

О. А. МУРАДЯН

О НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ И ВЕЛИЧИНАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ АППРОКСИМИРУЮЩИХ АГРЕГАТОВ В ЗАДАЧЕ МЮНЦА

В работе [1] нами рассмотрены дополнения к аппроксимационной теореме Мюнца, связанные с учетом величин коэффициентов, аппроксимирующих полиномов. При этом аппроксимация ведется на компактах более общих, чем $[0,1]$.

Как известно [2], возможность учета величин коэффициентов аппроксимирующих полиномов связана с такими теоремами единственности теории аналитических функций, в которых заключение $F(z) \equiv 0$ выводится из того, что $F(z)$ достаточно быстро убывает на некотором множестве точек. В работе [1] нами были в этой связи получены некоторые теоремы единственности для $F(z)$, являющихся обобщенными преобразованиями Меллина, естественно возникающими при изучении аппроксимационных задач типа задачи Мюнца.

В настоящей статье, непосредственно дополняющей работу [1], мы рассмотрим ряд отличных от принятых в [1] ситуаций для подобных теорем единственности; это позволит, в частности, произвести учет величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в задаче Мюнца и в тех случаях, когда допустимый рост коэффициентов оказывается более медленным, чем указанный в [1].

Известна следующая теорема ([3], стр. 19).

Пусть $g(x)$ — функция ограниченной вариации на $(-\infty, +\infty)$, постоянная вне некоторого конечного интервала. Если (C, a) — наименьший интервал, вне которого $g(x)$ постоянна, то для преобразования Лапласа

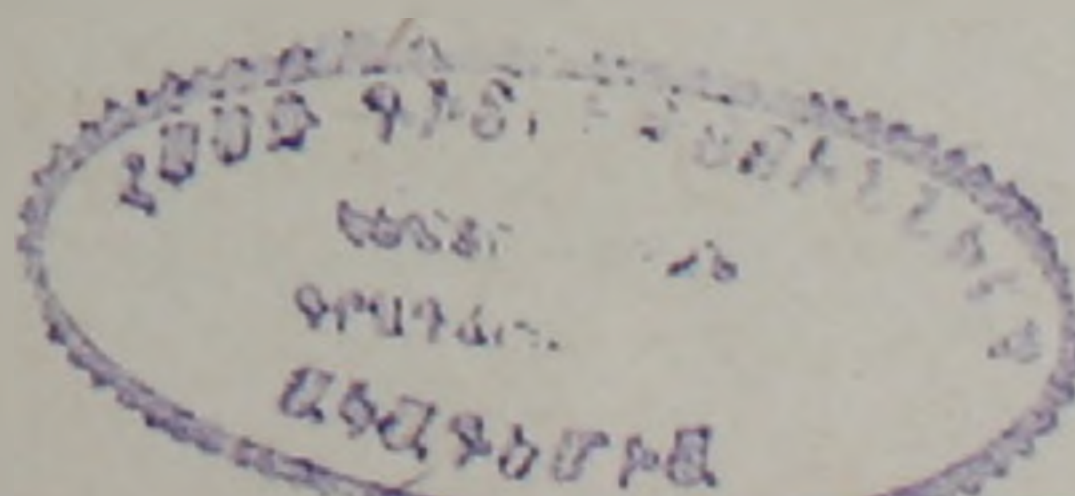
$$F(z) = \int_c^a e^{zt} dg(t)$$

имеем

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln F(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln [F(x)]}{x} = c, \quad (1)$$

(x — вещественное).

Мы дадим сейчас обобщение этой теоремы для распределений масс на некоторых компактах и получим отсюда соответствующее предложение для преобразований Меллина. Наше изложение будет связано с первым из пределов (1).



Пусть E — какое-то замкнутое множество в конечной комплексной плоскости, не обязательно ограниченное и, следовательно, не обязательно компактное, μ — комплексная бэровская мера на E с конечной вариацией.

Рассмотрим обобщенное преобразование Лапласа–Стилтьеса:

$$E(z) = \int_E e^{uz} d\mu(u). \quad (2)$$

Предположим, что

$$a = \sup_{u \in E} \operatorname{Re} u < +\infty. \quad (3)$$

Тогда при $z = x > 0$ $|e^{ux}| \leq e^{ax}$ и интеграл (2) абсолютно сходится, причем

$$|F(x)| \leq Ce^{ax}, \quad C = \int_E |d\mu|. \quad (4)$$

Из (4) следует, что

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(x)|}{x} \leq a. \quad (5)$$

Обозначим последний $\overline{\lim}$ через A :

$$A = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln F(x)}{x} \leq a. \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть Ω_A — открытое множество, определяемое равенством

$$\Omega_A = \{z: \operatorname{Re} z > A\} \setminus E, \quad (7)$$

$$E_A = \{z: \operatorname{Re} z > A\} \cap E. \quad (8)$$

Предположим, что Ω_A — связно, т. е. является областью и граница $\partial\Omega_A$ области Ω_A содержит E_A .

Тогда вариация меры μ по множеству E_A равна нулю

$$\int_{E_A} |d\mu| = 0. \quad (9)$$

Заметим, что теорема, цитированная нами в начале этого параграфа, является частным случаем вышеуказанного результата, когда $E \subset (-\infty, \infty)$.

Доказательство. Рассмотрим обращение преобразования (2)

$$\Phi(\zeta) = \int_0^\infty e^{\zeta x} F(x) dx. \quad (10)$$

Интеграл (10) абсолютно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta > A$. Действительно, для точки ζ , $\operatorname{Re} \zeta > A$. Возьмем $\varepsilon > 0$, $A + \varepsilon < \operatorname{Re} \zeta$. В силу (6) имеет место неравенство

$$F(x) \leq C e^{(A+\varepsilon)x}, \quad x > 0, \quad (11)$$

с некоторым $C > 0$. Поэтому

$$\int_0^\infty |e^{-x\zeta}| |F(x)| dx \leq C \int_0^\infty e^{-x(\operatorname{Re} \zeta - (A+\varepsilon))} dx$$

и абсолютная сходимость выяснена. Ясно также, что $\Phi(\zeta)$ аналитична в указанной полуплоскости. Далее

$$\Phi(\zeta) = \int_0^\infty e^{-x\zeta} dx \int_E e^{ux} d\mu(u) = \int_0^\infty dx \int_E e^{x(u-\zeta)} d\mu(u). \quad (12)$$

В полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta > a$ получаем

$$\int_0^\infty dx \int_E |e^{x(a-\operatorname{Re} \zeta)}| |d\mu(u)| \leq \int_E |d\mu(u)| \int_0^\infty e^{x(a-\operatorname{Re} \zeta)} dx < \infty. \quad (13)$$

Значит в указанной полуплоскости повторный интеграл абсолютно сходится и можно переставить пределы (теорема Фубини). Получаем

$$\Phi(\zeta) = \int_E d\mu(u) \int_0^\infty e^{-x(\zeta-u)} dx \int_E \frac{d\mu(u)}{\zeta-u}. \quad (14)$$

Представление (14) выведено нами в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta > a > A$. Но совершая аналитическое продолжение, получим, что то же представление будет иметь место и в области Ω_A . При этом, как было доказано выше, функция $\Phi(\zeta)$ аналитична не только в Ω_A , но и в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta > A$. Чтобы завершить доказательство теоремы, воспользуемся следующей теоремой из работы [2] (теорема 8).

Теорема (*). Пусть ε — компакт и μ — некоторая бэровская комплексная мера на ε . Положим:

$$c_n = \int_\varepsilon z^n d\mu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и пусть

$$R = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} > 0.$$

Положим

$$Q = \{z: |z| > R\} \setminus \varepsilon$$

и

$$\varepsilon_1 = \{z: |z| > R\} \cap \varepsilon.$$

Если Q — область, т. е. является связным множеством и ε_1 полностью входит в состав границы Q , то на ε_1 мера μ отсутствует

$$\int_{\varepsilon_1} |d\mu| = 0.$$

Отобразим полуплоскость $\operatorname{Re} u \leq A$ на единичный круг $|t| \leq 1$

$$t = \frac{u - A + 1}{u - A - 1}. \quad (15)$$

При отображении (15) множество E перейдет в компакт ε , E_A в ε_1 , причем ε_1 — вне единичного круга, точка ζ в точку

$$z = \frac{\zeta - A + 1}{\zeta - A - 1}$$

и интеграл (14) преобразуется следующим образом:

$$\varphi(z) = \Phi(\zeta) = (z - 1) \int_{\varepsilon} \frac{2d\nu(t)(t-1)}{t-z}, \quad (16)$$

где $d\nu(t)$ — пересажженная с помощью отображения (15) на ε мера $d\mu$. Положим $d\nu_1(t) = (t-1)d\nu(t)$ и рассмотрим интеграл типа Коши

$$\psi(z) = \int_{\varepsilon} \frac{d\nu_1(t)}{t-z}. \quad (17)$$

В силу свойств $\Phi(\zeta)$, $\psi(z)$ аналитична вне круга $|z| \leq 1$, причем относительно части ε_1 множества ε , лежащей вне единичного круга, выполнены условия теоремы (*).

Если положить

$$c_n = \int_{\varepsilon} t^n d\nu_1, \quad (18)$$

то аналитичность интеграла (17) при $|z| > 1$ равносильна тому, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 1. \quad (19)$$

Поэтому, применяя теорему (*), заключаем, что вариация ν на ε_1 равна нулю. Теорема доказана.

Замечание 1. Доказательство было проведено для $A > -\infty$. В случае $A = -\infty$ теорема также верна, в этом случае условия на Q_A и E_A сводятся к тому, что E не разбивает плоскость и нигде не плотна. Доказательство теоремы в этом случае отличается от проведенного сейчас некоторыми не очень существенными деталями. Это доказательство содержится по существу в доказательстве теоремы 7 работы 1. Заметим также, что получить результат для $A = -\infty$ из разобранного здесь случая $A > -\infty$ предельным переходом нельзя.

Нетрудно построить такое E , которое не разбивает плоскость и нигде не плотно, но при любом $A > -\infty$ не выполняются требуемые в теореме 1 условия относительно $\mathfrak{Q}_A$ и E_A .

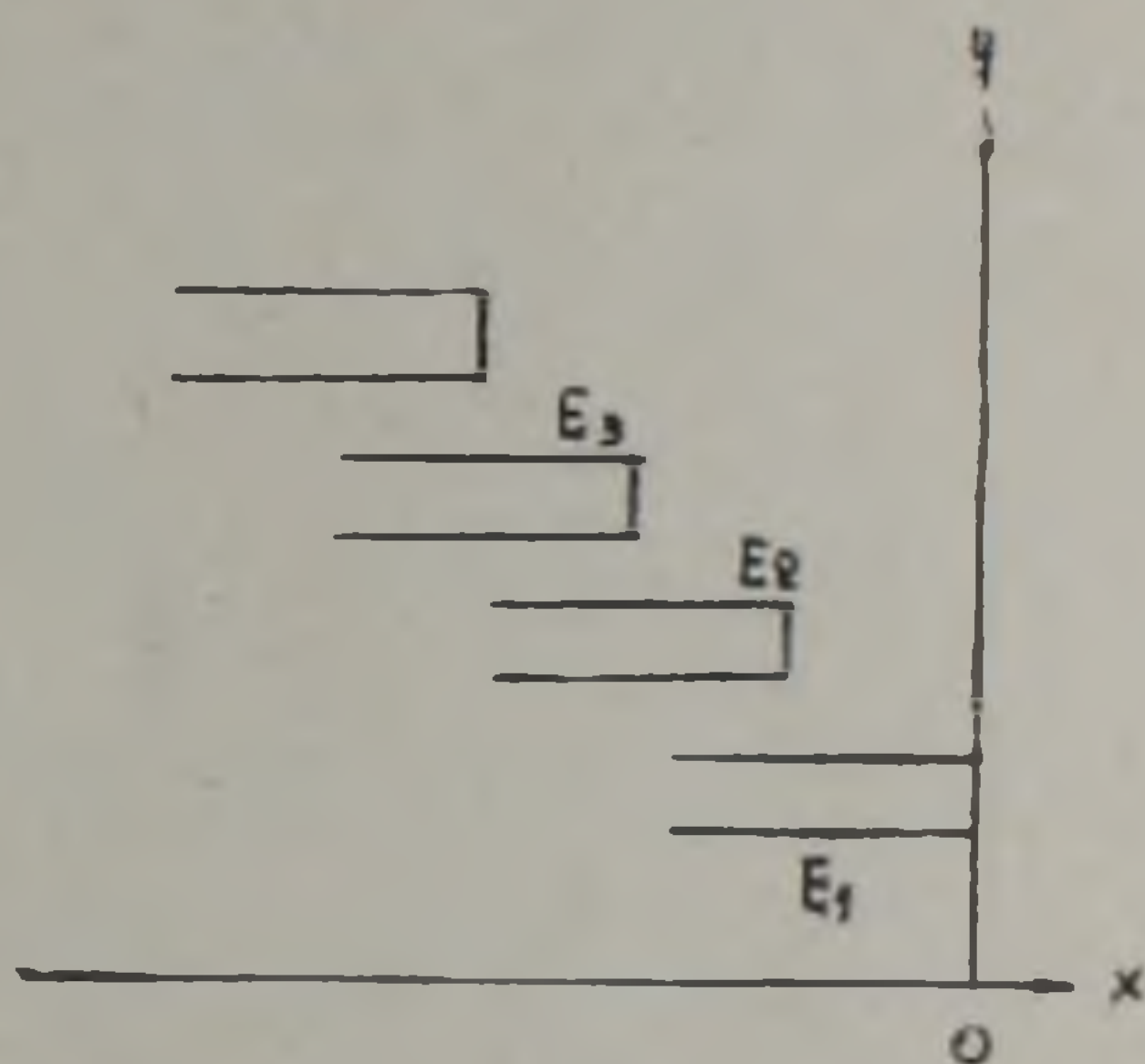
Приведем соответствующий пример. Построим множества E_n , $n = -1, -2, \dots$ следующим образом:

$$E_n^1 = [x + i|n|, n - 1 \leq x \leq n + 1],$$

$$E_n^2 = \left\{ x + i \left(|n| + \frac{1}{2} \right), n - 1 \leq x \leq n + 1 \right\},$$

$$E_n^3 = \left\{ n + 1 + iy, |n| \leq y \leq |n| + \frac{1}{2} \right\},$$

$$E_n = E_n^1 \cup E_n^2 \cup E_n^3.$$



Если положить теперь $E = \bigcup E_n$, то E — замкнутое множество, не разбивает плоскость и однако при любом $A < 0$ множества $\mathfrak{Q}_A$ и E_A , задаваемые формулами (7) и (8), не таковы, как это требует теорема 1.

Обозначим через $S_\mu \subset E$ замкнутый носитель меры μ , совокупность точек роста меры. Положим

$$a_0 = \sup_{\mu \in S_\mu} \operatorname{Re} \mu. \quad (20)$$

Очевидно, $a_0 \leq a$ (в теореме 1 достаточно было предполагать $a_0 < +\infty$).

Следствие. В условиях теоремы 1

$$A = a_0. \quad (21)$$

Действительно, по доказанному $a_0 \leq A$. С другой стороны, неравенства (4) и (5), где, очевидно, можно заменить a на a_0 , показывают, что $A \leq a_0$.

Пусть Γ — компакт конечной комплексной плоскости. Будем считать, что устройство Γ позволяет выделить на $\Gamma \setminus \{0\}$ однозначную ограниченную ветвь функции $\arg t$, и пусть

$$b = \sup_{t \in \Gamma \setminus \{0\}} |\arg t| < +\infty, \quad (22)$$

$$a = \sup_{t \in \Gamma} \ln |t|, \quad c = \inf_{t \in \Gamma} \ln |t|. \quad (23)$$

Пусть μ — бэровская мера на Γ ; рассмотрим функцию

$$\Gamma(z) = e^{z \ln t} d\mu(t) = \int t^z d\mu \quad (24)$$

преобразование Меллина (обобщенной меры) μ ; в случае $0 \in \Gamma$ полагаем $\mu\{0\} = 0$ (ср. [1]).

Теорема 2. Пусть Γ — компакт, удовлетворяющий условию (22), μ — комплексная бэровская мера на Γ , $F(z)$ — преобразование Меллина (24) для μ . Пусть

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(x)|}{x} = A. \quad (25)$$

(Очевидно, $A \leq a = \sup_{t \in \Gamma} \ln |t|$). Обозначим

$$Q_A = \{t: \ln |t| > A\} \setminus \Gamma, \\ \Gamma_A = \{t: \ln |t| > A\} \cap \Gamma, \quad (26)$$

и предположим, что Q_A связно и граница области Q_A содержит Γ_A . Тогда

$$\int_{\Gamma_A} |d\mu| = 0.$$

Теорема 2 немедленно следует из теоремы 1, если сделать замену переменного $u = \ln t$. Относительно случая $A = -\infty$, здесь можно сказать то же, что в предыдущей теореме.

Дальнейшие формулировки будем ради краткости приводить лишь для преобразований Меллина. Будем сейчас считать $c > -\infty$.

Теорема 3. Пусть компакт Γ удовлетворяет условию (22), не разбивает плоскости и не имеет внутренних точек, а последовательность комплексных точек $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{z_n} = D \geq 0, \quad (27)$$

$$\pi D > b, \quad (28)$$

$$|z_n - z_m| \geq (n - m) d, \quad d > 0. \quad (29)$$

Если для преобразования Меллина (24)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(z_n)|}{|z_n|} < c, \quad (30)$$

то $F(z) \equiv 0$ и мера $\mu \equiv 0$. В то же время существуют функции вида (24) такие, что для любой последовательности $\{z_n\}$, для которой $z_n \rightarrow \infty$, $\arg z_n \rightarrow 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(z_n)|}{|z_n|} = c. \quad (31)$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что случай $c = -\infty$ ($0 \in \Gamma$) рассмотрен нами ранее — в теореме 7 работы [1]. Согласно известным теоремам В. Бернштейна—Н. Левинсона ([3], [4]) имеем

$$A = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln |F(x)|}{x} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(z_n)|}{|z_n|}.$$

Применимость этих теорем для нашего преобразования Меллина легко проверяется, см. [1]. Условия на $\mathcal{Q}_A$ и Γ_A из теоремы 2 очевидно выполнены, ибо $A < c$.

Возьмем теперь $t_0 \in \Gamma$, $\ln |t_0| = c$ и рассмотрим функцию

$$F(z) = t_0^z = e^{z[c + i \arg t_0]}.$$

Для этой функции имеет место (31).

Обозначим через Γ^c множество (c из (23))

$$\Gamma^c = \{t \in \Gamma: \ln t = c\}. \quad (32)$$

Теорема 4. Пусть $\{z_n\}$ — такая же, как в теореме 3,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(z_n)|}{|z_n|} \leq c, \quad (33)$$

$$\int_{\Gamma^c} |d\mu| = 0, \quad (34)$$

и выполнены условия теоремы 2 относительно Q_c и Γ_c ($A = c$). Тогда $\mu \equiv 0$.

Действительно, по теореме 2

$$\int_{\Gamma \setminus \Gamma^c} |d\mu| = 0.$$

Так как имеет место и 33, то

$$\int_{\Gamma} |d\mu| = 0,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что геометрические условия в теоремах 3 и 4 различны. Используя конструкцию, близкую к описанной в замечании 1, легко построить компакт Γ , не разбивающий плоскость и нигде не

плотный, но такой, что при любом $A > c$ условия теоремы 4 не выполнены. С другой стороны, окружность радиуса e^c с присоединенным прямолинейным отрезком удовлетворяет условиям теоремы 4, но не 3.

Для случая, когда Γ расположен на луче, последние два результата можно несколько улучшить.

Теорема 5. Пусть Γ лежит на некотором луче, выходящем из начала координат. Пусть последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\arg z_n \rightarrow 0, \quad (35)$$

$$|z_n - z_m| \geq |n - m| d, \quad d > 0, \quad (36)$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{|z_n|} = \infty. \quad (37)$$

Если для функции $F(z)$ вида (24) имеет место (30) (может быть и $c = -\infty$), то $F(z) \equiv 0$ и $\mu \equiv 0$. То же заключение сохраняется, если выполнены (33) и (34).

Замечание 2. Условия (26) и (27) всегда влекут расходимость ряда (37). Теперь же мы заменяем условие (27) более слабым условием (37). Заметим также, что при $c = -\infty$ теоремы 5 и 6 работы [1] дают более сильный результат.

Доказательство. Если компакт лежит на луче $\arg t = \theta \neq 0$, то при помощи функции

$$t = t' e^{i \arg t} = t' e^{i\theta}, \quad t \in \Gamma, \quad t' \in [0, \infty]$$

можно отобразить Γ на положительную ось (см. [1], теорема 5). Поэтому достаточно рассмотреть случай $\Gamma \subset (0, \infty)$.

В этом случае

$$F(iy) = \int_{\Gamma} t^{iy} d\mu = O(1) \quad (38)$$

и можно воспользоваться теоремой XXXVII на стр. 107 из [4].

Замечание 3. Следует указать, что в цитированной теореме из книги [4] кроме условий (27), (28) указано еще условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{z_n} \geq 0, \quad (39)$$

которого у нас нет. Возможность обойтись без этого условия была отмечена без доказательства в работе Боаса, хотя в более поздней его книге [3] это условие вновь появилось. Можно доказать, что если последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям (35), (36), (37), то из нее можно выбрать подпоследовательность $z_{n_1}, z_{n_2}, \dots, z_{n_j}, \dots$ с возможной перенумерацией, такую, что

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{n_l}|} = \infty, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{i}{z_{n_l}} = 0. \quad (40)$$

Это было отмечено в нашей диссертации [6]; см. также [7], стр. 605 и след.

В работе А. Ф. Леонтьева [7] была доказана следующая весьма глубокая

Т е о р е м а. Пусть E — конечная аналитическая дуга, удовлетворяющая условию: угол между касательной к E в любой точке и вещественной осью по абсолютной величине меньше $\frac{\pi}{4}$. Пусть последовательность $\{z_k\}$, $z_k > 0$, удовлетворяет условиям:

$$z_{k+1} - z_k \geq h > 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z_k} = \infty.$$

Тогда для преобразования Лапласа меры μ , $S(\mu) \subseteq E$ имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |F(z_n)|}{z_n} = a_0$$

$$(a_0 = \sup \operatorname{Re} S(\mu)).$$

Формально наша теорема 5 не содержится в этом результате, так как у нас z_k — комплексные. Нам показалось полезным провести непосредственное доказательство теоремы 5, так как оно много проще рассуждений из [7].

Отметим в качестве следствий из теорем 1—5 несколько ранее полученных различными математиками результатов.

С л е д с т в и е 2. (Боас [5]). Пусть $f(t)$ — интегрируемая на $[z, \beta]$, $0 \leq \alpha < \beta$ функция, $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы 5 и

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| \int_{\alpha}^{\beta} t^{z_n} f(t) dt \right|}{|z_n|} \leq \ln z, \quad (41)$$

тогда $f(t) \equiv 0$ почти везде.

Это просто частный случай теоремы 5, когда мера μ — абсолютно непрерывная относительно лебеговой.

С л е д с т в и е 4. (Микусинский [8]). Если

$$\int_{\alpha}^{\beta} t^{n z} f(t) dt = O(\alpha + \varepsilon)^n \quad (42)$$

при $\forall \varepsilon > 0$, то $f(t) \equiv 0$ почти везде.

Здесь $z_n = nd$, (42) влечет (41).

Следствие 4. (Лерх [9]). Если $(\alpha > 0)$

$$\int_a^{\beta} t^{\alpha} f(t) dt = 0, \quad n=1, 2, \dots, \quad (43)$$

то $f(t) \equiv 0$ почти везде.

Следствие 5. (Рыль-Нарджевский [10]). Пусть Γ — спрямляемая кривая, имеющая не более одной общей точки с кругом $|z| \leq \rho$, $f(t)$ интегрируемая на Γ функция.

Если

$$\int_{\Gamma} f(t) t^n dt = O(\rho^n), \quad (44)$$

то $f(t) \equiv 0$ почти везде.

В качестве примера использования полученных теорем в вопросах учета величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов приведем следующий результат. (Придерживаемся терминологии из [1], [2]). Добавим к величинам a, b, c из (22) и (23), характеризующим геометрию компакта Γ , величину

$$\beta = \inf_{t \in \Gamma^c} |\arg t|, \quad (45)$$

и пусть

$$\Gamma^c = \{t, t \in \Gamma, \ln t = c\} \quad (c = \inf_{t \in \Gamma} \ln |t|).$$

Рассмотрим вопросы усиленной полноты системы

$$t^{z_1}, t^{z_2}, t^{z_3}, \dots, t^{z_n}, \dots \quad (46)$$

в пространстве $C(\Gamma)$ непрерывных на Γ функций с равномерной метрикой.

Теорема 6. Пусть компакт Γ , удовлетворяющий условию (22), не разбивает плоскость и не имеет внутренних точек, причем $0 \in \Gamma$. Если $\{z_n\}$ — последовательность точек, удовлетворяющая условиям (26), (27), (28), то для $\forall \omega(t) \in C(\Gamma)$, $\forall \delta > 0$ и $\forall \varepsilon > 0$ можно найти $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ такие, что имеют место неравенства

$$\left\| \omega - \sum_1^n \lambda_k t^{z_k} \right\| < \varepsilon, \quad \sum e^{-(c-\delta)(z_j)} |\lambda_j| < \varepsilon. \quad (47)$$

Если последовательность $\{z_n\}$ удовлетворяет условиям

$$z_n = x_n + iy_n \rightarrow \infty, \quad x_n > 0, \quad \frac{|y_n|^2}{x_n} \rightarrow 0 \quad (48)$$

и мы обозначим

$$\delta_n = \frac{|y_n|}{x_n} \rightarrow 0, \quad (49)$$

то существует функция $\omega(t) \in C(\Gamma)$, для которой при любых $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ не могут одновременно иметь места неравенства

$$\left\| \omega(t) - \sum_1^n \lambda_k t^k \right\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \sum_1^n e^{(c + \beta_0 j) |z_j|} \|\lambda_j\| < \varepsilon. \quad (50)$$

Доказательство. Возьмем линейный функционал $l(\varphi)$ над $C(\Gamma)$ и рассмотрим преобразование Меллина $F(z)$ для меры μ , представляющий этот функционал.

Проверка полноты системы (46) в $C(\Gamma)$, описываемой неравенствами (47), согласно изложенной в [1], [2] теории приводит к неравенствам

$$|l(t^{z_j})| = |F(z_j)| \leq e^{(c - \delta) |z_j|}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (51)$$

из которых должно следовать, что $l \equiv 0$. Но (51) дают

$$\overline{\lim}_{z_j} \frac{\ln |F(z_j)|}{|z_j|} \leq c - \delta < c \quad (52)$$

и $l \equiv 0$. Следовательно, по теореме 3, $\mu \equiv 0$. А это означает в силу теоремы 3 [2], что система (46) полна в смысле (47).

Рассмотрим теперь точку $t_0 \in \Gamma$, $\ln |t_0| = c$, $|\arg t_0| = \beta$ и сосредоточим в этой точке меру $\mu > 0$, массу которой определим позднее. Преобразование Меллина для μ имеет вид

$$F(z) = \mu e^{z(c + i\beta)}$$

и

$$|F(z_j)| = \mu e^{cx_j - l\beta y_j} \leq \mu e^{x_j(c + \beta_0 j)}. \quad (53)$$

Так как

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{e^{x_j(c + \beta_0 j)}}{e^{l z_j |c + \beta_0 j|}} &= \lim_{j \rightarrow \infty} e^{(c + \beta_0 j)(x_j - \sqrt{x_j^2 + y_j^2})} = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} e^{(c + \beta_0 j) \frac{1}{2} x_j \frac{|y_j|^2}{x_j^2}} = 1, \end{aligned}$$

то при достаточно малом μ будут, хотя $l \neq 0$, выполняться неравенства

$$|l(t^{z_j})| = |F(z_j)| \leq e^{(c + \beta_0 j) |z_j|} \quad (54)$$

и, следовательно, для системы (46) не имеет места (50) в силу теорем из [1], [2].

Օ. Ա. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ. Միակության որոշ բեռեմների և Մյունցի խնդրի մեջ մոտարկող բազմանդամների գործակիցների մեծության վերաբերյալ (ամփոփում)

Աշխատանքում ուսումնասիրված են միակության բեռեմների համար մի շարք իրավիճակներ, որոնք տարբեր են [1]-ում ընդունվածներից: Կատարված է Մյունցի խնդրում մոտարկող ադրեգատների գործակիցների հաշվարկ նաև այն դեպքում, երբ գործակիցների բույլատրելի աճը ավելի դանդաղ է, քան [1]-ում:

O. A. MURADIAN. *On some uniqueness theorems and the values of coefficients of approximating aggregates in the Müntz problem (summary)*

This paper studies some situations different from those in the theorems on uniqueness. The magnitude of coefficients of approximating aggregates in Müntz problem is taken into account as well as the cases when the admissible rate of growth of coefficients appears to be lower than that of [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Օ. Ա. Մուրադյան. О росте коэффициентов аппроксимирующих агрегатов в теореме Мюнца, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика“, VIII, № 1, 1973, 70—87.
2. С. Я. Хавинсон. О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика“, VI, №№ 2—3, 1971, 221—234.
3. R. P. Boas. Entire functions, New York, 1954.
4. N. Levinson. Gap and density theorems, New York, 1941.
5. R. P. Boas. Remarks on a moment problem, *Studia Math.*, 13, 1952, 59—61.
6. Օ. Ա. Մուրադյան. Диссертация, КГУ, 1975.
7. А. Ф. Леонтьев. О росте целой функции экспоненциального типа на последовательности точек, Матем. сб., 96, 138, № 4, 1975, 601—613.
8. J. G. Mikusinski. A theorem on moments, *Studia Math.*, 12, 1951, 191—193.
9. M. Lerch. Sur un point de la theorie des fonctions generatrices d'Able, *Acta Math.*, 27, 1903, 339—352.
10. C. Ryll-Nardzewski. Certains theorems des moments, *Studia Math.*, 12, 1951, 225—226.