0^t e^{ds(t-\tau)}\sum_{p=1}^{s}\{C_s^{p+1}n+C_s^p\}(Kn)^p\Gamma(1+\gamma^p)Na^{z+k}\times$$

$$\times e^{d(s-p)\tau}(1+\tau)^{s-p}b^{s-p}\underbrace{R\beta\cdots R\beta}_{k}R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\sum_{i_z=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_z}R^{i_z+1}\right)b^{\sum_{l=1}^{z}i_l}\Gamma\left(1+\gamma\left(s-p+\sum_{l=1}^{z}i_l\right)\right)\equiv A_1+A_2. \qquad (60)$$

Очевидно, что

$$A_1\leqslant\frac{d}{n}\int_0^t e^{ds(t-\tau)}\beta(\tau)\sum_{p=0}^{s}C_s^p(Kn)^pNa^{z+k-1}e^{d(s-p)\tau}(1+\tau)^{s-p}b^{s-p}\times$$

$$\times\underbrace{R\beta\cdots R\beta}_{k-1}R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\times\cdots\times\left(\sum_{i_z=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_z}R^{i_z+1}\right)b^{\sum_{l=1}^{z}i_l}\times$$

$$\times\Gamma\left(1+\gamma\left(s-p+\sum_{l=1}^{z}i_l\right)\right)\leqslant\frac{d}{na}(1+\varepsilon_2)Na^{z+k}e^{dst}(1+t)^sb^s\times$$

$$\times\underbrace{R\beta\cdots R\beta}_{k}R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\cdots\left(\sum_{i_z=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_z}R^{i_z+1}\right)b^{\sum_{l=1}^{z}i_l}\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{l=1}^{z}i_l\right)\right), \qquad (61)$$

где $\varepsilon_2\to 0$ при $b\to\infty$ равномерно по s.

Затем оцениваем A_2 точно так же, как это уже делалось выше. Таким образом, лемма доказана.

Следствие. Пусть k — целое, определяемое по формуле

$$k=k(n)=n-\frac{n}{(\gamma-1)(\hat{r}-1)}+\theta_n,\ \theta_n\in[0,1). \qquad (62)$$

Тогда при любых n и s имеет место оценка

$$\Phi_{n,s}(t)\leqslant Na^ne^{dst}(1+t)^sb^s\underbrace{R\beta\cdots R\beta}_{k}R\left(\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_1}R^{i_1+1}\right)\times\cdots$$

$$\times\left(\sum_{i_{n-k}=1}^{\hat{r}-1}\alpha_{i_{n-k}}R^{i_{n-k}+1}\right)b^{\sum_{l=1}^{n-k}i_l}\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\sum_{l=1}^{n-k}i_l\right)\right) \qquad (63)$$

с некоторыми постоянными N, a, b.

Доказательство. Подставляем в (58) $z = n - k$.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Используя теорему 3 и повторяя схему леммы 2, а также учитывая условие (18), нашу первоначальную задачу можно свести к новой, с правой частью $f(t, x)$ такой, что $t^{-M} f \in C(1, \gamma, 0)$ и с $g_i = 0$, $i = 0, 1, \cdots, m-1$. Затем применим метод последовательных приближений. Решение $U(t, x)$ ищем в виде ряда $U(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k (t, x)$, где ε_k задаются посредством (44), $\varepsilon_k \in G(1, \gamma, 1)$. Покажем, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k^j$ $j = 1, \cdots, m - r + 1$ равномерно сходится вместе со всеми производными в некоторой полосе $0 \leqslant t \leqslant \delta$, $\delta > 0$.

Нетрудно видеть, что

$$R\alpha_{i_1} R^{i_1+1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_{n-k}} R^{i_{n-k}+1} = \int_0^t \alpha_{i_1}(t_1) \int_0^{t_1} \alpha_{i_2}(t_2) \cdots \int_0^{t_{n-k-1}} \alpha_{n-k}(t_{n-k}) \times$$

$$\times dt_1\, dt_2 \cdots dt_{n-k} \frac{t_{n-k}^{i_{n-k}+1}}{(i_{n-k}+1)!} \cdot \frac{(t_{n-k-1} - t_{n-k})^{i_{n-k-1}}}{(i_{n-k-1})!} \times$$

$$\times \frac{(t_{n-k-2} - t_{n-k-1})^{i_{n-k-2}}}{(i_{n-k-2})!} \cdots \frac{(t_1 - t_2)^{i_1}}{i_1!}, \tag{64}$$

но

$$\frac{t_l^{i_l}}{i_l} \cdot \frac{(t_{l-1} - t_l)^{i_{l-1}}}{t_{l-1}!} \cdots \frac{(t_1 - t_2)^{i_1}}{i_1!} \leqslant \left(\frac{t_1}{\sum_{m=1}^{l} i_m} \right)^{\sum_{m=1}^{l} i_m} \frac{i_1^{i_1} \cdots i_l^{i_l}}{i_1! \cdots i_l!}, \tag{65}$$

поэтому

$$\Phi_{n,s}^{j}(t) \leqslant N a^n e^{dst} (1+t)^s\, b^s \underbrace{R\beta \cdots R\beta}_{k} \int_0^t \sum \cdots \sum b^{\sum_{l=1}^{n-k} i_l} \times$$

$$\times \Gamma\left(1 + \gamma\left(s + \sum_{l=1}^{n-k} i_l\right)\right) t^{\sum_{l=1}^{n-k-1} i_l} \alpha(t_{k+1}) \{R\alpha\}^{n-k-1} (\mathrm{const})^s \times$$

$$\times \frac{1}{\left(\sum_{l=1}^{n-k-1} i_l\right)!} \frac{1}{(n-k-1)!} \leqslant$$

$$\leqslant c^n \tilde{c}^s \underbrace{R\beta \cdots R\beta}_{k} \int_0^t \sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1} \cdots \sum_{i_{n-k}=1}^{\hat{r}-1} \alpha(t_{k+1})\, t^{\sum_{l=1}^{n-k-1} i_l} \left\{ \int_0^{t_{k+1}} \alpha(\sigma)\, d\sigma \right\}^{n-k-1} \times$$

1435—2

$$\times\frac{\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\hat{r}-1+\sum\limits_{k=1}^{n-k-1} i_k\right)\right)}{(n-k-1)!\left(\sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l\right)!}\,dt_{k+1}\leqslant c^n\,\tilde{c}^s\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\cdots\sum_{i_{n-k-1}=1}^{\hat{r}-1}\int\limits_0^t\alpha(t_1)\times$$

$$\times\, t_1^{\sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l}\left\{\int\limits_0^{t_1}\alpha(\sigma)\,d\sigma\right\}^{n-k-1}\left\{\int\limits_{t_1}^{t}\beta(\sigma)\,d\sigma\right\}^k dt_1\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(1+\gamma\left(s+\hat{r}-1\right)+\gamma\sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l\right)}{k!\,(n-k-1)!\left(\sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l\right)!}. \tag{66}$$

Далее

$$\sum_{i_1=1}^{\hat{r}-1}\cdots\sum_{i_{n-k-1}=1}^{\hat{r}-1}\frac{\Gamma\left(1+\gamma\,(s+\hat{r}-1)+\gamma\sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l\right)}{k!\,(n-k-1)!\left(\sum\limits_{l=1}^{n-k-1} i_l\right)!}\leqslant r^{n-k-1}\,2^{(n-1)+\hat{r}\,(n-k-1)}\times$$

$$\times\sum_{l=n-k-1}^{(\hat{r}-1)(n-k-1)}\frac{\Gamma\,(1+\gamma\,(s+\hat{r}-1+l))}{(n-1+l)!}. \tag{67}$$

Итак

$$\sum_{n=N}^{\infty}\Phi^j_{n,\,s}(t)\leqslant c^s\sum_{n=N}^{\infty}c^n\int\limits_0^{t_1}\alpha(t_1)\left\{t_1\int\limits_0^{t_1}\alpha(\sigma)\,d\sigma\right\}^{n-k-1}\left\{\int\limits_{t_1}^{t}\beta(\sigma)\,d\sigma\right\}^k dt_1\times$$

$$\times\sum_{l=n-k-1}^{(\hat{r}-1)(n-k-1)}\frac{\Gamma\,(1+\gamma\,(s+\hat{r}-1+l))}{(n+l-1)!}. \tag{68}$$

Выбираем $k=0$ при $\gamma\leqslant\frac{\hat{r}}{\hat{r}-1}$, а при $\gamma>\frac{\hat{r}}{\hat{r}-1}$ как указано в (62). При достаточно большом N получаем

$$\sum_{n=N}^{\infty}\Phi^j_{n,\,s}(t)\leqslant\tilde{c}^s\sum_{n=N}^{\infty}c^n\int\limits_0^{t}\alpha(t_1)\left\{t_1\int\limits_0^{t_1}\alpha(\sigma)\,d\sigma\right\}^{n-k-1}\left\{\int\limits_{t_1}^{t}\beta(\sigma)\,d\sigma\right\}^k dt_1\times$$

$$\times\frac{\Gamma\,(1+\gamma s+n+1+(\hat{r}-1)(n-k-1))}{\Gamma\,(1+n+1+(\hat{r}-1)(n-k-1))}. \tag{69}$$

Пусть $m=n+1+(\hat{r}-1)(n-k-1)$, тогда

$$\delta_1=\frac{(\hat{r}-1)1+\theta_n(\gamma-1)+1}{\gamma\,(\hat{r}-1)},\quad \delta_2=\frac{[(\hat{r}-1)(1+\theta_n)-1][(\gamma-1)(\hat{r}-1)-1]}{\gamma\,(\hat{r}-1)}+\theta_n,$$

и из (69) следует

$$\sum_{n=N}^{\infty}\Phi^j_{n,s}(t)\leqslant\sum_{m=N+1}^{\infty}\tilde{c}^s\,c^m\int_0^t\alpha(t_1)\,J_m^m(t_1)\,\frac{\Gamma(1+\gamma s+m)}{\Gamma(1+m)}\,dt_1, \tag{70}$$

где

$$J_m(t_1)=\left\{t_1\int_0^{t_1}\alpha(\sigma)\,d\sigma\right\}^{\frac{1}{\gamma(\hat{r}-1)}-\frac{\delta_1}{m}}\left\{\int_{t_1}^{t}\beta(\sigma)\,d\sigma\right\}^{\frac{(\gamma-1)(\hat{r}-1)-1}{\gamma(\hat{r}-1)}+\frac{\delta_2}{m}}. \tag{71}$$

В силу условия (20) отсюда имеем

$$\sum_{n=N}^{\infty}\Phi^j_{n,s}(t)\leqslant\sum_{m=N+1}^{\infty}\tilde{c}^s\,(cJ_m)^m\,\frac{\Gamma(1+\gamma s+m)}{\Gamma(1+m)}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=N+1}^{\infty}\tilde{c}^s\int_0^{\infty}e^{-\tau}\,\frac{(cJ_m)^m\,\tau^{\gamma s+m}}{m!}\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\tilde{c}^s\int_0^{\infty}e^{-\tau}\,\tau^{\gamma s}\,e^{\theta\tau}\,d\tau=\tilde{c}^s\,(1-\theta)^{-\gamma s-1}\,\Gamma(1+\gamma s), \tag{72}$$

где $\theta\in[0,1)$ за счет выбора δ достаточно малым. Теорема доказана.

Для вывода следствий из теоремы 1 воспользуемся следующей леммой.

Лемма 6. *Пусть P — равномерно r-вырождающийся оператор с $\omega_1=\omega_2=\cdots=\omega_r$ и с аналитическими коэффициентами, а $p=(p_0,\cdots,p_n)$ такой, что $0\leqslant p_k<1$, и*

$$P^{(\alpha)}_{m,\beta}(\hat{x},\hat{\xi})=0, \tag{73}$$

как только $|\alpha|+\langle\beta-\alpha,\,p\rangle<r\,(1-p_0)$ и

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^r P_m\right)(\hat{x},\hat{\xi})=0. \tag{74}$$

Предположим далее, что при $|\alpha|+\langle\beta-\alpha,\,p\rangle\leqslant r\,(1-p_0)-\dfrac{(m-s)\,\gamma}{\gamma-1}$, $s<m$

$$P^{(\alpha)}_{s,\beta}(\hat{x},\hat{\xi})=0. \tag{75}$$

Тогда имеют место условия (24).

§ 5. Примеры

Пример 1:

$$(D_t^2-t^{2\lambda}D_{x_1}^2+at^{\nu}D_{x_1})\,u=f, \tag{76}$$

где μ, ν — положительные числа. Условие (20) имеет вид $\gamma < \dfrac{2\mu-\nu}{\mu-\nu-1}$ и совпадает с необходимым условием работы [9], когда 2μ, ν — целые.

Пример 2:

$$\left(D_t^2 - e^{-\frac{2}{t}} D_{x_1}^2 + a t^{-2} e^{-\frac{\beta}{t}} D_{x_1}\right) u = f. \tag{77}$$

Тогда $\mu(t) = \exp\{-t^{-1}\}$, и условие (20) выполнено, если $\beta > \dfrac{\gamma-2}{\gamma-1}$. При $\beta \geqslant 1$ выполняется необходимое и достаточное условие C^∞-корректности. Критерии работ [5]—[7], [9] неприменимы к уравнению (77).

Пример 3:

$$\left[D_t^4 + \sum_{\substack{l+|k|=4\\ l<4}} a_{lk}(t, x) D_t^l D_x^k + \sum_{l+|k|\leq 3} a_{lk}(t, x) t^{\nu_{lk}} D_t^l D_x^k\right] u = f, \tag{78}$$

где $x \in R^n$, $k = (k_1, \cdots, k_n)$, $a_{lk} \in G(1, \gamma, 4)$ и $\nu_{jk} = \text{const}$, $\nu_{j0} = 0$, $j = 1, 2, 3$. И пусть $\lambda_i(t, x, \xi)$, $i = 1, \cdots, 4$, — вещественные корни относительно ξ_0 характеристического уравнения

$$\xi_0^4 + \sum_{l+|k|=4,\ l<4} a_{lk}(t, x) \xi_0^l \xi^k = 0, \tag{79}$$

причем $\lambda_i(t, x, \xi) \sim t^p$, где $|\xi| = 1$, $p \geqslant 0$ и $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $t > 0$, $i \neq j$. Тогда условия (24) эквивалентны следующим неравенствам:

$$\nu_{0k} > \frac{3p\gamma - 4p - \gamma}{\gamma - 1}, \ |k| = 3; \quad \nu_{0k} > \frac{2p\gamma - 4p - 2\gamma}{\gamma - 1}, \ |k| = 2; \tag{80}$$

$$\nu_{1k} > \frac{2p\gamma - 3p - \gamma}{\gamma - 1}, \ |k| = 2; \quad \nu_{1k} > \frac{p\gamma - 3p - 2\gamma}{\gamma - 1}, \ |k| = 1; \tag{81}$$

$$\nu_{2k} > \frac{p\gamma - 2p - \gamma}{\gamma - 1}, \ |k| = 1; \quad \nu_{0k} > \frac{p\gamma - 4p - 3\gamma}{\gamma - 1}, \ |k| = 1. \tag{82}$$

Согласно теореме 1 [9] и лемме 6 настоящей работы условия (80)—(82) являются также необходимыми для разрешимости задачи Коши в случае, когда a_{lk} аналитичны.

Отметим, что неположительность правых частей неравенств (80)—(82) означает, что соответствующие коэффициенты свободны от ограничений. Таким образом, нетрудно найти те значения γ, при которых условия накладываются только на часть коэффициентов. В частности, при $1 < \gamma \leqslant \dfrac{4p}{3p-1}$ все коэффициенты свободны от ограничений, причем последнее неравенство совпадает с необходимым условием слабой $\gamma^{(1)}$-регулярной гиперболичности работы [9].

При $\gamma \to +\infty$ условия (80)—(82) переходят в необходимые и достаточные условия C^∞-корректности работы [2].

Пример 4:

$$u_{ttt}-(t^{p}+t^{2p}+t^{3p})\,u_{ttx}+(t^{3p}+t^{4p}+t^{5p})\,u_{txx}-$$
$$-t^{6p}\,u_{xxx}+b\,(t)\,u_{xx}=f. \tag{83}$$

Для этого уравнения $\mu_1=1$, $\mu_2=t^p$, $\mu_3=t^{3p}$. Согласно следствию 1 из теоремы 1 для того, чтобы задача Коши для уравнения (83) была разрешима в классе Жевре с показателем γ достаточно, чтобы $|b\,(t)|\leqslant \mathrm{const}\cdot t^{\nu}$, где

$$\nu>\frac{6p\gamma-9p-2\gamma}{2\,(\gamma-1)}. \tag{84}$$

Следовательно, задача Коши для (83) будет слабо $\gamma^{(\gamma)}$-регулярной, если

$$\gamma\leqslant\frac{9p}{2\,(3p-1)}\quad(3p-1>0). \tag{85}$$

В то же время, согласно теоремам 1, 2 работы [9], для слабой $\gamma^{(\gamma)}$-корректности задачи Коши необходимо, чтобы

$$\nu>\frac{2p\gamma-3p-\gamma}{\gamma-1}, \tag{86}$$

а для слабой $\gamma^{(\gamma)}$-регулярности необходимо, чтобы

$$\gamma\leqslant\frac{3p}{2p-1}. \tag{87}$$

Вопрос о том, какое из условий (84), (86) ((85), (87)) или, может быть, некоторое другое условие на $b\,(t)$ (γ), является необходимым и одновременно достаточным для $\gamma^{(\gamma)}$-корректности ($\gamma^{(\gamma)}$-регулярности) задачи Коши остается открытым. Отметим, что следствия 2, 3 здесь неприменимы из-за нарушения условия $\omega_1=\omega_2=\omega_3$.

Пример 5: Вышеизложенная схема, незначительно измененная, применима также к уравнению

$$u_{tt}-t^{2\mu}\,u_{xx}-e^{-\frac{2}{t}}\,u_{yy}+at^{\nu}\,u_x+bt^{-2}\,e^{-\frac{\beta}{t}}\,u_y=f \tag{88}$$

и гарантирует корректность задачи Коши, если $\beta>\dfrac{\gamma-2}{\gamma-1}$ и $\nu\geqslant\mu-2$, $\gamma<\dfrac{2\mu-\nu}{\mu-\nu-1}$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16.V.1977

Կ. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. **Թույլ հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդիր Ժևրեի դասերում** *(ամփոփում)*

Հոդվածում տրված են սկզբնական հիպերհարթության վրա վերածվող կամայական կարգի բազմաչափ սկալյար հավասարման համար Ժևրեի դասերում Կոշու խնդրի բավարար պայմանները։ Մի շարք դեպքերում ցածր կարգի ածանցյալների գործակիցների համար ստացված պայմանները համընկնում են [9] աշխատանքում նշված անհրաժեշտ պայմանների հետ։

K. H. YAGDJIAN. *The Cauchy problem for weakly hyperbolic equation in the classes of Gevrey functions* (summary)

In the paper the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations with initial conditions given on the hyperplane of degeneration is considered. For a given operator a class of Gevrey functions for which initial value problem is solvable is determined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян, А. О. Оганесян.* О корректности задачи Коши для одного класса гиперболических уравнений, Изв. АН Арм. ССР, „Математика", VIII, № 3, 1973, 255—273.
2. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян.* О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", IX, № 2, 1974, 149—165.
3. *Г. Р. Оганесян.* Задача Коши для слабо гиперболических псевдодифференциальных систем первого порядка с данными на гиперплоскости вырождения, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", X, № 2, 1975, 97—102.
4. *А. О. Оганесян.* О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений высокого порядка, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", X, № 2, 1975, 163—169.
5. *В. Я. Иврий.* Корректность в классах Жевре задачи Коши для нестрого гиперболических операторов, Мат. сб., 96, № 3, 1975, 390—413.
6. *М. Д. Бронштейн.* Параметрикс задачи Коши для гиперболических операторов с характеристиками переменной кратности, Функц. анализ и прил., 10, вып. 4, 1976, 83—84.
7. *S. Steinberg.* Existence and uniqueness of solutions of hyperbolic equations which are not necessarily strictly hyperbolic, J. of Differential Equat., 17, № 1, 1975, 119—153.
8. *А. Б. Нерсесян.* О бесконечно дифференцируемых решениях задачи Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", IV, № 3, 1969, 182—191.
9. *В. Я. Иврий.* Условия корректности в классах Жевре задачи Коши для гиперболических операторов с характеристиками переменной кратности, Сибирск. мат. журн., XVII, № 6, 1976, 1256—1270.
10. *S. Mizohata.* Analyticity of solutions of hyperbolic systems with analytic coefficients, Comm. Pure Appl. Math., 14, № 3, 1961, 547—559.

ДОБАВЛЕНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

Для операторов с характеристиками постоянной кратности получены (В. Я. Иврий, Сиб. мат. журн. XVII, № 3, 1976, 547—563 и K. Hikosaburo, PRIMS 12, Suppl., 1977, 233—245) необходимые и достаточные условия корректности задачи Коши в классах Жевре.