

А. А. ВАГАРШАКЯН

## О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ МЮНЦА—САСА

В настоящей статье мы будем рассматривать систему функций  $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k=1}^{\infty}$ , где  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Через  $C_0(E)$  обозначим пространство непрерывных функций, определенных на  $E$  и стремящихся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \in E$ . В известной теореме Мюнца-Саса (см. [1]) утверждается, что для полноты вышеприведенной системы в пространстве  $C_0[0, \infty)$  необходима расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} = \infty$$

и достаточна расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} = \infty.$$

Тот случай, когда некоторые  $\lambda_n$  в последовательности  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  встречаются несколько раз, был рассмотрен М. М. Джрбашяном [5]. До сих пор не получено условие, необходимое и достаточное для полноты системы Мюнца в пространстве  $C_0[0, \infty)$ . Отметим, что наилучшее необходимое условие получено А. М. Седлецким [4].

В настоящей статье обобщается теорема Мюнца-Саса в двух направлениях. В первом параграфе мы рассматриваем вопрос о полноте системы  $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k=1}^{\infty}$  в пространстве  $C_0(E)$ , где  $\lambda_k$  — действительные числа, причем  $\inf_k \lambda_k > 0$ , а  $E$  — счетное замкнутое множество. Во втором параграфе рассматривается вопрос о полноте системы

$$\left\{ \frac{e^{-\lambda_k t}}{(1+t)^{\alpha}} \right\}_{k=1}^{\infty} \quad (1)$$

в пространствах  $C_0[0, \infty)$  и  $L_p[0, \infty)$ , где  $\alpha > 0$  и  $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . При некоторых ограничениях на  $\alpha$  получены необходимые и достаточные условия для полноты системы (1) в  $C_0[0, \infty)$  и  $L_p[0, \infty)$ .

1°. Имеет место следующая

**Теорема 1.** Пусть множество  $E$  содержит бесконечно много точек и удовлетворяет следующему условию: для любой точки  $x \in E$ , или  $(x, \infty) \cap E = \emptyset$ , или существует такая точка  $y \in E$ ,  $x < y$ , что  $(x, y) \cap E = \emptyset$ . Пусть  $\{\lambda_k\}$  — действительные числа и  $\inf_k \lambda_k > 0$ . Тогда для полноты системы  $\{e^{-\lambda_k t}\}$  в пространстве



$C_0(E)$  необходимо и достаточно, чтобы  $\{e^{-\lambda_k t}\}$  содержала бесконечно много функций.

**Доказательство.** Так как множество  $E$  содержит бесконечно много точек, то пространство  $C_0(E)$  бесконечномерно и, следовательно, для полноты системы  $\{e^{-\lambda_k t}\}$  в  $C_0(E)$  необходимо, чтобы она содержала бесконечно много функций.

Докажем достаточность. Пусть система  $\{e^{-\lambda_k t}\}$  содержит бесконечно много функций. В случае, когда  $\lambda_k \rightarrow +\infty$  система  $\{e^{-\lambda_k t}\}$  полна в  $C_0[0, \infty)$  и, следовательно, она полна в  $C_0(E)$ . Теперь рассмотрим случай, когда  $\lambda_k \rightarrow \infty$ . Достаточно доказать, что для любой конечной меры  $\mu$  на  $E$  из условий

$$\int_E e^{-\lambda_k t} \mu(dt) = 0, \quad k=1, 2, \dots \quad (2)$$

следует, что  $\mu \equiv 0$ . Обозначим  $x_0 = \inf \{x/x \in E\}$ . Так как  $E$  — замкнутое множество, то  $x_0 \in E$ . По условию теоремы существует  $y_0 \in E$  такое, что  $x_0 < y_0$  и  $(x_0, y_0) \cap E = \emptyset$ . Тогда в силу (2) имеем

$$e^{-\lambda_k x_0} \mu(\{x_0\}) + \int_{(y_0, \infty) \cap E} e^{-\lambda_k t} \mu(dt) = 0.$$

Следовательно

$$|\mu(\{x_0\})| = \left| \int_{(y_0, \infty) \cap E} e^{-\lambda_k(t-x_0)} \mu(dt) \right| \leq e^{-\lambda_k(y_0-x_0)} |\mu|. \quad (3)$$

Правая часть неравенства (3) при  $\lambda_k \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Поэтому  $\mu(\{x_0\}) = 0$ .

Заметим, что множество  $E$ , которое удовлетворяет условиям теоремы, является вполне упорядоченным множеством. Применяя трансфинитную индукцию легко убедиться, что  $\mu \equiv 0$ . Теорема доказана.

Множество  $E \subset [0, \infty)$  не удовлетворяет условиям теоремы 1, если оно состоит из конечного числа точек, или содержит монотонно убывающую последовательность.

**Теорема 2.** Пусть множество  $E$  содержит монотонно убывающую последовательность. Тогда существует последовательность  $\lambda_k \rightarrow \infty$ , такая, что система  $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k=1}^{\infty}$  не полна в пространстве  $C_0(E)$ .

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай, когда  $E$  содержит последовательность  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ , которая монотонно убывая стремится к нулю. Выберем из этой последовательности подпоследовательность  $\{x_{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$ , которая удовлетворяет следующим условиям:

$$x_{p_1} = x_1,$$



$$x_{p_{2n}} < \frac{\ln \frac{4}{3}}{\ln 8} x_{p_{2n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

$$x_{p_{2n+1}} < \frac{\ln \frac{4}{3}}{(2n^2 + 3) \ln 2} x_{p_{2n}}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (5)$$

Рассмотрим следующие функции:

$$\varphi_n(t) = \exp \{-x_{p_{2n+1}} t\} - \frac{1}{2} \exp \{-x_{p_{2n+2}} t\}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

Мы имеем

$$\varphi_n \left( \frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}} \right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \exp \left\{ -x_{p_{2n+2}} \frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}} \right\} > \frac{1}{4}.$$

Далее, в силу (4) имеем

$$\varphi_n \left( \frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right) = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \exp \left\{ -x_{p_{2n+2}} \frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right\} < -\frac{1}{4}.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k^2} \varphi_k(t).$$

Пусть  $n \geq 1$  — некоторое целое число. Тогда в силу (5)

$$\begin{aligned} f \left( \frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}} \right) &= 4^{-n^2} \varphi_n \left( \frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} 4^{-k^2} \varphi_k \left( \frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}} \right) + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} 4^{-k^2} \varphi_k \left( \frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}} \right) \geq 4^{-n^2-1} - \left( \sum_{k=1}^{n-1} 4^{-k^2-n^2-1} + \right. \\ &\left. + \sum_{k=n+1}^{\infty} 4^{-k^2} \right) \geq 4^{-n^2-1} - \frac{1}{3} (4^{-n^2-1} + 4^{-(n+1)^2+1}) > 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получается оценка

$$\begin{aligned} f \left( \frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right) &= 4^{-n^2} \varphi_n \left( \frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right) + \sum_{k=1}^{n-1} 4^{-k^2} \varphi_k \left( \frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right) + \\ &+ \sum_{k=n+1}^{\infty} 4^{-k^2} \varphi_k \left( \frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right) \leq -4^{-n^2-1} + \sum_{k=1}^{n-1} 4^{-k^2-n^2-1} + \sum_{k=n+1}^{\infty} 4^{-k^2} < 0. \end{aligned}$$

Из приведенных оценок следует, что функция  $f(t)$  обращается в нуль в интервалах



$$\left( \frac{\ln \frac{4}{3}}{x_{p_{2n+1}}}, \frac{\ln 8}{x_{p_{2n+1}}} \right), n = 1, 2, \dots$$

Обозначим эти нули через  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ . Очевидно, что  $\lambda_n \rightarrow \infty$ . На пространстве  $C_0(E)$  рассмотрим линейный функционал

$$L(g) = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n^2} \left( g(x_{p_{2n+1}}) - \frac{1}{2} g(x_{p_{2n+2}}) \right).$$

Заметим, что  $L(g)$  — непрерывный функционал. На функциях  $\{e^{-\lambda_n t}\}_{n=1}^{\infty}$  он обращается в нуль

$$L(e^{-\lambda_k t}) = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n^2} \varphi_n(\lambda_k) = f(\lambda_k) = 0, k = 1, 2, \dots$$

Следовательно, система  $\{e^{-\lambda_k t}\}_{k=1}^{\infty}$  не полна в  $C_0(E)$ .

Если монотонно убывающая последовательность  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq E$  не стремится к нулю, т. е.  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0 > 0$ , то тогда мы строим функцию

$f(t)$  для последовательности  $\{x_k - x_0\}_{k=1}^{\infty}$  и в дальнейших рассуждениях вместо  $f(t)$  рассматриваем функцию  $e^{-x_0 t} f(t)$ .

2°. Обозначим через  $H_p^{(k)}$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , пространство аналитических функций  $f(z)$ , определенных на единичном круге и таких, что  $f^{(k)}(z)$  принадлежит пространству Харди  $H_p$  в круге. Аналогично определяется пространство аналитических функций  $f(z)$ , определенных на правой полуплоскости  $\{z/\operatorname{Re} z > 0\}$  и таких, что  $f^{(k)}(z)$  принадлежит пространству Харди  $H_p$  в полуплоскости. В последнем случае мы скажем, что  $f \in H_p^{(k)}(0, \infty)$ .

Теорема 3. Пусть  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  — некоторая последовательность различных точек в правой полуплоскости. Для того чтобы система

$$\left\{ \frac{e^{-\lambda_k t}}{(1+t)^{\alpha}} \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad (6)$$

где  $\alpha \geq 1$ , не была полна в пространстве  $C_0[0, \infty)$  необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < \infty \quad (7)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln d(ix, \{\lambda_k\})}{1+x^2} dx > -\infty, \quad (8)$$

где  $d(ix, \{\lambda_k\}) = \inf_k |ix - \lambda_k|$ .



**Доказательство.** Заметим, что для неполноты системы (6) в пространстве  $C_0[0, \infty)$  необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная мера  $\mu \neq 0$  такая, что

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda_k t}}{(1+t)^{\alpha}} \mu(dt) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{(1+t)^{\alpha}} \mu(dt). \quad (9)$$

Докажем, что  $(1+\lambda)^{-2} f(\lambda) \in H_1^{(1)}(0, \infty)$ . Имеем

$$\left( \frac{f(\lambda)}{(1+\lambda)^2} \right)' = -2 \frac{f(\lambda)}{(1+\lambda)^3} + \frac{f'(\lambda)}{(1+\lambda)^2}. \quad (10)$$

Так как  $f(\lambda)$  ограниченная функция, то первое слагаемое в (10) принадлежит  $H_1(0, \infty)$ . Далее

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{f'(x+iy)}{(1+x+iy)^2} \right| dy &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f'(x+iy)|}{1+y^2} dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} \times \\ &\times \left( \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+t)^{2\alpha}} e^{-xt} \mu(dt) \right) dy \leq \\ &\leq \pi |\mu| \max_{t>0} \frac{t}{(1+t)^2} < \infty, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Так как  $(1+\lambda)^{-2}$  не имеет нулей, то нули функции  $f(\lambda)$  удовлетворяют тем же условиям, что и нули функции из класса  $H_1^{(1)}(0, \infty)$ . В работе С. А. Виноградова и Н. А. Широкова [2] доказано, что нули  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  функции  $f \in H_1^{(1)}$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 - |z_k| < \infty \quad (11)$$

и

$$\int_0^{2\pi} \ln d(e^{i\theta}, \{z_k\}) d\theta > -\infty, \quad (12)$$

где  $d(e^{i\theta}, \{z_k\}) = \inf_k |e^{i\theta} - z_k|$ . Из приведенного результата легко следует, что нули  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  аналитической функции  $f \in H_1^{(1)}(0, \infty)$  удовлетворяют условиям (7) и (8).



Теперь докажем достаточность. Пусть  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность в правой полуплоскости, которая удовлетворяет условиям (7) и (8).

Заметим, что если  $f(\lambda)$  — аналитическая функция, определенная в правой полуплоскости и  $f \in H_2^{(j)}(0; \infty)$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ , причем  $k \geq \alpha + 2$ , то она допускает представление (9) с конечной мерой  $\mu$ . Действительно, так как  $f \in H_2(0, \infty)$ , то в силу теоремы Р. Пэли и Н. Винера функции  $f(\lambda)$  допускает представление

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} g(t) dt,$$

где  $g(t) \in L_2(0, \infty)$ . Далее, так как  $f(z) \in H_2^{(k)}(0, \infty)$ , то  $t^k g(t) \in L_2(0, \infty)$ . Ясно, что  $f(\lambda)$  допускает представление (9) с конечной мерой  $\mu$ , если сходится интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (1+t) |g(t)| dt &\leq 2 \int_0^1 |g(t)| dt + \int_1^{\infty} (1+t)^2 |g(t)| dt \\ &\leq 2 \left( \int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left( \int_1^{\infty} \frac{(1+t)^{2\alpha}}{t^{2k}} dt \right)^{1/2} \left( \int_1^{\infty} |t^k g(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как  $k \geq \alpha + 2$ , то правая часть приведенного неравенства конечна.

В работе Б. И. Коренблюма [3] доказано, что если  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность в единичном круге, удовлетворяет условиям (11) и (12), то существует функция  $f(z) \in \bigcap_{k=0}^{\infty} H_2^{(k)}$ , которая обращается в нуль в точках  $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Из приведенного результата Б. И. Коренблюма следует, что если  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность в правой полуплоскости, которая удовлетворяет условиям (7) и (8), то существует функция  $f(\lambda) \in \bigcap_{k=0}^{\infty} H_2^{(k)}(0, \infty)$ , которая обращается в нуль в точках  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

Но мы уже заметили, что  $f(\lambda) \in \bigcap_{k=0}^{\infty} H_2^{(k)}(0, \infty)$  допускает представление (9) с конечной мерой  $\mu$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  — последовательность в правой полуплоскости. Для того чтобы система

$$\left\{ \frac{e^{-\lambda_k t}}{(1+t)^{\alpha}} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

где  $\alpha > 1 + \frac{1}{q}$ ,  $1 \leq q < \infty$ , не была полна в пространстве  $L_q(0, \infty)$ ,

необходимо и достаточно, чтобы



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} < \infty$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln d(ix, \{\lambda_k\})}{1 + x^2} dx > -\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим функции  $f(\lambda)$ , допускающие представление

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{(1+t)^{\alpha}} g(t) dt, \quad (13)$$

где  $g(t) \in L_p(0, \infty)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Как и в теореме 3 для доказательства необходимости достаточно заметить, что производная функции  $(1+\lambda)^{-2} f(\lambda)$  принадлежит пространству  $H_1(0, \infty)$ . Действительно, если  $x > 0$ , то имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left( \frac{f(x+iy)}{(1+x+iy)^2} \right)' \right| dy &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x+iy)|}{[(1+x)^2 + y^2]^{3/2}} dy + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f'(x+iy)|}{(1+x)^2 + y^2} dy \leq \\ &\leq 2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^{3/2}} \right) \left( \int_0^{\infty} \frac{|g(t)|}{(1+t)^{\alpha}} dt \right) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f'(x+iy)|}{1+y^2} dy \leq \\ &\leq 2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^{3/2}} \right) \left( \int_0^{\infty} |g(t)|^p dt \right)^{1/p} \left( \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t)^{\alpha q}} \right)^{1/q} + \\ &+ \pi \left( \int_0^{\infty} |g(t)|^p dt \right)^{1/p} \left( \int_0^{\infty} \frac{t^q}{(1+t)^{\alpha q}} dt \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Так как  $\alpha > 1 + \frac{1}{q}$ , то правая часть вышеприведенного неравенства конечна.

Докажем достаточность. Как и в теореме 3 достаточно доказать, что если  $f(z)$  — аналитическая функция, определенная в правой полуплоскости и  $f^{(j)}(z) \in H_2(0, \infty)$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ , для некоторого числа  $k \geq 0$ , то  $(1+z)^{-1} f(z)$  допускает представление (13), где  $g(t) \in L_p(0, \infty)$ . Пусть  $f^{(j)}(z) \in H_2(0, \infty)$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ . Тогда  $f(z)$  допускает представление

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} h(t) dt,$$

где  $h(t) \in L_2(0, \infty)$ ,  $j = 0, 1, \dots, k$ . Мы имеем



$$\frac{f(z)}{1+z} = \int_0^{\infty} e^{-(z+1)t} dt \int_0^{\infty} e^{-zx} h(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-zx} \left( \int_0^x e^{-x+t} h(t) dt \right) dx.$$

Следовательно, для того чтобы  $(1+z)^{-1} f(z)$  допускала представление (13), достаточно, чтобы сходиллся интеграл

$$\begin{aligned} & \left( \int_0^{\infty} (1+x)^{2p} \left( \int_0^x e^{-x+t} |h(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p} = \left( \int_0^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \times \right. \\ & \times \left. \left( \int_0^x e^t |h(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p} = \left( \int_0^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left( \int_0^1 e^t |h(t)| dt + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_1^x e^t |h(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p} \leq 2^2 \max_{0 < x < 1} \int_0^x e^t |h(t)| dt + \\ & + \left( \int_1^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left( \int_0^1 e^t |h(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p} + \\ & + \left( \int_1^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left( \int_1^x e^t |h(t)| dt \right)^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Так как первые два слагаемых в правой части вышеприведенного неравенства конечны, то остается оценить последний интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_1^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left( \int_1^x e^t |h(t)| dt \right)^p dx \leq \int_1^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left( \int_1^x \frac{e^t}{t^k} t^k |h(t)| dt \right)^p dx \leq \\ & \leq \int_1^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left( \int_1^x \frac{e^{2t}}{t^{2k}} dt \right)^{p/2} \left( \int_1^x t^{2k} |h(t)|^2 dt \right)^{p/2} dx \leq \\ & \leq \left( \int_1^{\infty} t^{2k} |h(t)|^2 dt \right)^{p/2} \left( \int_1^{\infty} (1+x)^{2p} e^{-xp} \left( \int_1^x \frac{e^{2t}}{t^{2k}} dt \right)^{p/2} dx \right)^{p/2}. \end{aligned}$$

Заметим, что функция  $t^{-2k} e^{2t}$  стремится к бесконечности, и кроме этого

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{e^{2t}}{t^{2k}} \right) = \frac{2e^{2t}}{t^{2k+1}} (t-k) \geq 0, \quad t \geq k.$$

Следовательно, функция  $t^{-2k} e^{2t}$  монотонно возрастает при  $t > k$ . Поэтому существует число  $M < \infty$  такое, что



$$\int_1^{\infty} (1+x)^{ap} e^{-xp} \left( \int_1^x \frac{e^{2t}}{t^{2k}} dt \right)^{p/2} dx \leq M \int_1^{\infty} \frac{(1+x)^{ap}}{x^{(k-\frac{1}{2})p}} dx.$$

Легко заметить, что если  $k > a + \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$ , то последний интеграл сходится. Теорема доказана.

Замечание 1. Теоремы 3 и 4 верны и в случае, когда в последовательности  $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$  имеются повторяющиеся члены. В этом случае, следуя обозначениям М. М. Джрбашяна, вместо системы (6) нужно рассматривать систему

$$\left\{ \frac{t^{s_k-1} e^{-\lambda_k t}}{(1+t)^a} \right\}_{k=1}^{\infty},$$

где  $s_k$  — число появления  $\lambda_k$  в множестве  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ .

Замечание 2. Теорема 3 верна, если вместо системы (6) рассматривать систему

$$\{e^{-\lambda_k t} h(t)\}_{k=1}^{\infty}, \quad (14)$$

где  $h(t)$  — непрерывная функция на  $[0, \infty)$  и удовлетворяет неравенствам

$$\frac{A}{(1+t)^m} \leq h(t) \leq \frac{B}{1+t}, \quad 0 < t < \infty,$$

где  $A, B, m$  — некоторые положительные числа. Теорема 4 верна, если вместо  $h(t)$  рассматривать систему (14), где  $h(t)$  — измеримая функция на  $[0, \infty)$  и почти всюду удовлетворяет неравенствам

$$\frac{A}{(1+t)^m} \leq h(t) \leq \frac{B}{(1+t)^a},$$

где  $A, B, m$  — положительные числа, а  $a > 1 + \frac{1}{q}$ .

Институт математики  
АН Армянской ССР

Поступила 11.XII.1976

Ա. Ա. ՎԱԳԱՐՇԱԿՅԱՆ. Մյունց-Սաշի թեորեմի որոշ ընդհանրացումների մասին (ամփոփում)

Հոդվածում բերվում են Մյունց-Սաշի թեորեմի երկու ընդհանրացումը:

A. A. VAGARSHAKIAN. On some extensions of Müntz-Szász theorem (summary)

Two extensions of Müntz-Szász theorem are given.



## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. Винер, Р. Пэли. Преобразование Фурье в комплексной области, М., 1964.
2. С. А. Виноградов, Н. А. Широков. Нули аналитической функций с производной из  $H^1$ , Зап. науч. семинаров ЛОМИ, III, т. 30, 1972.
3. Б. И. Коренблум. О функциях, голоморфных в круге и гладких вплоть до границы, ДАН СССР, 200, № 1, 1971.
4. А. М. Седлецкий. К проблеме Мюнца—Саса для пространства  $C[0, 1]$ . Труды Моск. энергетического института, т. 260, 1975.
5. М. М. Джрбашян. О полноте и замыкании неполной системы функций  $(e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1})_{k=1}^{\infty}$ , ДАН СССР, 141, № 3, 1961.