ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 6, 1977 Математика

Б. С. РУБИН

ОБЩИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НА НЕТЕРОВОСТЬ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА СО СТЕПЕННО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ЯДРАМИ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

В настоящей статье исследуются на нетеровость операторы типа потенциала

$$(K_{\varphi}^{\alpha,\nu})(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{c(x,y)}{|x-y|^{1-\alpha}}\ln^{\nu}\frac{\gamma}{|x-y|}\varphi(y)\,dy, \tag{1}$$

$$-\infty<a<b<\infty,\ \varphi\in L_p(a,b),\ 1<p<\infty,\ \gamma>b-a.$$

Для $\nu=0$, $0<\alpha<\frac{1}{p}$ операторы типа (1) рассматривались в работах [1], [2]. Случай $\nu>0$, $0<\alpha<\frac{1}{p}$ был изучен в [3]*. В данной статье предлагается единый метод исследования операторов (1) для произвольного вещественного ν и $\alpha\in[0,1]$**. Этот метод заключается в применении операции дифференцирования произвольного порядка по параметру α и основывается на свойствах высших трансцендентных функций типа функций Вольтерра ([4])***.

§ 1. Некоторые вспомогательные результаты

Введем обозначения:

$$\varphi \underset{a}{*} \psi=\int_a^x \varphi(y)\,\psi(x-y)\,dy,\quad \varphi \overset{b}{*} \psi=\int_x^b \varphi(y)\,\psi(y-x)\,dy,$$

---

* Из устного сообщения автору известно, что случай $\alpha=1$, $\nu>0$ рассматривался А. А. Килбасом методом, аналогичным методу работы [3].

** При $\alpha=0$ предполагается, что $\nu<-1$ и множитель $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}$ опускается; при $\alpha=1$ предполагается, что $\nu>0$.

*** Интегральные преобразования, ядрами которых являются функции Вольтерра, рассматривались М. М. Джрбашяном в монографии [5].

$$(I^{\nu}\psi)(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\nu)}\displaystyle\int\limits_{\alpha}^{\infty}\dfrac{\psi(y)\,dy}{(y-\alpha)^{1-\nu}} & \nu>0,\\[2ex] (-1)^{[-\nu]+1}\dfrac{d^{[-\nu]+1}}{d\alpha^{[-\nu]+1}}\left(I^{1+\nu+[-\nu]}\psi\right)(\alpha), & \nu<0.\end{cases}$$

При $\alpha=0$ будем писать просто $\varphi*\psi$. Для того чтобы подчеркнуть, что оператор I^{ν} применяется по некоторой переменной t, будем писать I_t^{ν}. Все функции для простоты предполагаются вещественными. Соотношения, в которых участвуют функции из $L_p(a, b)$, понимаются в смысле „почти всюду".

Применим к равенству

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha-1}*\frac{1}{\Gamma(\beta)}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\beta-1}=\frac{\gamma}{\Gamma(\alpha+\beta)}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha+\beta-1}\quad(0<\alpha,\ \beta<1)$$

оператор $A^{\nu}f=\{I_{\beta}^{-\nu}[(I_{\alpha}^{\nu}f(\alpha,\beta))(\alpha)]\}(1-\alpha)$. Вводя обозначение

$$\mu_{t,\nu}(x)=\left(I_t^{\nu}\left[\frac{1}{\Gamma(t)}\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{t-1}\right]\right)(t),$$

получаем

$$\frac{1}{\gamma}\mu_{\alpha,\nu}*\mu_{1-\alpha,-\nu}=1. \tag{1.1}$$

Поведение в нуле функции $\mu_{t,\nu}(x)$ характеризуется равенством ([4], стр. 231):

$$\mu_{t,\nu}(x)=\left(\frac{x}{\gamma}\right)^{t-1}\left(\ln\frac{\gamma}{x}\right)^{-\nu}\left\{\frac{1}{\Gamma(t)}+\nu\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\Gamma(t)}\right)\ln^{-1}\frac{\gamma}{x}+\right.$$
$$\left.+O\left(\ln^{-2}\frac{\gamma}{x}\right)\right\}, \tag{1.2}$$

которое позволяет распространить соотношение (1.1) по непрерывности на случаи $\alpha=0$, $\nu>0$ и $\alpha=1$, $\nu<0$.

Из (1.1) вытекает легко проверяемая

Лемма 1.1. *Соотношения* $\{f=\varphi\underset{a}{*}\mu_{\alpha,\nu},\ \varphi\in L(a,b)\}$ *и*

$$\left\{f\underset{a}{*}\frac{1}{\gamma}\mu_{1-\alpha,-\nu}=\varphi\underset{a}{*}1,\ \varphi\in L(a,b)\right\}$$

эквивалентны.

Далее введем обозначение:

$$u_{\alpha,\nu}=u_{\alpha,\nu}(x)=\begin{cases}\dfrac{\left(\dfrac{x}{\gamma}\right)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\ln^{-\nu}\dfrac{\gamma}{x}, & \alpha>0,\ -\infty<\nu<\infty,\\[2ex] \nu\left(\dfrac{x}{\gamma}\right)^{-1}\ln^{-\nu-1}\dfrac{\gamma}{x}, & \alpha=0,\ 0<\nu<\infty.\end{cases}$$

Лемма 1.2. *Пусть функция $c = c(x)$ непрерывна на $[0, b-a]$ и непрерывно дифференцируема на*

$$(0, b-a], \; c^\circ = \lim_{x\to 0} c(x), \; \zeta = \frac{cu_{\alpha,\nu}}{\mu_{\alpha,\nu}} - c^\circ.$$

Тогда для любой функции $\varphi \in L(a, b)$ справедливо равенство

$$\varphi \underset{a}{*} cu_{\alpha,\nu} = (c^\circ \varphi + \varphi \underset{a}{*} \psi) \underset{a}{*} \mu_{\alpha,\nu}, \tag{1.3}$$

где

$$\psi(x) = -\frac{1}{\gamma}\int_0^x \zeta'(y)\,dy \int_0^y \mu_{\alpha,\nu}(t)\,\frac{d}{dx}\,\mu_{1-\alpha,-\nu}(x-t)\,dt \in L(0, b-a).$$

Доказательство. Убедимся сначала, что $\psi(x) \in L(0, b-a)$. В силу (1.2) при $\alpha > 0$, $\nu > 0$ имеем

$$\int_0^{b-a} |\psi(x)|\,dx \leqslant \mathrm{const}\cdot \int_0^{b-a} |\zeta'(y)|\,dy \int_0^y \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \int_y^{b-a} \frac{\ln^{-\nu}\frac{\gamma}{t}\ln^{\nu}\frac{\gamma}{x-t}}{(x-t)\,1+\alpha}\,dx =$$

$$= \mathrm{const}\int_0^{b-a} |\zeta'(y)|\,dy \int_0^y \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \times$$

$$\times \int_y^{b-a} \frac{\left[\ln\frac{t}{x-t} + \ln\frac{\gamma}{t}\right]^{[\nu]}\left[\left(\ln^{\nu-[\nu]}\frac{\gamma}{x-t} - \ln^{\nu-[\nu]}\frac{\gamma}{t}\right) + \ln^{\nu-[\nu]}\frac{\gamma}{t}\right]}{\ln^{\nu}\frac{\gamma}{t}\,(x-t)^{1+\alpha}}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\sum_{i=0}^{[\nu]}\binom{[\nu]}{i}\int_0^{b-a} |\zeta'(y)|\,dy \int_0^y \frac{dt}{t^{1-\alpha}} \times$$

$$\times \int_y^{b-a} \frac{\left|\ln\frac{t}{x-t}\right|^{i}\left(\left|\ln\frac{t}{x-t}\right|^{\nu-[\nu]} + \ln^{\nu-[\nu]}\frac{\gamma}{t}\right)}{\ln^{\nu-[\nu]+i}\frac{\gamma}{t}\,(x-t)^{1+\alpha}}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\sum_{i=0}^{[\nu]}\binom{[\nu]}{i}\int_0^{b-a} |\zeta'(y)|\,dy \int_0^y \frac{dt}{t}\int_{\frac{y}{t}}^{\frac{b-a}{t}} \frac{\left|\ln\frac{1}{\xi-1}\right|^{i+\nu-[\nu]} + \left|\ln\frac{1}{\xi-1}\right|^{i}}{(\xi-1)^{1+\alpha}}\,d\xi =$$

$$= \mathrm{const}\sum_{i=0}^{[\nu]}\binom{[\nu]}{i}\int_0^{b-a} |\zeta'(y)|\,dy\left(\int_1^{\frac{b-a}{y}} \ln\xi + \int_{\frac{b-a}{y}}^{\infty} \ln\frac{b-a}{y}\right) \times$$

$$\times \frac{\left|\ln\frac{1}{\xi-1}\right|^{i+\nu-[\nu]}+\left|\ln\frac{1}{\xi-1}\right|^{i}}{(\xi-1)^{1+\alpha}}\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\sum_{i=0}^{[\nu]}\binom{[\nu]}{i}\int_0^{b-a}|\zeta'(y)|\,dy\int_1^{\infty}\frac{\left(\left|\ln\frac{1}{\xi-1}\right|^{i+\nu-[\nu]}+\left|\ln\frac{1}{\xi-1}\right|^{i}\right)\ln\xi}{(\xi-1)^{1+\alpha}}\,d\xi<\infty.$$

Для случаев $\alpha=0$, $\nu>0$ и $\alpha>0$, $\nu<0$ выкладки проводятся аналогично.

Воспользуемся леммой 1.1, полагая $f=\varphi \underset{a}{*} c\mu_{\alpha,\nu}$:

$$f\underset{a}{*}\frac{1}{\gamma}\mu_{1-\alpha,-\nu}=[\varphi\underset{a}{*}(c^{\circ}\mu_{\alpha,\nu}+\zeta\mu_{\alpha,\nu})]\underset{a}{*}\frac{1}{\gamma}\mu_{1-\alpha,-\nu}=$$

$$=c^{\circ}\varphi\underset{a}{*}1+\varphi\underset{a}{*}(\zeta\mu_{\alpha,\nu}*\frac{1}{\gamma}\mu_{1-\alpha,-\nu}).$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$\zeta\mu_{\alpha,\nu}*\frac{1}{\gamma}\mu_{1-\alpha,-\nu}=\psi*1,$$

откуда вытекает, что

$$f\underset{a}{*}\frac{1}{\gamma}\mu_{1-\alpha,-\nu}=(c^{\circ}\varphi+\varphi\underset{a}{*}\psi)\underset{a}{*}1.$$

Но тогда в силу леммы 1.1, $f=(c^{\circ}\varphi+\varphi\underset{a}{*}\psi)\underset{a}{*}\mu_{\alpha,\nu}$, что и требовалось доказать.

Из леммы 1.2, учитывая равенство нулю спектрального радиуса оператора Вольтерра [6], получаем критерий разрешимости в $L_p(a, b)$ интегральных уравнений первого рода вида $\varphi * c\mu_{\alpha,\nu}=\Phi$.

Теорема 1.1. *Пусть функция $c(x)$ $(c(0)\neq 0)$ удовлетворяет условиям леммы 1.2. Для того чтобы уравнение $\varphi\underset{a}{*}c\mu_{\alpha,\nu}=\Phi$ было разрешимо в $L_p(a, b)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\Phi\in\{f|f=\varphi\underset{a}{*}\mu_{\alpha,\nu},\ \varphi\in L_p(a, b)\}.$$

При выполнении этого условия решение φ единственно и находится по формуле:

$$\varphi=(c^{\circ}I+V_{\psi})^{-1}\frac{d}{dx}\left(\Phi\underset{a}{*}\frac{1}{\gamma}\mu_{1-\alpha,-\nu}\right),$$

где $V_{\psi}\varphi=\varphi\underset{a}{*}\psi$, I — тождественный оператор.

Описание класса правых частей Φ в терминах свертки с функцией $\frac{1}{\gamma}\mu_{1-\alpha,-\nu}$ содержится в лемме 1.1, которая является обобщением теоремы Тамаркина ([10]) для уравнений вида $\varphi\underset{a}{*}\mu_{\alpha,\nu}=f$.

Отметим еще два утверждения, которые вытекают из леммы 1.2 и играют в дальнейшем важную роль. Пусть $g(x) \in L(0, b-a)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Введем банахово пространство

$$L_p(a, b) \underset{a}{*} g = \{f | f = \varphi \underset{a}{*} g,\ \varphi \in L_p(a, b);\ \|f\| = \|\varphi\|_{L_p(a, b)}\}.$$

Лемма 1.3. *Справедливы следующие утверждения:*

а) *Если* $c^\circ \neq 0$, *то* $L_p(a, b) \underset{a}{*} cu_{\alpha, \nu} = L_p(a, b) \underset{a}{*} \mu_{\alpha, \nu}$.

б) *Если* $c^\circ = 0$, *то имеет место вложение*

$$L_p(a, b) \underset{a}{*} cu_{\alpha, \nu} \to L_p(a, b) \underset{a}{*} \mu_{\alpha, \nu} = L_p(a, b) \underset{a}{*} u_{\alpha, \nu},$$

причем оператор вложения вполне непрерывен.

Утверждение а) вытекает из обратимости в $L_p(a, b)$ оператора $W: \varphi \to c^\circ \varphi + \varphi \underset{a}{*} \psi$ ([6]). Утверждение б) очевидно.

В заключение заметим, что все приведенные в этом параграфе результаты для сверток $\underset{a}{*}$ верны и для сверток $\overset{b}{*}$.

§ 2. Свертки со степенно-логарифмическими ядрами и сингулярные интегральные операторы

1°. Введем обозначения:

$$I_{a+}^{\alpha, \nu} \varphi = \varphi \underset{a}{*} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ln^\nu \frac{\gamma}{x}, \quad I_{b-}^{\alpha, \nu} \varphi = \varphi \overset{b}{*} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \ln^\nu \frac{\gamma}{x}. \tag{2.1}$$

При $\nu = 0$ будем писать просто $I_{a+}^\alpha \varphi$, $I_{b-}^\alpha \varphi$. В случае $\alpha = 0$ множитель $\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}$ в выражениях (2.1) будем опускать и брать $\nu < -1$.

При $\alpha = 1$ будем предполагать, что $\nu > 0$.

Рассмотрим сингулярные операторы

$$(S_{a, \alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{y-a}{x-a}\right)^\alpha \frac{\varphi(y)}{y-x}\, dy, \quad (S_{b, \alpha} \varphi)(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{b-y}{b-x}\right)^\alpha \frac{\varphi(y)}{y-x}\, dy, \tag{2.2}$$

$$(S_{a, \alpha-1} \varphi)(x) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{y-a}{x-a}\right)^{\alpha-1} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy, \quad (S_{b, \alpha-1} \varphi)(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_a^b \left(\frac{b-y}{b-x}\right)^{\alpha-1} \frac{\varphi(y)}{y-x}\, dy. \tag{2.3}$$

Эти операторы ограничены в $L_p(a, b)$: первые два при $\frac{1}{p} - 1 < \alpha < \frac{1}{p}$, вторые два — при $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{p} + 1$ ([7])*.

В настоящем параграфе выводится ряд соотношений, связывающих операторы (2.1) с операторами (2.2), (2.3).

Поменяем порядок интегрирования в композициях $I^\alpha_{a+} S_{a,\alpha}$, $I^\alpha_{b-} S_{b,\alpha}$, $I^\alpha_{a+} S_{a,\alpha-1}$, $I^\alpha_{b-} S_{b,\alpha-1}$. Применяя формулы 3.228 (2) и 3.228 (1) из [8], получаем следующее утверждение:

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. *Тогда при* $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{p}$**

$$I^\alpha_{b-}\varphi = I^\alpha_{a+}(\cos(\alpha\pi)\varphi + \sin(\alpha\pi) S_{a,\alpha}\varphi), \tag{2.4}$$

$$I^\alpha_{a+}\varphi = I^\alpha_{b-}(\cos(\alpha\pi)\varphi - \sin(\alpha\pi) S_{b,\alpha}\varphi), \tag{2.5}$$

а при $\frac{1}{p} < \alpha \leqslant 1$

$$I^\alpha_{b-}\varphi = I^\alpha_{a+}(\cos(\alpha\pi)\varphi - \sin(\alpha\pi) S_{a,\alpha-1}\varphi) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \varphi(t)(t-a)^{\alpha-1}\,dt, \tag{2.6}$$

$$I^\alpha_{a+}\varphi = I^\alpha_{b-}(\cos(\alpha\pi)\varphi + \sin(\alpha\pi) S_{b,\alpha-1}\varphi) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \varphi(t)(b-t)^{\alpha-1}\,dt. \tag{2.7}$$

Равенства (2.4), (2.5) были получены ранее в работе [1]. Для достаточно гладких функций они выполняются при $0 \leqslant \alpha < 1$, а равенства (2.6), (2.7) — при $0 < \alpha < 2$.

2°. Используя результаты § 1, получим аналог теоремы 2.1 для степенно-логарифмических ядер.

Пусть

$$(P^+_{\alpha,\varepsilon} f)(\alpha_1) = \{f(\alpha_1),\ \alpha_1 \in [\alpha, \alpha+\varepsilon];\ 0,\ \alpha_1 \overline{\in} [\alpha, \alpha+\varepsilon]\},\quad 0 \leqslant \alpha < \alpha + \varepsilon < \frac{1}{p};$$

$$(P^-_{\alpha,\varepsilon} f)(\alpha_1) = \{f(\alpha_1),\ \alpha_1 \in [\alpha-\varepsilon, \alpha];\ 0,\ \alpha_1 \overline{\in} [\alpha-\varepsilon, \alpha]\},\quad \frac{1}{p} < \alpha - \varepsilon < \alpha \leqslant 1;$$

$$\tilde{I}^\gamma_{\pm} f = c_\alpha \gamma^\alpha \left(I^\gamma_{\alpha_1} \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\gamma^{\alpha_1}} P^\pm_{\alpha,\varepsilon} f\right)(\alpha);\quad c_\alpha = \left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)},\ \alpha > 0;\ 1,\ \alpha = 0\right\}.$$

---

* Указанные условия являются не только достаточными, но и необходимыми для ограниченности операторов (2.2), (2.3) ([7]).

Поэтому „плохой“ случай $\alpha = \frac{1}{p}$ в данной статье не рассматривается.

** При $\alpha = 0$ равенства (2.4), (2.5) понимаются в предельном смысле, то есть $\varphi = \varphi$.

Через V_1, V_2 и т. д. будем обозначать вполне непрерывные в $L_p(a, b)$ вольтерровские операторы.

Рассмотрим соотношение (2.4). Заменим в нем α на α_1 и применим по α_1 оператор $\widetilde{I}_+^{\nu}$.

а) Преобразуем сначала левую часть получающегося равенства. Пусть $\nu > 0$ (при $\alpha = 0$ будем брать $\nu > 1$). Тогда

$$\widetilde{I}_+^{\nu} I_{b-}^{\alpha_1} \varphi = c_\alpha \int\limits_x^b \frac{\varphi(y)\,dy}{(y-x)^{1-\alpha}} \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{y-x}{\gamma}\right)^t dt = \varphi \overset{b}{*} \left[\frac{\ln^{-\nu}\frac{\gamma}{x}}{x^{1-\alpha}} - \frac{\lambda_\nu(x)}{x^{1-\alpha-\varepsilon}}\right] c_\alpha,$$

где

$$\lambda_\nu(x) = \frac{x^{-\varepsilon}}{\Gamma(\nu)} \ln^{-\nu}\frac{\gamma}{x} \int\limits_{\varepsilon \ln \frac{\gamma}{x}}^{\infty} e^{-\tau}\, \tau^{\nu-1}\, d\tau = O\left(\ln^{-1}\frac{\gamma}{x}\right)$$

при $x \to 0$ ([8], формула 8.357).

В силу леммы 1.3 и равенства (2.4)

$$c_\alpha \varphi \overset{b}{*} \frac{\lambda_\nu(x)}{x^{1-\alpha-\varepsilon}} = I_{b-}^{\alpha+\varepsilon} V_1 \varphi = I_{a+}^{\alpha+\varepsilon} N_{\alpha+\varepsilon} V_1 \varphi = I_{a+}^{\alpha,-\nu} V_2 N_{\alpha+\varepsilon} V_1 \varphi,$$

где $N_t = \cos(t\pi) I + \sin(t\pi) S_{a,t}$, I — тождественный оператор. Таким образом, получаем

$$\widetilde{I}_+^{\nu} I_{b-}^{\alpha_1} = I_{b-}^{\alpha,-\nu} - I_{a+}^{\alpha,-\nu} V_3, \text{ где } V_3 = V_2 N_{\alpha+\varepsilon} V_1. \tag{2.8}$$

Пусть теперь $\nu < 0$, $\alpha > 0$. Тогда

$$\widetilde{I}_+^{\nu} I_{b-}^{\alpha_1} \varphi = c_\alpha \gamma^\alpha (-1)^{[-\nu]+1} \frac{d^{[-\nu]+1}}{d\alpha^{[-\nu]+1}} I_{\alpha_1}^{1+\nu+[-\nu]} \frac{\Gamma(\alpha_1)}{\gamma^{\alpha_1}} P_{\alpha,\varepsilon}^{+} I_{b-}^{\alpha_1} \varphi =$$

$$= c_\alpha \gamma^\alpha (-1)^{[-\nu]+1} \frac{d^{[-\nu]+1}}{d\alpha^{[-\nu]+1}} \left\{ \varphi \overset{b}{*} \left(\frac{x}{\gamma}\right)^\alpha \left[\frac{\ln^{-1-\nu-[-\nu]}\frac{\gamma}{x}}{x} - \frac{\lambda_{1+\nu+[-\nu]}(x)}{x^{1-\varepsilon}}\right]\right\} =$$

$$= I_{b-}^{\alpha,-\nu} \varphi - c_\alpha \varphi \overset{b}{*} \frac{\ln^{[-\nu]+1}\frac{\gamma}{x}}{x^{1-\alpha-\varepsilon}} \lambda_{1+\nu+[\nu]}(x).$$

Применяя лемму 1.3 и соотношение (2.4), получаем

$$c_\alpha \varphi \overset{b}{*} \frac{\ln^{[-\nu]+1}\frac{\gamma}{x}}{x^{1-\alpha-\varepsilon}} \lambda_{1+\nu+[-\nu]}(x) = I_{b-}^{\alpha} V_4 \varphi = I_{a+}^{\alpha,-\nu} V_5 N_\alpha V_4,$$

откуда вытекает равенство, аналогичное (2.8).

б) Преобразуем теперь выражение

$$\widetilde{I}^{\nu}_{+} \cos(\alpha_1 \pi) I^{\alpha_1}_{a+} \varphi = c_\alpha \gamma^\alpha \varphi \underset{a}{*} \frac{1}{x} I^{\nu}_{\alpha_1} P^{+}_{\alpha, \varepsilon} \cos(\alpha_1 \pi) \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha_1}.$$

Пусть $\nu > 0$. Интегрируя по частям, получаем

$$I^{\nu}_{\alpha_1} P^{+}_{\alpha, \varepsilon} \cos(\alpha_1 \pi) \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha} = \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\alpha} \ln^{-\nu} \frac{\gamma}{x} [\cos \alpha\pi - \widetilde{\lambda}(x)],$$

где

$$\widetilde{\lambda}(x) = \int\limits_{\varepsilon \ln \frac{\gamma}{x}}^{\infty} e^{-t} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} dt + \int\limits_{0}^{\varepsilon} \sin(\tau + \alpha) \pi \, d\tau \int\limits_{\tau \ln \frac{\gamma}{x}}^{\infty} e^{-t} \frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} dt \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

Отсюда, в силу леммы 1.3

$$\widetilde{I}^{\nu}_{+} \cos(\alpha_1 \pi) I^{\alpha_1}_{a+} = I^{\alpha, -\nu}_{a+} (\cos(\alpha\pi) I + V_6). \tag{2.9}$$

Для $\nu < 0$ аналогичное соотношение получается так же, как и в случае а).

в) Рассмотрим, наконец, выражение $\widetilde{I}^{\nu}_{+} I^{\alpha_1}_{a+} \sin(\alpha_1 \pi) S_{a, \alpha_1} \varphi$. Как и в случае б), все рассуждения мы проведем для $\nu > 0$. Незначительное увеличение выкладок для $\nu < 0$ с принципиальными трудностями не связано.

Произведем интегрирование по частям:

$$\widetilde{I}^{\nu}_{+} I^{\alpha_1}_{a+} \sin(\alpha_1 \pi) S_{a, \alpha_1} \varphi = S_{a, \alpha} \varphi \underset{a}{*} \frac{c_\alpha}{x^{1-\alpha}} \int\limits_{0}^{\varepsilon} \sin(\alpha + \xi) \pi \left(\frac{x}{\gamma}\right)^{\xi} \frac{\xi^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} d\xi +$$

$$+ \int\limits_{0}^{\varepsilon} \left[S'_{t+\alpha} \varphi \underset{a}{*} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \ln^{-\nu} \frac{\gamma}{x} \lambda(x, t) \right] dt, \text{ где } S'_{t+\alpha} \varphi = \frac{d}{dt} (S_{t+\alpha} \varphi),$$

$$\lambda(x, t) = \frac{c_\alpha}{\Gamma(\nu)} \int\limits_{t \ln \frac{\gamma}{x}}^{\varepsilon \ln \frac{\gamma}{x}} e^{-\tau} \tau^{\nu-1} \sin\left(\alpha + \tau \ln^{-1} \frac{\gamma}{x}\right) \pi d\tau \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

Поскольку выражение, аналогичное первому слагаемому, уже рассматривалось в пункте б), то в силу леммы 1.3 имеем

$$\widetilde{I}^{\nu}_{+} I^{\alpha_1}_{a+} \sin(\alpha_1 \pi) S_{a, \alpha_1} = I^{\alpha, -\nu}_{a+} (\sin(\alpha\pi) S_{a, \alpha} + V_7 + \int\limits_{0}^{\varepsilon} V_t S'_{t+\alpha} dt, \tag{2.10}$$

где V_t — оператор-функция, вполне непрерывная в $L_p(a, b)$ при $t > 0$ (при $t = 0$ на основании первого утверждения леммы 1.3 полная непрерывность не имеет места).

Обращаясь к выкладкам леммы 1.2, легко убедиться, что оператор-функция V_t непрерывна по t в операторной топологии на $(0, \varepsilon]$ и ограничена равномерно по t на $[0, \varepsilon]$. Отсюда, в силу неравенства

$$\|S'_{t+\alpha}\| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \tau^{t+\alpha-\frac{1}{p}} \left| \frac{\ln \tau}{\tau - 1} \right| d\tau$$

([3], лемма 3.3), вытекает полная непрерывность в $L_p(a, b)$ оператора $\int_0^\varepsilon V_t S''_{t+\alpha} dt$.

Объединяя результаты, полученные в пунктах а), б), в), приходим к соотношению

$$I_{b-}^{\alpha, -\nu} = I_{a+}^{\alpha, -\nu} (\cos (\alpha\pi) I + \sin (\alpha\pi) S_{a, \alpha} + T), \tag{2.11}$$

где T — вполне непрерывный в $L_p(a, b)$ оператор.

Если к (2.11) применить слева и справа оператор $A: f(x) \to f(a + b - x)$, то получим аналог соотношения (2.5).

Для случая $\frac{1}{p} < \alpha \leqslant 1$ соответствующие соотношения получаются аналогичным образом из (2.6), только с помощью оператора $\widetilde{I}_-^{\nu}$.

Подводя итог проделанным рассуждениям, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема 2.2. *Пусть* $\varphi \in L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $-\infty < \nu < \infty$*. *Тогда при* $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{p}$

$$I_{b-}^{\alpha, \nu} \varphi = I_{a+}^{\alpha, \nu} (\cos (\alpha\pi) \varphi + \sin (\alpha\pi) S_{a, \alpha} \varphi + T_1 \varphi), \tag{2.12}$$

$$I_{a+}^{\alpha, \nu} \varphi = I_{b-}^{\alpha, \nu} (\cos (\alpha\pi) \varphi - \sin (\alpha\pi) S_{b, \alpha} \varphi + T_2 \varphi), \tag{2.13}$$

а при $\frac{1}{p} < \alpha \leqslant 1$

$$I_{b-}^{\alpha, \nu} \varphi = I_{a+}^{\alpha, \nu} (\cos (\alpha\pi) \varphi - \sin (\alpha\pi) S_{a, \alpha-1} \varphi + T_3 \varphi) + B_1 \varphi, \tag{2.14}$$

$$I_{a+}^{\alpha, \nu} \varphi = I_{b-}^{\alpha, \nu} (\cos (\alpha\pi) \varphi + \sin (\alpha\pi) S_{b, \alpha-1} \varphi + T_4 \varphi) + B_2 \varphi, \tag{2.15}$$

где T_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ вполне непрерывные в $L_p(a, b)$ операторы,

$$B_1 \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \varphi(t) (\widetilde{I}_-^{\nu} (t - a)^{\alpha_1 - 1})(\alpha)\, dt; \quad B_2 \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \int_a^b \varphi(t) (\widetilde{I}_-^{\nu} (b - t)^{\alpha_1 - 1})(\alpha)\, dt.$$

Из соотношений (2.12), (2.13) получаем

* См. сноску на стр. 447.

Следствие 1. При $0 \leqslant \alpha < \frac{1}{p}$ банаховы пространства $I_{a+}^{\alpha,\nu}(L_p(a, b))$ и $I_{b-}^{\alpha,\nu}(L_p(a, b))$ совпадают с точностью до эквивалентности норм.

Для случая $\frac{1}{p} < \alpha \leqslant 1$ подобное утверждение не выполняется. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.1. *Пусть* $\frac{1}{p} < \alpha \leqslant 1$. *Для того чтобы выполнялось равенство*

$$I_{a+}^{\alpha,\nu}\varphi = k, \text{ где } \varphi \in L_p(a, b),\ k = \text{const},$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varphi = 0$ *и* $k = 0$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. В силу леммы 1.2

$$I_{a+}^{\alpha,\nu}\varphi = (I + V)\varphi \underset{a}{*} \mu_{\alpha,\nu} = k,$$

где V — вполне непрерывный в $L_p(a, b)$ вольтерровский оператор. Свертывая это равенство с функцией $\frac{1}{\gamma}\mu_{1-\alpha,-\nu}$, на основании соотношения (1.1) получаем

$$\int_a^x (\varphi + V\varphi)(t)\,dt = \frac{k}{\gamma}\int_0^{x-a} \mu_{1-\alpha,-\nu}(t)\,dt,$$

откуда $(I + V)\varphi = \frac{k}{\gamma}\mu_{1-\alpha,-\nu}(x-a)$. В силу (1.2) $\mu_{1-\alpha,-\nu}(x-a) \overline{\in} L_p(a, b)$, поэтому $k = 0$. Но тогда и $\varphi = 0$, как решение однородного уравнения Вольтерра.

Доказанная лемма очевидно справедлива и для правосторонних интегралов $I_{b-}^{\alpha,\nu}$.

Лемма 2.1 дает нам возможность ввести новые банаховы пространства X_+, X_- как прямые суммы

$$X_+ = I_{a+}^{\alpha,\nu}(L_p(a, b)) \oplus R,\ X_- = I_{b-}^{\alpha,\nu}(L_p(a, b)) \oplus R,$$

где R — одномерное вещественное пространство. Нормы в этих пространствах определим следующим образом:

$$\|f\|_{X_+} = \|I_{a+}^{\alpha,\nu}\varphi + h\|_{X_+} = \|\varphi\|_{L_p(a,b)} + |h|,$$

$$\|f\|_{X_-} = \|I_{b-}^{\alpha,\nu}\varphi + h\|_{X_-} = \|\varphi\|_{L_p(a,b)} + |h|.$$

Корректность такого определения вытекает из леммы 2.1.

Теперь на основании соотношений (2.14), (2.15) можно сформулировать

Следствие 2. Пространства X_+ и X_- совпадают с точностью до эквивалентности норм.

§ 3. Операторы типа потенциала

В настоящем параграфе будет получено утверждение о нетеровости оператора типа потенциала (1).

Относительно функции $c(x, y)$ введем следующие предположения:

1) $c(x, y) = \{u(x, y),\ x > y;\ v(x, y),\ x < y\}$.

2) Функции $u(x) = u(x, x-0)$, $v(x) = v(x, x+0)$ непрерывны на $[a, b]$.

3) При $\alpha < 1$ функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ удовлетворяют на $[a, b]$ по переменной x условию Гельдера порядка $\lambda > \alpha$ равномерно по y.

4) При $\alpha = 1$ функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы по x, причем справедливы неравенства:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{\text{const}}{(x-y)^{1-\varepsilon_1}}, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \leqslant \frac{\text{const}}{(y-x)^{1-\varepsilon_1}}, \quad \varepsilon_1 > 0;$$

$$|u(x, y) - u(y, y)| \leqslant \text{const}\,(x-y)^{\varepsilon_2}, \quad |v(x, y) - v(y, y)| \leqslant \text{const}\,(y-x)^{\varepsilon_2},$$
$$\varepsilon_2 > 0.$$

Действие оператора (1) будем рассматривать из пространства $L_p(a, b)$ $1 < p < \infty$ в специальное банахово пространство X, которое в силу следствий 1, 2 из теоремы 2.2 вводится следующим образом:

$$X = \begin{cases} I_{a+}^{\alpha, \nu}(L_p(a, b)) = I_{b-}^{\alpha, \nu}(L_p(a, b)), & 0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{p}, \\ X_+ = X_-, & \dfrac{1}{p} < \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

Представим оператор (1) в виде: $K^{\alpha, \nu} = K_0^{\alpha, \nu} + T_1^{\alpha, \nu} + T_2^{\alpha, \nu}$, где $K_0^{\alpha, \nu}\varphi = I_{a+}^{\alpha, \nu} u\varphi + I_{b-}^{\alpha, \nu} v\varphi$,

$$(T_1^{\alpha, \nu}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{u(x, y) - u(y, y)}{(x-y)^{1-\alpha}} \ln^\nu \frac{\gamma}{x-y}\, \varphi(y)\, dy,$$

$$(T_2^{\alpha, \nu}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{v(x, y) - v(y, y)}{(y-x)^{1-\alpha}} \ln^\nu \frac{\gamma}{y-x}\, \varphi(y)\, dy.$$

Лемма 3.1. *Операторы $T_{1,2}^{\alpha, \nu}$ вполне непрерывны из $L_p(a, b)$ в X.*

Доказательство. В работе [2] были выведены следующие соотношения:

$$T_1^{\alpha, 0} = I_{a+}^{\alpha} M_1^{\alpha}, \quad T_2^{\alpha, 0} = I_{b-}^{\alpha} M_2^{\alpha}\ (0 < \alpha < 1), \tag{3.1}$$

где

$$(M_1^\alpha \varphi)(x) = \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \int\limits_a^x \varphi(s)\, ds \int\limits_s^x \frac{u(x, s) - u(t, s)}{(t-s)^{1-\alpha}(x-t)^{1+\alpha}}\, dt,$$

$$(M_2^\alpha \varphi)(x) = \frac{\alpha \sin \alpha\pi}{\pi} \int\limits_x^b \varphi(s)\, ds \int\limits_x^s \frac{v(x, s) - v(t, s)}{(s-t)^{1-\alpha}(t-x)^{1+\alpha}}\, dt,$$

—вполне непрерывные в $L_p(a, b)$ операторы.

Преобразовывая равенства (3.1) с помощью оператора $\widetilde{I}^{\nu}_{+}$, аналогично тому, как это делалось в § 2 с равенствами (2.4), (2.5) (см. также [3], § 4), получаем

$$T_1^{\alpha,\nu} = I_{a+}^{\alpha,\nu} M_1^{\alpha,\nu}, \quad T_2^{\alpha,\nu} = I_{b-}^{\alpha,\nu} M_2^{\alpha,\nu} \quad (0 \leqslant \alpha < 1), \tag{3.2}$$

где $M_{1,2}^{\alpha,\nu}$ — некоторые вполне непрерывные в $L_p(a, b)$ операторы.

Для $0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{p}$ утверждение леммы вытекает непосредственно из (3.2). В случае $\dfrac{1}{p} < \alpha < 1$ введем операторы вложения

$$i\,(I_{a+}^{\alpha,\nu}(L_p(a, b)) \to X), \; j\,(I_{b-}^{\alpha,\nu}(L_p(a, b)) \to X): \; if = f + 0, \; jf = f + 0.$$

Тогда получаем

$$T_1^{\alpha,\nu}(L_p(a, b) \to X) = i\, I_{a+}^{\alpha,\nu} M_1^{\alpha,\nu}, \quad T_2^{\alpha,\nu}(L_p(a, b) \to X) = j\, I_{b-}^{\alpha,\nu} M_2^{\alpha,\nu},$$

откуда следует утверждение леммы.

Рассмотрим теперь предельный случай $\alpha = 1$. Так как

$$(T_1^{1,\nu} \varphi)(a) = 0, \text{ то } T_1^{1,\nu} \varphi = I_{a+}^1 \widetilde{A}\, \varphi,$$

где оператор

$$\widetilde{A} : \varphi(x) \to \frac{d}{dx}(T_1^{1,\nu} \varphi)(x)$$

ограничен в $L_p(a, b)$ в силу предположений относительно функции $c(x, y)$. Отсюда, учитывая вложение $I_{a+}^1(L_p(a, b)) \to I_{a+}^{1,\nu}(L_p(a, b))$ (см. лемму 1.3), а также ограниченность оператора $i\,(I_{a+}^{1,\nu}(L_p(a, b)) \to \to X)$, получаем полную непрерывность оператора $T_1^{1,\nu}$ из $L_p(a, b)$ в X. Для оператора $T_2^{1,\nu}$ все рассуждения проводятся аналогично.

Из доказанной леммы вытекает, что нетеровость оператора $K^{\alpha,\nu}$ эквивалентна нетеровости модельного оператора $K_0^{\alpha,\nu}$, который в силу теоремы 2.2 представим в виде:

$$K_0^{\alpha,\nu} = I_{a+}^{\alpha,\nu} N^\alpha + B^\alpha, \tag{3.3}$$

где

$$N^{\alpha}\varphi = \begin{cases} (u + v\cos\alpha\pi)\,\varphi + \sin(\alpha\pi)\,S_{a,\alpha}\,v\varphi + T_1 v\varphi, & 0 \leqslant \alpha < \dfrac{1}{p}, \\ (u + v\cos\alpha\pi)\,\varphi - \sin(\alpha\pi)\,S_{a,\alpha-1}\,v\varphi + T_3 v\varphi, & \dfrac{1}{p} < \alpha \leqslant 1, \end{cases}$$

$$B^{\alpha} = \left\{ 0,\ 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{p};\ B_1,\ \frac{1}{p} < \alpha \leqslant 1 \right\}$$

(по поводу остальных обозначений см. (2.12), (2.14)).

Из (3.3) видно, что вопрос о нетеровости оператора $K_0^{\alpha,\nu}$ $(L_p(a, b) \to X)$ сводится к вопросу о нетеровости сингулярного интегрального оператора N^{α} $(L_p(a, b) \to L_p(a, b))$. Применяя к нашему случаю результаты из [9], получаем основную теорему настоящей статьи.

Теорема 3.1. *Для того чтобы оператор типа потенциала $K^{\alpha,\nu}$ был нетеровым из $L_p(a, b)$ в X, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:*

1) $\inf \left| u(x) + v(x)\, e^{i\alpha\pi\,\mathrm{sgn}\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)} \right| > 0,\ x \in [a, b];$

2) *функция*

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{u(x) + v(x)\, e^{i\alpha\pi\,\mathrm{sgn}\left(\frac{1}{p} - \alpha\right)}}{u(x) + v(x)\, e^{i\alpha\pi\,\mathrm{sgn}\left(\alpha - \frac{1}{p}\right)}}, & x \in (a, b], \\ 1, \quad x \in [-\infty, \infty] \setminus (a, b], \end{cases}$$

является ω-неособенной, где

$$\omega = \left\{ (p, -\alpha p),\ 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{p};\ (p, (1-\alpha)\,p),\ \frac{1}{p} < \alpha \leqslant 1 \right\}.$$

При выполнении этих условий

$$\mathrm{Ind}\, K^{\alpha,\nu} = -\,\mathrm{ind}_{\omega}\, G(x) - \frac{1 - \mathrm{sgn}\left(\frac{1}{p} - \alpha\right)}{2}.^{*}$$

Заметим, что в крайних точках $\alpha = 0, 1$ необходимые и достаточные условия нетеровости заключаются в выполнении неравенств

$$c(x, x-0) + c(x, x+0) \neq 0 \text{ при } \alpha = 0,\ c(x, x-0) - c(x, x+0) \neq 0$$

$$\text{при } \alpha = 1 \text{ и } \mathrm{Ind}\, K^{\alpha,\nu} = \{0,\ \alpha = 0;\ -1,\ \alpha = 1\}.$$

В заключение отметим следующий интересный факт, вытекающий из теоремы 3.1.

---

* $\mathrm{Ind}\, K^{\alpha,\nu} = \dim\ker K^{\alpha,\nu} - \dim\operatorname{coker} K^{\alpha,\nu}$.

Теорема 3.2. *Введение в ядро оператора типа потенциала*

$$(K^{\alpha}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^b \frac{c(x, y)}{|x-y|^{1-\alpha}}\,\varphi(y)\,dy$$

множителя $\ln^{\nu}\frac{\gamma}{|x-y|}$, *ослабляющего или усиливающего (в зависимости от знака* ν) *особенность ядра на диагонали, изменяя образ оператора, не влияет на его нетеровость в том смысле, что нетеровость оператора* $K^{\alpha,\nu}$ *из* $L_p(a, b)$ *в* X *эквивалентна нетеровости в* $L_p(a, b)$ *сингулярного интегрального оператора*

$$N_0^{\alpha}\varphi = \begin{cases} (u + v\cos\alpha\pi)\,\varphi + \sin(\alpha\pi)\,S_{a,\,\alpha}\,v\varphi, & 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{p}, \\ (u + v\cos\alpha\pi)\,\varphi - \sin(\alpha\pi)\,S_{a,\,\alpha-1}\,v\varphi, & \frac{1}{p} < \alpha \leqslant 1, \end{cases}$$

не зависящего от ν.

Ростовский государственный
университет

Поступила 20.IV.1976

Բ. Ս. ՌՈՒԲԻՆ. Վերջավոր հատվածի վրա որոշված աստիճանալոգարիթմական կորիզներով պոտենցիալի տիպի օպերատորների նյոտերականությունն ուսումնասիրելու ընդհանուր մեթոդ (*ամփոփում*)

Հոդվածում ստացված է նյոտերականության հայտանիշ աստիճանա-լոգարիթմական կորիզներով օպերատորների համար, որոնք գործում են $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$ *տարածությունից որոշակի ձևով կառուցված* X *բանախյան տարածության մեջ։ Ուսումնասիրության մեթոդը հիմնված է ըստ աստիճանի ցուցչի կամայական դիֆերենցման գործողության և Վոլտերայի տիպի բարձրագույն տրանսցենդենտ ֆունկցիաների հատկությունների վրա։*

B. S. RUBIN. *A Neterity criterion for potential-type operators vith power-logarithmic kernels on a finite segment* (summary)

In this paper Neterity criterion in obtained for the potential type operators with power-logarithmic kernels, acting from $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$ into special Banach space X. The method is based on orbitrary order differentiation with respect to the power and on properties of Volterra type functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Г. Самко.* Об обобщенном уравнении Абеля и операторах дробного интегрирования, Дифференц. уравнения, IV, № 2, 1968.
2. *Б. С. Рубин.* Об операторах типа потенциала на отрезке вещественной оси, Изв. вузов, Матем., № 6, 1973.
3. *Б. С. Рубин.* Операторы типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами в случае неотрицательного показателя степени при логарифме, Изв. СКНЦВШ, Сер. естеств. наук, № 3, 1976.
4. *Г. Бейтмен, А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции, эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье, СМБ.М., Изд. „Наука“, 1967.

5. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука“, 1966.
6. *П. П. Забрейко.* О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра, Лит. Матем. сб., 7, № 2, 1967.
7. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* О сингулярных интегральных уравнениях с неограниченными коэффициентами, Матем. исследования, 5, вып. 3, 1970.
8. *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
9. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* О спектре сингулярных интегральных операторов в пространствах L_p с весом, ДАН СССР, 185, № 4, 1969.
10. *I. D. Tamarkin.* On integrable solutions of Abel's integral equation, Annals of Math., (2), 31, 1930.