Г. В. ВИРАБЯН

О КВАДРАТИЧНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКАХ С НЕПРЕРЫВНЫМ СПЕКТРОМ

Ряд задач математической физики, связанный с теорией малых колебаний континуумов (гидродинамическая устойчивость, теория волноводов, малые колебания вращающейся жидкости и др.), приводят к изучению квадратичного операторного пучка

$$L(\lambda) \equiv \lambda^2 I + \lambda \cdot B + C \quad (1)$$

в гильбертовом пространстве H .

Для этого пучка ставится вопрос о так называемой двукратной полноте системы собственных и присоединенных элементов (С.П.Э.), впервые введенной и изученной в работе [1] М. В. Келдыша.

В дальнейших работах как советских, так и зарубежных авторов, были установлены различные критерии о кратной полноте системы С.П.Э.

Однако во всех, по крайней мере известных нам, работах квадратичные операторные пучки с непрерывным спектром не рассмотрены.

В настоящей работе для одного класса самосопряженных квадратичных операторных пучков вводится понятие непрерывного спектра и делается попытка построения спектральной теории этих пучков при наличии непрерывного спектра.

0°. Здесь и всюду в дальнейших параграфах будем рассматривать квадратичный операторный пучок (1), где относительно линейных ограниченных операторов B и C , переводящих гильбертово пространство H в себя, предполагается, что

1. Оператор B самосопряженный: $B = B^*$.
2. Оператор C равномерно отрицательно определенный:

$$C \leq -\alpha \cdot I \quad (0 < \alpha).$$

Обозначим через H гильбертово пространство, которое представляет ортогональную сумму двух копий гильбертова пространства H

$$H = H \oplus H \quad (2)$$

со скалярным произведением

$$\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle \equiv (-Cu_1, v_1) + (u_2, v_2), \quad (3)$$

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in H, \quad (4)$$

где $(\cdot, \cdot)$ — исходное скалярное произведение гильбертова пространства H .

В пространстве H рассмотрим матричный оператор

$$\Pi = \begin{pmatrix} O & I \\ -C & -B \end{pmatrix}, \quad (5)$$

который порождается квадратичным операторным пучком (1) при его линейаризации [2]. В работе М. Г. Крейна и Г. К. Лангера [2] установлена тесная спектральная связь квадратичного операторного пучка (1) и ассоциированного с ним оператора (случай, когда оператор B — самосопряженный, C — положительно определенный компактный оператор). В частности показано, что собственные значения пучка (1) и оператора Π совпадают вместе с их собственными и алгебраическими кратностями и что, если у оператора Π в гильбертовом пространстве H имеется полная система корневых векторов, то у операторного пучка (1) имеется двукратно полная система С.П.Э. и наоборот. Так что полноту системы корневых векторов оператора Π можно брать как новое определение двукратной полноты С.П.Э. квадратичного операторного пучка (1), которое эквивалентно первоначальному определению М. В. Келдыша [1].

Исходя из вышеприведенного, нам представляется естественным следующее определение непрерывного спектра для операторного пучка (1).

Определение 1. Мы скажем, что квадратичный операторный пучок (1) имеет чисто непрерывный (простой) спектр в гильбертовом пространстве H , если спектр самосопряженного оператора Π чисто непрерывен (и простой) в гильбертовом пространстве $H = H \oplus H$. Заметим, что при сделанных выше предположениях 1 и 2, оператор Π оказывается самосопряженным по отношению скалярного произведения (3). В самом деле, для произвольных векторов

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \text{ и } \hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

пространства H имеем

$$\begin{aligned} \langle \Pi \hat{u}, \hat{v} \rangle &= (-Cu_2, v_1) + (-Cu_1 - Bu_2, v_2) = \\ &= (-Cu_1, v_2) + (u_2, -Cv_1 - Bv_2) = \langle \hat{u}, \Pi \hat{v} \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

§ 1. О собственных дифференциалах квадратичного пучка $L(\lambda)$

Пусть квадратичный операторный пучок (1) в гильбертовом пространстве H имеет чисто непрерывный спектр. Тогда оператор Π в гильбертовом пространстве $H = H \oplus H$ будет иметь чисто непрерывный спектр.

Пусть спектр оператора Π в H и, следовательно, спектр квадратичного пучка $L(\lambda)$ находится в промежутке $[m, M]$.

Определение 2. Если непрерывная в промежутке $[m, M]$ функция $u(\lambda) \neq 0$ со значениями из гильбертового пространства $\mathbf{H}$, для любого промежутка Δ из $[m, M]$ удовлетворяет соотношению

$$C[\Delta u(\lambda)] + B \left[\int_{\Delta} \lambda du(\lambda) \right] + \int_{\Delta} \lambda d \left[\int_m^{\lambda} \lambda du(\lambda) \right] = 0, \quad (7)$$

то $u(\lambda)$ будем называть собственным дифференциалом или дифференциальным решением для квадратичного операторного пучка (1). Мы скажем, что система собственных дифференциалов $\{u_p(\lambda)\}_1^n$ пучка (1) образует полную в $\mathbf{H}$ систему, если из ортогональности $(v, u_p(\lambda)) = 0$, $p = 1, 2, 3, \dots$, $v \in \mathbf{H}$ следует $v = 0$.

Наконец, систему собственных дифференциалов пучка (1) назовем двукратно полной, если соответствующая система собственных дифференциалов оператора Π полна в ортогональной сумме гильбертовых пространств $H = \mathbf{H} \oplus \mathbf{H}$.

Имеет место следующая

Теорема 1.1. Если спектр квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ чисто непрерывный, то у этого пучка имеется двукратно полная система собственных дифференциалов в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что самосопряженный оператор Π в гильбертовом пространстве H имеет чисто непрерывный спектр и следовательно обладает полной системой собственных дифференциалов $\{\hat{u}(\lambda)\}$ в H .

Для каждого собственного дифференциала $\hat{u}(\lambda) = \begin{pmatrix} u_1(\lambda) \\ u_2(\lambda) \end{pmatrix}$, $u_1(\lambda) \in \mathbf{H}$, $u_2(\lambda) \in \mathbf{H}$ этой системы и для произвольного отрезка Δ из $[m, M]$ имеем

$$\Pi[\Delta \hat{u}(\lambda)] = \int_{\Delta} \lambda d \hat{u}(\lambda), \quad (8)$$

или, что то же самое

$$\begin{pmatrix} \Delta u_2(\lambda) \\ -C\Delta u_1(\lambda) - B\Delta u_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\Delta} \lambda du_1(\lambda) \\ \int_{\Delta} \lambda du_2(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Отсюда получаем систему равенств

$$\Delta u_2(\lambda) = \int_{\Delta} \lambda du_1(\lambda),$$

$$-C\Delta u_1(\lambda) - B\Delta u_2(\lambda) = \int_{\Delta} \lambda du_2(\lambda). \quad (10)$$

Из первого равенства системы (10) находим

$$u_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \lambda \, du_1(\lambda) + u_2(m). \quad (11)$$

Подставляя последнее во второе равенство системы (10), получим

$$C[\Delta u_1(\lambda)] + B \left[\int_{\Delta} \lambda d_1(\lambda) \right] + \int_{\Delta} \lambda d \left[\int_m^{\lambda} \lambda d u_1(\lambda) \right] = 0. \quad (12)$$

Далее из непрерывности $\hat{u}(\lambda)$ в H и из того, что $\hat{u}(\lambda) \neq \hat{0}$, очевидным образом следует непрерывность функции $u_1(\lambda)$ в H и что $u_1(\lambda) \neq 0$.

Таким образом, мы доказали, что первые компоненты собственных дифференциалов оператора Π являются собственными дифференциалами для квадратичного пучка $L(\lambda)$.

Покажем, что полученная система собственных дифференциалов $\{u_1(\lambda)\}$ образует полную систему в гильбертовом пространстве H . В самом деле, пусть элемент $v \in H$ и

$$(v, u_1(\lambda)) = 0 \quad (13)$$

для всех $u_1(\lambda) \in \{u_1(\lambda)\}$.

Тогда

$$0 = (v, u_1(\lambda)) = (-C C^{-1} v, u_1(\lambda)) + (0, u_2(\lambda)) = \langle \hat{v}, \hat{u}(\lambda) \rangle, \quad (13^*)$$

где

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} C^{-1} v \\ 0 \end{pmatrix} \in H, \quad \hat{u}(\lambda) \in \{\hat{u}(\lambda)\}.$$

Но система собственных дифференциалов $\{\hat{u}(\lambda)\}$ оператора Π полна в гильбертовом пространстве H , и поэтому $\hat{v} = \hat{0}$, т. е. $v = 0$. Теорема доказана.

Теорема 2.1. Через систему собственных дифференциалов квадратичного пучка $L(\lambda)$ можно восстановить соответствующую систему собственных дифференциалов оператора Π в H .

Доказательство. Пусть $u(\lambda)$ — собственный дифференциал квадратичного пучка $L(\lambda)$ в H . Это значит непрерывная, отличная от тождественного нуля функция со значениями из гильбертового пространства H , удовлетворяет соотношению

$$C[\Delta u(\lambda)] + B \left[\int_{\Delta} \lambda du(\lambda) \right] + \int_{\Delta} \lambda d \left[\int_m^{\lambda} \lambda d u(\lambda) \right] = 0 \quad (14)$$

для произвольного промежутка Δ из $[m, M]$.

Положим

$$\hat{u}(\lambda) = \begin{pmatrix} u(\lambda) \\ \int_m^\lambda \lambda du(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Тогда очевидно, что векторнозначная функция $\hat{u}(\lambda)$ непрерывна в гильбертовом пространстве H , тождественно отлична от нуля, и в силу соотношения (15), для любого отрезка Δ из $[m, M]$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \Pi[\Delta \hat{u}(\lambda)] &= \begin{pmatrix} O & I \\ -C & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u(\lambda) \\ \int_\Delta \lambda du(\lambda) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \int_\Delta \lambda du(\lambda) \\ -C[\Delta u(\lambda)] - B \left[\int_\Delta \lambda du(\lambda) \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_\Delta \lambda du(\lambda) \\ \int_\Delta \lambda d \left[\int_m^\lambda \lambda du(\lambda) \right] \end{pmatrix} = \int_\Delta \lambda d \hat{u}(\lambda). \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, $\hat{u}(\lambda)$ является собственным дифференциалом оператора Π в H . Теорема доказана.

Обозначим через E_λ спектральное семейство проекторов оператора Π в H , и пусть $P(Q)$ — оператор, проектирующий гильбертовое пространство H в $H \oplus O$ ($O \oplus H$).

Теорема 3.1. *Всякий собственный дифференциал квадратичного пучка $L(\lambda)$, равный нулевому элементу при $\lambda = m$, имеет вид*

$$u(\lambda) = PE_\lambda \hat{u}(M), \quad \text{где } \hat{u}(M) = \begin{pmatrix} u(M) \\ \int_m^M \lambda du(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $u(\lambda)$ — собственный дифференциал квадратичного операторного пучка (1). Тогда согласно вышедоказан-

ной теореме 2.1 векторнозначная функция $\hat{u}(\lambda) = \begin{pmatrix} u(\lambda) \\ \int_m^\lambda \lambda du(\lambda) \end{pmatrix}$ бу-

дет собственным дифференциалом оператора Π в H . Поскольку

$\hat{u}(m) = \begin{pmatrix} u(m) \\ \int_m^m \lambda du(\lambda) \end{pmatrix} = \hat{0}$, то по теореме 4.1 (см. [3], стр. 363) имеем

$$\hat{u}(\lambda) = E_\lambda \hat{u}(M) = \begin{pmatrix} PE_\lambda \hat{u}(M) \\ QE_\lambda \hat{u}(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(\lambda) \\ \int_m^\lambda \lambda du(\lambda) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Отсюда заключаем $u(\lambda) = PE_\lambda \hat{u}(M)$, что и требовалось доказать.

§ 2. О собственных функционалах квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$

В работах Р. А. Александрияна [4], [5] в связи с исследованием спектральных разложений дифференциальных операторов гиперболического типа, порожденных задачей малых колебаний вращающейся жидкости, впервые сформулировано важное понятие собственного функционала и, в частности, установлена одна общая теорема (см. [6]) о спектральном разложении по системе собственных функционалов для произвольного самосопряженного оператора с чисто непрерывным спектром.

Цель настоящего параграфа — перенесение вышеупомянутой теоремы Р. А. Александрияна на квадратичные операторные пучки $L(\lambda)$ с чисто непрерывным спектром.

Пусть $\mathcal{Q}_{L(\lambda_0)}$ — инвариантное относительно оператора

$$L(\lambda_0) = \lambda_0^2 I + \lambda_0 B + C \quad (\mathcal{Q}_{L(\lambda_0)} \subseteq \mathcal{Q}_{L(\lambda_0)})$$

линейное топологическое пространство, состоящее из всюду плотного в H множества элементов и более сильной топологией, чем топология исходного гильбертового пространства H . Обозначим через $\mathcal{Q}_{L(\lambda_0)}^*$ сопряженное пространство линейных непрерывных функционалов над топологическим пространством $\mathcal{Q}_{L(\lambda_0)}$. Тогда очевидно включение

$$\mathcal{Q}_{L(\lambda_0)} \subseteq H \subseteq \mathcal{Q}_{L(\lambda_0)}^*. \quad (18)$$

Определение 3. Линейный непрерывный функционал $t_{\lambda_0} \in \mathcal{Q}_{L(\lambda_0)}^*$ назовем собственным функционалом квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$, соответствующее собственному значению $\lambda = \lambda_0$, если для любого элемента $\varphi \in \mathcal{Q}_{L(\lambda_0)}$ выполняется соотношение

$$t_{\lambda_0} (\lambda_0^2 \varphi + \lambda_0 B\varphi + C\varphi) = 0. \quad (19)$$

Предположим, что спектр квадратичного пучка $L(\lambda)$ простой и чисто непрерывный. Тогда в силу определения 1 спектр самосопряженного оператора P в гильбертовом пространстве H простой и чисто непрерывный. Поэтому на основании общей теоремы Р. А. Александрияна [6] существует линейное топологическое пространство $\mathcal{Q}_P$, состоящее из всюду плотного в H множества элементов, сходимость в котором влечет сходимость в H и семейство функционалов $T_\lambda \in \mathcal{Q}_P^*$ со следующими свойствами:

$$1^\circ. \Pi \Omega_n \subset \Omega_n \text{ (инвариантность),} \quad (20)$$

$$2^\circ. T_\lambda (\Pi \hat{\varphi}) = \lambda \cdot T_\lambda (\hat{\varphi}), \quad \hat{\varphi} \in \Omega_n \text{ (диагональность),} \quad (21)$$

$$3^\circ. \langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \cdot T_\lambda (\hat{\varphi}) d\rho(\lambda), \quad \hat{f} \in H, \quad \hat{\varphi} \in \Omega_n \quad (22)$$

(формула разложения),

$$4^\circ. \|\hat{f}\|_H^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |T_\lambda(\hat{f})|^2 d\rho(\lambda), \quad \hat{f} \in \Omega_n \quad (23)$$

(полнота).

Здесь $\rho(\lambda) = \langle E_\lambda \hat{g}, \hat{g} \rangle$, где E_λ — спектральная функция оператора Π в H , $\hat{g}$ — порождающий элемент.

Обозначим через Ω_1 (Ω_2) множество первых (вторых) компонент всевозможных векторов $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ из линейного пространства Ω_n .

Очевидно, что Ω_1 (Ω_2) является линейным многообразием в гильбертовом пространстве H . В самом деле, пусть $\varphi_1, \psi_1 \in \Omega_1$. Тогда они являются первыми компонентами векторов $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, $\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ из Ω_n и, следовательно, для любых чисел α, β

$$\alpha \hat{\varphi} + \beta \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \alpha\varphi_1 + \beta\psi_1 \\ \alpha\varphi_2 + \beta\psi_2 \end{pmatrix} \in \Omega_n, \quad (24)$$

т. е. $\alpha\varphi_1 + \beta\psi_1 \in \Omega_1$.

Положим

$$\hat{\Omega}_1 = \left\{ \hat{\varphi}; \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_1 \in \Omega_1 \right\}; \quad \hat{\Omega}_2 = \left\{ \hat{\psi}; \hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \psi_2 \in \Omega_2 \right\}. \quad (25)$$

Относительно линейного пространства Ω_n предположим, что оно представляется как ортогональная сумма подпространств Ω_i ($i = 1, 2$)

$$\Omega_n = \Omega_1 \oplus \Omega_2. \quad (26)$$

В пространстве Ω_2 определим сходимость следующим образом. Мы скажем

$$\varphi^{(n)} \rightarrow 0 \text{ в } \Omega_2 \text{ } (\varphi^{(n)} \in \Omega_2), \text{ если } \hat{\varphi}_1^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n \end{pmatrix} \rightarrow \hat{0},$$

$$\hat{\varphi}_2^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ C\varphi_n \end{pmatrix} \rightarrow \hat{0} \text{ и } \hat{\varphi}_3^{(n)} = \begin{pmatrix} \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{0} \text{ в } \Omega_n.$$

Пространство Ω_2 с такой сходимостью обозначим через Ω_L . Поскольку сходимость в Ω_L сильнее, чем сходимость исходного гильбертова пространства H , то имеет место следующее оснащение:

$$1^\circ. \Pi \Omega_n \subset \Omega_n \text{ (инвариантность),} \quad (20)$$

$$2^\circ. T_\lambda (\Pi \hat{\varphi}) = \lambda \cdot T_\lambda (\hat{\varphi}), \quad \hat{\varphi} \in \Omega_n \text{ (диагональность),} \quad (21)$$

$$3^\circ. \langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \cdot T_\lambda (\hat{\varphi}) d\rho(\lambda), \quad \hat{f} \in H, \quad \hat{\varphi} \in \Omega_n \quad (22)$$

(формула разложения),

$$4^\circ. \|\hat{f}\|_H^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |T_\lambda (\hat{f})|^2 d\rho(\lambda), \quad \hat{f} \in \Omega_n \quad (23)$$

(полнота).

Здесь $\rho(\lambda) = \langle E_\lambda \hat{g}, \hat{g} \rangle$, где E_λ — спектральная функция оператора Π в H , $\hat{g}$ — порождающий элемент.

Обозначим через Ω_1 (Ω_2) множество первых (вторых) компонент всевозможных векторов $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ из линейного пространства Ω_n .

Очевидно, что Ω_1 (Ω_2) является линейным многообразием в гильбертовом пространстве H . В самом деле, пусть $\varphi_1, \psi_1 \in \Omega_1$. Тогда они являются первыми компонентами векторов $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$, $\hat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ из Ω_n и, следовательно, для любых чисел α, β

$$\alpha \hat{\varphi} + \beta \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \alpha\varphi_1 + \beta\psi_1 \\ \alpha\varphi_2 + \beta\psi_2 \end{pmatrix} \in \Omega_n, \quad (24)$$

т. е. $\alpha\psi_1 + \beta\psi_1 \in \Omega_1$.

Положим

$$\hat{\Omega}_1 = \left\{ \hat{\varphi}; \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \varphi_1 \in \Omega_1 \right\}; \quad \hat{\Omega}_2 = \left\{ \hat{\psi}; \hat{\psi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \psi_2 \in \Omega_2 \right\}. \quad (25)$$

Относительно линейного пространства Ω_n предположим, что оно представляется как ортогональная сумма подпространств Ω_i ($i = 1, 2$)

$$\Omega_n = \Omega_1 \oplus \Omega_2. \quad (26)$$

В пространстве Ω_2 определим сходимость следующим образом. Мы скажем

$$\varphi^{(n)} \rightarrow 0 \text{ в } \Omega_2 \text{ } (\varphi^{(n)} \in \Omega_2), \text{ если } \hat{\varphi}_1^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_n \end{pmatrix} \rightarrow \hat{0},$$

$$\hat{\varphi}_2^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ C\varphi_n \end{pmatrix} \rightarrow \hat{0} \text{ и } \hat{\varphi}_3^{(n)} = \begin{pmatrix} \varphi_n \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \hat{0} \text{ в } \Omega_n.$$

Пространство Ω_2 с такой сходимостью обозначим через Ω_L . Поскольку сходимость в Ω_L сильнее, чем сходимость исходного гильбертова пространства H , то имеет место следующее оснащение:

Пусть φ — произвольный элемент из Ω_L .

Тогда имеем

$$\begin{aligned} t_\lambda^{(1)}(L_\lambda(\varphi)) &= t_\lambda^{(1)}(\lambda^2\varphi + \lambda B\varphi + C\varphi) = T_\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^2\varphi + \lambda B\varphi + C\varphi \end{pmatrix} = \\ &= T_\lambda \begin{pmatrix} \lambda\varphi_1 - \varphi_2 \\ \lambda\varphi_2 + B\varphi_2 + C\varphi_1 \end{pmatrix} = -T_\lambda(\Pi\hat{\varphi}) + \lambda T_\lambda(\hat{\varphi}) = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} t_\lambda^{(2)}(L_\lambda(\psi)) &= T_\lambda \begin{pmatrix} \lambda L_\lambda(\psi) \\ CL_\lambda(\psi) \end{pmatrix} = \lambda T_\lambda \begin{pmatrix} L_\lambda(\psi) \\ \frac{1}{\lambda} CL_\lambda(\psi) \end{pmatrix} = \\ &= \lambda T_\lambda \begin{pmatrix} \psi_2 - \lambda\psi_1 \\ -C\psi_1 - B\psi_2 - \lambda\psi_2 \end{pmatrix} = \lambda T_\lambda(\Pi\hat{\psi} - \lambda\hat{\psi}) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\varphi_1 = \varphi, \varphi_2 = \lambda\varphi, \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \in \Omega_n,$$

$$\psi_1 = -\frac{1}{\lambda} L_\lambda(\psi), \psi_2 = 0, \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in \Omega_n.$$

Здесь был использован тот факт, что $T_\lambda \in \Omega_n^*$ является собственным функционалом оператора Π . Таким образом, системы вышестроенных линейных непрерывных функционалов $t_\lambda^{(1)}, t_\lambda^{(2)} \in \Omega_L^*$ являются системами собственных функционалов для квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$.

Пусть теперь f — произвольный элемент гильбертового пространства H , а φ — произвольный элемент линейного пространства Ω_L . Составим векторы

$$\hat{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \in H \quad \text{и} \quad \hat{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in \Omega_n, \quad \hat{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \in H \quad \text{и} \quad \hat{\psi} = \begin{pmatrix} \lambda\varphi \\ C\varphi \end{pmatrix} \in \Omega_n.$$

Тогда в силу соотношения (22) имеем

$$\begin{aligned} (f, \varphi) &= (-C0, 0) + (f, \varphi) = \langle \hat{f}, \hat{\varphi} \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \cdot \overline{T_\lambda(\hat{\varphi})} d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \cdot \overline{t_\lambda^{(1)}(\varphi)} d\rho(\lambda), \end{aligned} \quad (32_1)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}, \hat{\psi} \rangle &= -(Cg_1, \lambda\varphi) + (g_2, C\varphi) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda) \cdot \overline{T_\lambda(\hat{\psi})} d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda) \cdot \overline{t_\lambda^{(2)}(\varphi)} d\rho(\lambda). \end{aligned} \quad (32_2)$$

Таким образом, произвольный элемент f гильбертова пространства $\mathbf{H}$, рассматриваемый как линейный функционал, представляется в виде интеграла Лебега-Стилтьеса через систему собственных функционалов $t_\lambda^{(1)} \in \Omega_L^*$ квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$, а также выполняется равенство (32₂).

Наконец, докажем полноту вышестроенных систем (28) собственных функционалов. На основании (23) для вектора $\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in \Omega_n$, где $\varphi \in \Omega_L$, имеем

$$\|\hat{\varphi}\|_{\mathbf{H}}^2 = \|\hat{\varphi}\|_H^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |T_\lambda(\hat{\varphi})|^2 d\rho(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t_\lambda(\varphi)|^2 d\rho(\lambda), \quad (33_1)$$

$$\|C\varphi\|_{\mathbf{H}}^2 + |\lambda|^2 \cdot \|(-C)^{1/2}\varphi\|_{\mathbf{H}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |t_\lambda^{(2)}(\varphi)|^2 d\rho(\lambda). \quad (33_2)$$

Из формулы (33) видно, что если $t_\lambda^{(1)}(\varphi) = 0$ или $t_\lambda^{(2)}(\varphi) = 0$ для всех λ , то $\varphi = 0$.

Резюмируя вышеизложенное, при наличии предположения (26), мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1.2. Если спектр квадратичного операторного пучка простой и чисто непрерывный в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, то существует линейное пространство Ω_L , состоящее из всюду плотного в $\mathbf{H}$ множества элементов, сходимость в котором влечет сходимость в $\mathbf{H}$, и семейство функционалов $t_\lambda^{(1)}, t_\lambda^{(2)} \in \Omega_L^*$ со следующими свойствами:

1°. $L(\lambda)\Omega_L \subset \Omega_L$ (инвариантность),

2°. $t_\lambda^{(i)}(L_\lambda(\varphi)) = 0$, $\varphi \in \Omega_L$, ($i = 1, 2$) (диагональность),

3°. $(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \cdot \overline{t_\lambda^{(1)}(\varphi)} d\rho(\lambda)$, $f \in \mathbf{H}$, $\varphi \in \Omega_L$,

$$(g_1, -iC\varphi) + (g_2, C\varphi - \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda) t_\lambda^{(2)}(\varphi) d\rho(\lambda); \quad g_1, g_2 \in \mathbf{H}, \varphi \in \Omega_L$$

(формулы разложения),

4°. $\|\varphi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |t_\lambda^{(1)}(\varphi)|^2 d\rho(\lambda)$,

$$\|C\varphi\|^2 + |\lambda|^2 \cdot \|(-C)^{1/2}\varphi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |t_\lambda^{(2)}(\varphi)|^2 d\rho(\lambda) \quad (\text{полнота}).$$

§ 3. О построении собственных функционалов квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$

В работах Р. А. Александрияна [5] предложена достаточно общая конструкция построения полной совокупности собственных функционалов для произвольного самосопряженного оператора A с простым и непрерывным спектром исключительно в терминах резольвенты R_λ этого оператора. Эта формула в общем случае имеет вид [7]

$$T_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{((R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau})g, \varphi)}{((R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau})g, g)} \quad (34)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{Q}_A$ и для некоторого множества λ полной спектральной меры.

$\mathcal{Q}_A$ — некоторое линейное пространство, состоящее из всюду плотного множества элементов гильбертова пространства H , g — порождающий элемент. Если спектр оператора A лебеговский, т. е. спектральная плотность $\rho(\lambda) = (E_\lambda g, g)$ абсолютно непрерывна по мере Лебега, то формула (34) принимает вид

$$T_\lambda(\varphi) = \frac{1}{2\pi i \rho'(\lambda)} \lim_{\tau \rightarrow +0} ((R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau})g, \varphi). \quad (35)$$

Цель настоящего параграфа — нахождение аналогичной конструкции построения полной совокупности собственных функционалов для квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$.

Пусть спектр квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ простой и чисто непрерывный. Тогда спектр матричного оператора Π будет простым и чисто непрерывным в гильбертовом пространстве H . Поэтому полная система собственных функционалов оператора Π получается по формуле Р. А. Александрияна (34)

$$T_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\langle (R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau}) \hat{g}, \hat{\varphi} \rangle}{\langle (R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau}) \hat{g}, \hat{g} \rangle}, \quad \hat{\varphi} \in \mathcal{Q}_\Pi, \quad (36)$$

$\hat{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ — порождающий элемент в H .

Перейдем к построению резольвенты ассоциированного с квадратичным пучком $L(\lambda)$ матричного оператора Π в ортогональной сумме гильбертовых пространств $H \oplus H = H$.

Рассмотрим уравнение для резольвенты

$$\Pi \hat{u} - z \hat{u} = \hat{v}, \quad \text{где } \hat{u} = R_z \hat{v}, \quad (37)$$

z — не вещественно.

В раскрытом виде оно имеет вид

$$\begin{cases} u_2 - z \cdot u_1 = v_1, \\ -Cu_1 - Bu_2 - zu_2 = v_2. \end{cases} \quad (38)$$

Применим к обеим сторонам первого равенства этой системы оператор C , а второе равенство с обеих сторон умножим на $-z$, получим

$$\begin{cases} Cu_2 - z \cdot Cu_1 = Cv_1, \\ Cu_1 + z \cdot Bu_2 + z^2 u_2 = -zv_2. \end{cases} \quad (39)$$

Подставляя Cu_1 из первого равенства системы (39) во второе, получим

$$L(z)u_2 = Cv_1 - z \cdot v_2. \quad (40)$$

Из соотношений (38) и (40) находим

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{z}v_1 + \frac{1}{z}L^{-1}(z)(Cv_1 - z \cdot v_2), \\ u_2 = L^{-1}(z)(Cv_1 - zv_2). \end{cases} \quad (41)$$

Последнее означает, что

$$R_z \hat{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z}I + \frac{1}{z}L^{-1}(z)C & -L^{-1}(z) \\ L^{-1}(z)C & -zL^{-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Подставляя в выражение резольвенты (42) соответственно $z = \lambda \pm i\tau$ и составляя их разность, после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} & R_{\lambda+i\tau} - R_{\lambda-i\tau} = \\ & = \begin{vmatrix} \frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} [I - L^{-1}(\lambda - i\tau)] + \frac{1}{\lambda + i\tau} [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] C, & - \\ & - [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \\ [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] C, & -2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) + (\lambda - i\tau)[L^{-1} \times \\ & \times (\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (43)$$

После подстановки выражения (43) в (36) мы получаем формулу, определяющую систему собственных функционалов в виде

$$\begin{aligned} & T_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \times \\ & \times \left\{ \frac{-\frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \left(\frac{Cg_1}{\lambda + i\tau} + g_2, -C\varphi_1 \right) +}{-2i\tau L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \left(\frac{Cg_1}{\lambda + i\tau} + g_2, -Cg_1 \right) +} \right. \\ & \left. + \frac{(-2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) g_2 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau)g_2), \varphi_2)}{(-2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) g_2 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau)g_2), g_2)} \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

В случае, когда спектр оператора лебеговский, формула (44) принимает вид

$$T_{\lambda}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i \rho'(\lambda)} \lim_{\tau \rightarrow +0} \left\{ \left(-\frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{Cg_1}{\lambda + i\tau} + g_2 \right), -C\varphi_1 \right) + \left(-2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) g_2 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2), \varphi_2 \right) \right\}. \quad (45)$$

Теперь уже на основании (28) можно записать формулы, дающие систему собственных функционалов квадратичного операторного пучка

$$t_{\lambda}^{(1)}(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \times \\ \times \left\{ \frac{([L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2), -C\varphi)}{\left(-2i\tau L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \left(\frac{Cg_1}{\lambda + i\tau} + g_2 \right), g_1 \right) +} \right. \\ \left. + \frac{\left(-\frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1, \varphi \right)}{+(-2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) g_2 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2), g_2)} \right\}. \quad (44_1)$$

$$t_{\lambda}^{(2)}(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \times \\ \times \left\{ \frac{\left(-\frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \left(\frac{Cg_1}{\lambda + i\tau} + g_2 \right), -\lambda C\varphi_1 \right) +} \right. \\ \left. \left(-2i\tau L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)] \left(\frac{Cg_1}{\lambda + i\tau} + g_2 \right), g_2 \right) + \right. \\ \left. \frac{+(-2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) g_2 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2), (C\varphi - \varphi))}{-(-2i\tau L^{-1}(\lambda + i\tau) g_2 + [L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2), g_2)} \right\}. \quad (44_2)$$

А в случае лебегового спектра

$$t_{\lambda}^{(1)}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i \rho'(\lambda)} \lim_{\tau \rightarrow +0} \left\{ \left(-C[L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1, \varphi \right) \right\}, \quad (45_1)$$

$$t_{\lambda}^{(2)}(\varphi) = \frac{1}{2\pi i \rho'(\lambda)} \lim_{\tau \rightarrow +0} \left\{ \left([L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(\lambda - i\tau)](Cg_1 + (\lambda - i\tau) g_2) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2i\tau}{\lambda^2 + \tau^2} L^{-1}(\lambda - i\tau) g_1, -\lambda C\varphi \right) + \right.$$

$$+ ([L^{-1}(\lambda + i\tau) - L^{-1}(i - i\tau)](Cg_1 + (i - i\tau)g_2) - 2i\tau L^{-1}(i + i\tau)g_2, C\varphi) \Big| . \quad (45_2)$$

В заключение отметим, что здесь мы не касались вопросов характера спектра и структуры собственных функционалов (характера непрерывности функционалов). Эти важные вопросы требуют отдельного изучения.

Ереванский государственный
университет

Поступила 7.III.1977

Գ. Վ. ՎԻՐԱԲԻԱՆ, Անընդհատ սպեկտրով Գառակուսային օպերատորային փնջերի մասին
(ամփոփում)

Ինքնահամալուծ քառակուսային օպերատորային փնջերի մի դասի համար մուծված են անընդհատ սպեկտրի, դիֆերենցիալ լուծումների և սեփական ֆունկցիոնալի գաղափարները: Պարզ անընդհատ սպեկտրի առկայության դեպքում ապացուցված են թեորեմների սեփական դիֆերենցիալների և սեփական ֆունկցիոնալների կրկնապատիկ լրիվության վերաբերյալ: Ստացված է նաև բանաձև ֆունկցիոնալների կառուցման համար:

G. V. VIRABIAN. *On quadratic operator bundles with continuous spectrum*
(summary)

For a class of selfconjugated quadratic operator bundles the notions of continuous spectrum, the differential solutions and eigenfunctionals are introduced.

Under the condition of the existence of a simple doubly continuous spectrum on double completeness of eigenfunctionals and eigendifferentials are proved.

A formula for construction of eigenfunctionals is also obtained.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, № 77, 1951.
2. М. Г. Крейн и Г. К. Лангер. О некоторых математических принципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов. Труды межд. симп. по прим. т.ф.к.п. в механике сплошной среды, Изд. „Наука“, 1965.
3. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. V, 1947.
4. Р. А. Александрян. К вопросу о зависимости качественных свойств решений некоторых смешанных задач от вида области, Диссертация, МГУ, 1949.
5. Р. А. Александрян. Исследование спектральных свойств операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. А. Соболева. Докторская диссертация, МГУ, 1962.
6. Р. А. Александрян. Об одном способе построения полной системы собственных функционалов самосопряженных операторов с лебеговым спектром, ДАН Арм.ССР, XL, № 5, 1965.
7. Р. А. Александрян. О спектральном разложении произвольных самосопряженных операторов по собственным функционалам, ДАН СССР, 162, № 1, 1965.