ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 6, 1977 Математика

С. О. СИНАНЯН

О КВАЗИАНАЛИТИЧНОСТИ, ПОРОЖДЕННОЙ МЕТРИКОЙ ПРОСТРАНСТВА L^p

§ 2. Введение

Пусть E — нигде не плотный компакт на комплексной плоскости, $C(E)$ — пространство непрерывных на E функций с равномерной метрикой, $R(E)$ — подпространство, порожденное аналитическими на E функциями (или, что то же самое, рациональными функциями, полюса которых лежат вне E). А. Г. Витушкином было получено необходимое и достаточное условие на E для того, чтобы $R(E) = C(E)$ ([1]).

Когда $R(E) \neq C(E)$ естественно ожидать, что некоторые свойства аналитических функций (при дополнительных ограничениях на множество E) могут передаваться функциям из $R(E)$.

Здесь рассматривается свойство единственности аналитических функций: из обращения в нуль на некоторой (произвольной) порции множества E функции $f \in R(E)$ следует равенство нулю такой функции на E. Чтобы $R(E)$ оказалось носителем свойства единственности, E должно быть в некотором смысле достаточно „массивным" множеством (для компенсации отсутствия внутренних точек).

Существование такого примера следует из работ М. В. Келдыша. По предложению С. Н. Мергеляна аналогичный (более сильный) пример был построен в интегральной метрике ([3]). В некотором смысле точный пример был построен А. А. Гончаром ([2]).

Через $L_p(E)$, $p \geqslant 1$, обозначим банахово пространство заданных на E измеримых комплекснозначных функций с конечной нормой:

$$\left\{ \int\limits_E |f(z)|^p \, dm(z) \right\}^{1/p},$$

где m — плоская мера Лебега.

$R_p(E)$ — подпространство, полученное при замыкании множества аналитических на E функций (или, что то же самое, рациональных функций, полюса которых лежат вне E). При $1 \leqslant p < 2$ всегда $R_p(E) = L_p(E)$ ([3]).

В работах [4], [2] имеется описание нигде не плотных компактов E, для которых $R_p(E) = L_p(E)$, $p \geqslant 2$. Если $R_p(E) \neq L_p(E)$, $p > 2$, то свойство единственности аналитических функций (при дополнительных ограничениях на множество E) может быть „унаследовано" функциями из $R_p(E)$, $p \geqslant 2$ ([3]). Отсюда как следствие получается, что функции из $R(E)$ также обладают свойством единственности. Для $R_p(E)$, $p \geqslant 2$, Бреннан получил более сильный результат ([5]).

Таким образом, указанное свойство единственности непосредственно не привязано к свойству непрерывности функций и к равномерной метрике.

В работе рассматривается более общая метрика, которая в состоянии сохранить свойство единственности аналитических функций.

Пусть $\psi(z) > 0$ почти всюду на E, $\psi \in L_1(E)$. Через $L^p(\psi)$, $p \geqslant 1$, обозначим банахово пространство заданных на E измеримых комплекснозначных функций с конечной нормой:

$$\|f\|_p = \left\{\int_E |f(z)|^p \cdot \psi(z)\, dm(z)\right\}^{1/p},$$

$R^p(\psi)$ — подпространство, полученное замыканием множества аналитических на E функций (или, что то же самое, рациональных функций, полюса которых лежат вне E). Будет доказано, что при естественном ограничении на функцию ψ, метрика этого пространства в состоянии передать свойство единственности.

§ 2. Построение множества единственности

Пусть функция $\psi_1 > 0$ почти всюду на единичном квадрате $\Delta = \{z\colon\ 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1;\ 0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1\}$. Кроме этого $\psi_1 \in L_1(\Delta)$ и

$$\int_\Delta \log \psi_1(z)\, dm(z) > -\infty. \tag{1}$$

Теорема. *Существует такое нигде не плотное компактное множество E, $E \subset \Delta$, что функции из $R^2(\psi)$, где ψ — сужение функции ψ_1 на E, обладают свойством единственности аналитических функций: из обращения в нуль произвольной функции $f \in R^2(\psi)$ на некоторой порции множества E следует, что $f = 0$.*

1°. Построение множества E. Рассмотрим последовательность нечетных натуральных чисел: $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. В дальнейшем на эту последовательность будет наложен ряд ограничений. Положим $N_k = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$, $k = 1, 2, 3, \cdots$. Разделим квадрат Δ параллельными к сторонам прямыми на n_1^2 равных квадратов (первого ранга). Обозначим полученный центральный открытый квадрат через $\Delta_1^{(1)}$, а остальные квадраты через $\delta_i^{(1)}$, $1 \leqslant i < N_1^2$. Каждый из квадратов $\delta_i^{(1)}$ в свою очередь разделим параллельными к сторонам прямыми на n_2^2 равных квадратов (второго ранга). Центральный в $\delta_i^{(1)}$ открытый квадрат обозначим через $\Delta_i^{(2)}$, а все остальные квадраты (второго ранга) — через $\delta_j^{(2)}$, $1 \leqslant j < N_2^2$. Пусть квадраты k-го ранга $\delta_p^{(k)}$, $\Delta_j^{(k)}$; $1 \leqslant p < N_k^2$, $1 \leqslant j < N_{k-1}^2$, уже построены. Разделим каждый из квадратов $\delta_p^{(k)}$, $1 \leqslant p < N_k^2$, параллельными к сторонам прямыми на n_{k+1}^2 равных квадратов. Полученный в $\delta_p^{(k)}$ центральный открытый квадрат обозначим через $\Delta_p^{(k+1)}$, а остальные квадраты ($(k+1)$-го ранга) — через $\delta_j^{(k+1)}$, $1 \leqslant j < N_{k+1}^2$. Продолжая этот процесс, получим последовательность открытых квадратов $\{\Delta_i^{(k)}\}$. Определим

$$E = \Delta \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l} \Delta_l^{(k)} \right). \tag{2}$$

2°. Пусть $f \in R^2(\psi)$, а $\{R_\varepsilon(z)\}$ — последовательность рациональных функций, полюса которых лежат вне E и удовлетворяют условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_E |f(z) - R_\varepsilon(z)|^2 \cdot \psi(z)\, dm(z) = 0. \tag{3}$$

$R(z)$ можно представить в виде

$$R(z) = R_\varepsilon(z) = P(z) + \sum_{k=j}^{M} \sum_{l} R_{k,l}(z),$$

где $R_{k,l}(z)$ — сумма простейших рациональных дробей с единственным полюсом в центре квадрата $\Delta_l^{(k)}$, $P(z)$ — многочлен. Можно считать, что

$$\frac{B}{4} < \int_E |R_\varepsilon(z)|^2\, \psi(z)\, dm(z) < B,$$

где

$$B = 2 \cdot \int_E |f(z)|^2 \cdot \psi(z)\, dm(z).$$

Предполагается, что функция f равна нулю на некоторой порции множества E. Нужно доказать (при некоторых ограничениях на последовательность $\{n_k\}$), что $f = 0$.

Основная схема доказательства состоит в следующем: сумма простейших дробей высших рангов мала за исключением множества малой площади. Остальная часть рациональной функции $R_\varepsilon(z)$ близка к нашей функции и аналитична на конечносвязной области. Коридоры этой области достаточно широки (в сравнении с кривой, соединяющей две произвольные точки области), поэтому малость функции на части области передается на всю область.

§ 3. Основные леммы

3°. Дальнейшие оценки основаны на следующих двух леммах. Эти леммы получаются с помощью классической теоремы Сегё.

Теорема Сегё. Пусть $d\theta$ — линейная мера Лебега на единичной окружности $|z| = 1$ и $h \in L^1(d\theta)$, $h \geqslant 0$. Через A_0 обозначим множество аналитических на единичном круге функций, которые обращаются в нуль в начале координат. Тогда расстояние от единичной функции до A_0 задается формулой

$$\inf_{f \in A_0} \frac{1}{2\pi} \int |1 - f|^p \cdot h\, d\theta = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int \log h\, d\theta \right\}.$$

Обозначим через $K(\zeta, r)$ круг $\{z : |z - \zeta| < r\}$.

Лемма 1. *Пусть ψ — почти всюду положительная на кольце $\sigma = \{z: R_0 < |z| < R\}$ функция, удовлетворяющая условиям*

$$\psi \in L_1(\sigma); \quad \int_\sigma \log \psi(z)\, dm(z) > -\infty.$$

Тогда для произвольной аналитической в круге функции, обращающейся в нуль в некоторой точке круга $K(0, R_0)$, имеет место неравенство

$$\int_\sigma |1-f|^p \psi\, dm \geqslant \frac{1}{C}, \quad \text{где } 0 < p < \infty,$$

$$\frac{1}{C} = \pi \int_{R_0}^{R} (r-R_0)\cdot \exp\left\{-\frac{1}{\pi(r-R_0)}\cdot \int_{|z|=r} |\log \psi(z)|\cdot|dz|\right\} dr. \tag{4}$$

Доказательство. Имеем

$$\int_\sigma |1-f|^p \psi\, dm = \int_{R_0}^{R} dr \int_{|z|=r} |1-f(z)|^p \cdot \psi(z)\,|dz|.$$

Функция $w = \dfrac{r\cdot(z-\zeta)}{r^2-\bar\zeta\cdot z}$ конформно отображает круг $K(0, r)$ в единичный круг $K(0, 1)$ так, что точка $z=\zeta$ переходит в $w=0$. Обратным будет отображение $z = \dfrac{r(rw+\zeta)}{r+\bar\zeta\cdot w}$. Для производных

$$\frac{dz}{dw} = \frac{r\cdot(r^2-|\zeta|^2)}{(r+w\bar\zeta)^2}, \quad \frac{dw}{dz} = \frac{r(r^2-|\zeta|^2)}{r^2-\bar\zeta\cdot z}$$

имеем оценки

$$\left|\frac{dz}{dw}\right| > \frac{r-R_0}{2} \quad \text{при} \quad |w|=1,$$

$$\left|\frac{dw}{dz}\right| < \frac{2}{r-R_0} \quad \text{при} \quad |z|=r.$$

Благодаря этим оценкам и теореме Сегё, имеем

$$\int_{|z|=r} |1-f(z)|^p\cdot\psi(z)\,|dz| = \int_{|w|=1} |1-\tilde f(w)|^p \cdot \psi\left(\frac{r(rw+\zeta)}{r+\bar\zeta\cdot w}\right)\cdot\left|\frac{dz}{dw}\right|\cdot|dw| >$$

$$> \frac{r-R_0}{2}\cdot\int_0^{2\pi} |1-\tilde f(e^{i\theta})|^p\cdot\psi\left(\frac{r(re^{i\theta}+\zeta)}{r+\bar\zeta\cdot e^{i\theta}}\right) d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \pi(r-R_0)\cdot\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\psi\left(\frac{r(re^{i\theta}+\zeta)}{r+\bar\zeta\cdot e^{i\theta}}\right) d\theta\right\}.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} \log\psi\, d\theta = \int_{|w|=1} \log\psi\left(\frac{r(rw+\zeta)}{r+\bar\zeta\cdot w}\right)|dw| =$$

$$= \int_{|z|=r} \log\psi(z)\cdot\left|\frac{dw}{dz}\right|\cdot|dz| \geqslant -\int_{|z|=r} |\log\psi(z)|\cdot\left|\frac{dw}{dz}\right|\cdot|dz| \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{2}{r-R_0}\cdot\int_{|z|=r} |\log\psi(z)|\cdot|dz|,$$

то получается утверждение леммы.

Лемма 2. *Для произвольной аналитической в круге* $K(0, R)$ *функции имеет место неравенство*

$$|f(\zeta)|^p < C\cdot\int_\sigma |f(z)|^p\cdot\psi(z)\,dm(z), \quad |\zeta|\leqslant R_0. \tag{5}$$

Для доказательства достаточно применить лемму 1 к функции $1-\dfrac{f(z)}{f(\zeta)}$.

§ 4. Дальнейшие оценки

4°. Пусть $M = M(\varepsilon)$ — номер наивысшего ранга квадратов $\Delta_i^{(k)}$, содержащих полюса функции $R_\varepsilon(z)$. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует такое число $M_1 = M_1(\varepsilon) > M$, что

$$\int_{D_{M_1+1}} |R_\varepsilon(z)|^2\psi(z)\,dm(z) < B,$$

где

$$D_m = \Delta\setminus\left(\bigcup_{k=1}^{m-1}\bigcup_i \Delta_i^{(k)}\right).$$

Через $a_{i,k}$ обозначим центр квадрата $\Delta_i^{(k)}$, через $\sigma_{i,k}$ — кольцо, вписанное в $\delta_i^{(k-1)}\setminus\Delta_i^{(k)}$ (с центром в точке $a_{i,k}$) и радиусами $\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot N_k}, \dfrac{1}{2N_{k-1}}$.

Применим лемму 2 к кольцу σ_{i,M_1}, $R=\dfrac{1}{2N_{M_1-1}}$, $R_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot N_{M_1}}$. Получим

$$|R_\varepsilon(\zeta)|^2 < C_{i,M_1}\cdot\int_{\sigma_{i,M_1}} |R_\varepsilon(z)|^2\psi(z)\,dm(z),$$

где

$$\frac{1}{C_{i,M_1}} = \pi\int_{R_0}^{R}(r-R_0)\cdot\exp\left\{-\frac{1}{\pi(r-R_0)}\cdot\int_{|z-a_{i,M_1}|=r}|\log\psi(z)|\cdot|dz|\right\}dr.$$

Из последней оценки следует, что после выбора N_{M_1-1} число N_{M_1} можно выбрать настолько большим, чтобы

$$\int\limits_{\bigcup_i \Delta_i^{(M_1)}} |R_\varepsilon|^2 \psi\, dm < \frac{B}{M_1^2}.$$

Тогда

$$\int\limits_{D_{M_1}} |R_\varepsilon|^2 \psi\, dm < \left(1 + \frac{1}{M_1^2}\right) \cdot B.$$

Многократно повторяя это рассуждение, получим

$$\int\limits_{D_{M+1}} |R_\varepsilon|^2 \psi\, dm < \prod_{k=M+1}^{M_1-1} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \cdot B.$$

Откуда

$$\int\limits_{D_{M+1}} |R_\varepsilon|^2 \psi\, dm < 3 \cdot B. \tag{6}$$

5°. Для наглядности будем пользоваться чертежами 1 и 2.

Правую нижнюю вершину квадрата $\delta_i^{(M-1)}$ обозначим через $z_{i,\, M-1}$ и рассмотрим кольцо $\sigma_i^{(M-1)}$ с центром в этой точке, которое внешним образом касается четырех квадратов $\Delta_j^{(M)}$ (M-го ранга) и не содержит подобные квадраты (чертеж 1). Ширина кольца берется равной $\frac{S_M}{MN_M}$, где $\frac{S_M}{M}$ — целое число, $\left(\frac{S_M}{M \cdot N_M} \gg \frac{1}{N_M}\right)$. Концентрические квадраты $\tilde{\Delta}_i^{(M-1)}$, $\tilde{\tilde{\Delta}}_i^{(M-1)}$ со сторонами $\frac{S_M}{N_M}$, $\frac{S'_M}{N_M}$, соответственно, и S_M выбираются такими, чтобы имело место расположение, указанное на чертеже 2.

$$\Delta_i^{(M)} \subset \tilde{\Delta}_i^{(M-1)} \subset \tilde{\tilde{\Delta}}_i^{(M-1)} \subset \delta_i^{(M-1)}, \quad 1 \leqslant i < N_{M-1}^2,$$

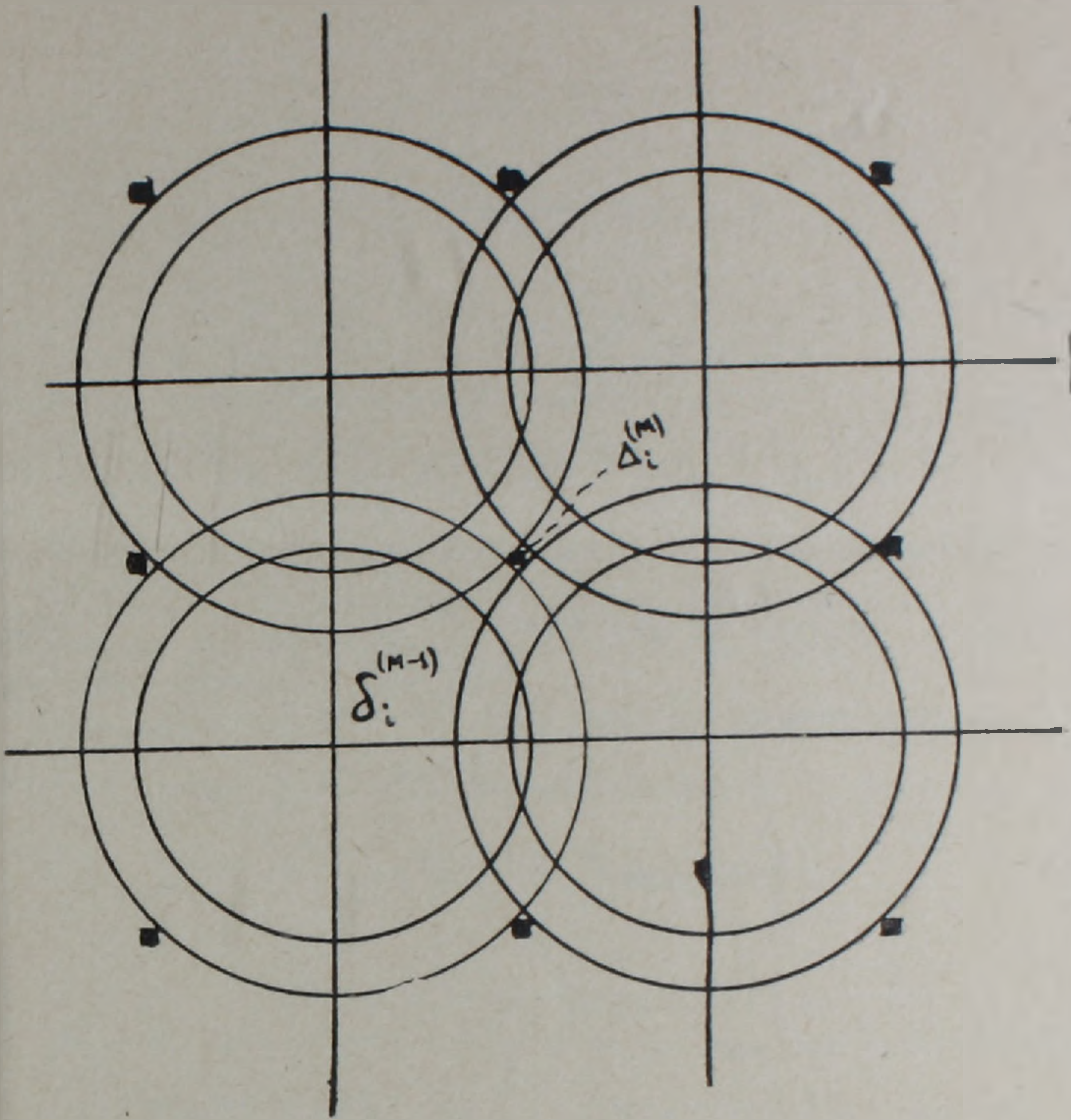
$$\frac{S_M}{N_M} \ll \frac{1}{N_{M-1}}, \; S'_M \gg S_M.$$

Согласно лемме 2 для ζ, принадлежащей кругу, окруженному кольцом $\sigma_i^{(M-1)}$, имеем

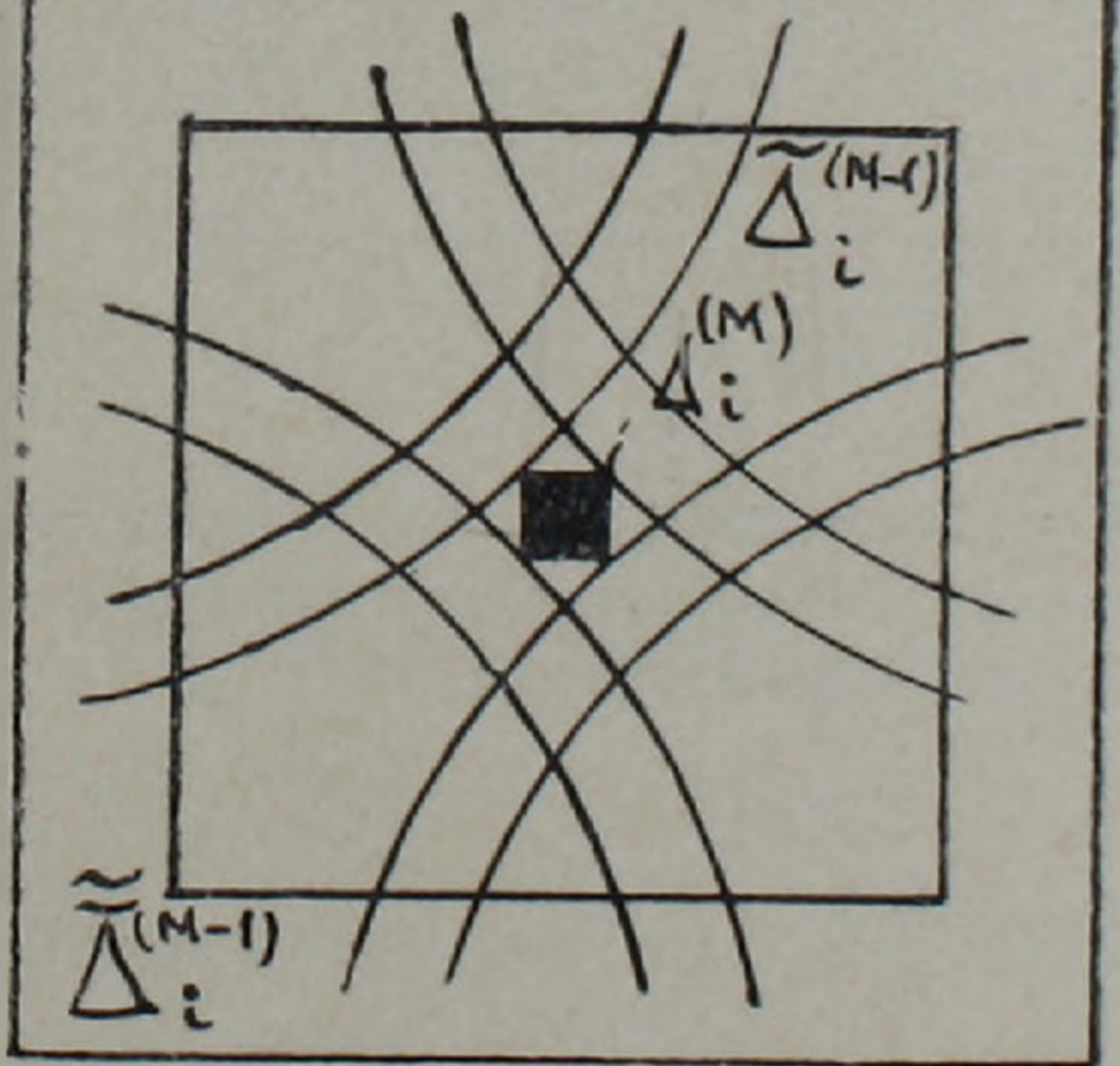
$$|R_\varepsilon(\zeta)|^2 < C_i^{(M-1)} \cdot \int\limits_{\sigma_i^{(M-1)}} |R_\varepsilon|^2 \psi\, dm < C_{M-1} \cdot B,$$

где $C_{M-1} = 3 \cdot \sup_i C_i^{(M-1)}$ определяется числами N_{M-1} и S_M. Можно считать, что $\zeta \in \Delta \setminus \bigcup_j \tilde{\Delta}_j^{(M)}$. Из формулы

$$R_{M,\, i}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial \tilde{\Delta}_i^{(M)}} \frac{(R(t))}{t - z}\, dt$$



Чертеж 1.



$$\Delta_i^{(M)} \subset \tilde{\Delta}_i^{(M-1)} \subset \tilde{\tilde{\Delta}}_i^{(M-1)} \subset \delta_i^{(M-1)}$$

Чертеж 2.

для

$$z \in \Delta \setminus \bigcup_j \tilde{\Delta}_i^{(M)}$$

имеем

$$|R_{M,\,i}(z)| < \frac{C_{M-1}\cdot\sqrt{B}}{2\pi}\cdot\int\limits_{\partial\tilde{\Delta}_i^{(M)}}\frac{|dt|}{|t-z|} <$$

$$< C_{M-1}\sqrt{B}\,\frac{4\,S_M}{N_M}\Big/\frac{2\pi\cdot S_M'}{N_M} = \frac{2\,C_{M-1}\cdot S_M}{\pi\cdot S_M'}\cdot\sqrt{B}.$$

Откуда

$$\sum_i |R_{M,\,i}(z)| < \frac{2\,C_{M-1}\,S_M}{\pi\cdot S_M'}\cdot N_{M-1}^2\sqrt{B},\quad z \in \Delta\setminus\bigcup_j \tilde{\Delta}_j^{(M)}. \tag{7}$$

6°. Обозначим

$$\Phi_m(z) = \Phi_m^{(\varepsilon)}(z) = R(z) - \sum_{k=m}^{M}\sum_i R_{k,\,i}(z). \tag{8}$$

Согласно неравенству Коши и (6), (7) имеем

$$(E_M = D_{M+1}\setminus\bigcup_i \tilde{\Delta}_i^{(M)}),$$

$$\left\{\int\limits_{E_M}|\Phi_M|^2\,\psi\,dm\right\}^{1/2} < \left\{\int\limits_{E_M}|R|^2\,\psi\,dm\right\}^{1/2} +$$

$$+\left\{\int\limits_{E_M}\left|\sum_i R_{M,\,i}(z)\right|^2\psi\,dm\right\}^{1/2} < \sqrt{3B} +$$

$$+ N_{M-1}^2\,\frac{2\,C_{M-1}\,S_M}{\pi\cdot S_M'}\sqrt{B} = \left(1 + N_{M-1}^2\cdot\frac{2\,C_{M-1}\cdot S_M}{\pi\sqrt{3}\cdot S_M'}\right)\sqrt{3B}.$$

Так как Φ_M аналитична на множестве $\bigcup_i \tilde{\Delta}_i^{(M)}$, то опять согласно лемме 2 и благодаря тому, что площадь этого множества можно сделать достаточно маленькой (за счет выбора N_M), можно добиться выполнения неравенства

$$\int\limits_{D_M}|\Phi_M|^2\,\psi\,dm < \left(1 + N_{M-1}^2\,\frac{C_{M-1}\cdot S_M}{S_M'}\right)^2\cdot 3\,B. \tag{9}$$

Теперь Φ_M находится в такой же ситуации, что R_ε, только номер ранга на единицу меньше. Поэтому многократно повторяя аналогичные рассуждения, мы придем к следующим леммам.

Лемма 3.

$$\int\limits_{D_M}|\Phi_M|^2\,\psi\,dm < A\cdot B, \tag{10}$$

где

$$A = 3 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + N_{k-1}^2 \cdot \frac{C_{k-1} \cdot S_k}{S_k'}\right).$$

Лемма 4. *Для* $z \in \Delta \setminus (\bigcup_{k=m}^{M} \bigcup_{l} \tilde{\Delta}_l^{(M)})$ *имеем*

$$\sum_{k=m}^{M} \sum_{l} |R_{k,l}(z)| < \frac{2C_{m-1} \cdot S_m}{S_m'} \cdot N_{m-1}^2 \sqrt{B}. \tag{11}$$

(Конечно, предполагается, что последовательности

$$\left\{\frac{S_m'}{N_m}\right\} \text{ и } \left\{\frac{C_{m-1} \cdot S_m}{S_m'} \cdot N_{m-1}^2\right\}$$

достаточно быстро стремятся к нулю).

7°. Пусть $\delta_{l_0}^{(k_0)}$ — наибольший квадрат среди квадратов $\{\delta_l^{(k)}\}$ (с наименьшим верхним индексом), для которого на множестве $\delta_0 = E \cap \delta_{l_0}^{(k_0)}$ предельная функция f равна нулю.

Применим леммы 3 и 4, взяв вместо Δ квадрат $\delta_{l_0}^{(k_0)}$, а вместо B — число $\alpha(\varepsilon) = \int_{\delta_0} |R_\varepsilon|^2 \psi \, dm$. Тогда будем иметь:

а) сумма

$$\sum_{k=k_0}^{M} \sum_{l} |R_{k,l}(z)|,$$

где $\Delta_l^{(k)} \subset \delta_{l_0}^{(k_0)}$, равномерно вне $\delta_{l_0}^{(k_0)}$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ (лемма 4);

б)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\delta_{l_0}^{(k_0)}} |\Phi_{k_0}^{(\varepsilon)}|^2 \psi \, dm = 0 \quad (\text{лемма } 3).$$

Поэтому с самого начала можно считать, что рациональные функции R_ε не имеют полюсов на квадрате $\delta_{l_0}^{(k_0)}$.

8°. Через $\Delta_{l,m}^{(k)}$ обозначим концентрический с $\Delta_l^{(k)}$ квадрат, длина стороны которого больше стороны последнего на величину $\frac{2S_{m-1}'}{N_{m-1}}$, $k \leq m-1$. Δ_m концентричный с Δ квадрат со стороной длины $1 - \frac{2S_{m-1}'}{N_{m-1}}$.

Введем в рассмотрение область

$$D_m^* = \Delta_m \setminus (\bigcup_{k=1}^{m-1} \bigcup_{l}{}^{*} \Delta_{l,m}^{(k)}),$$

где знак (*) означает, что сумма распространяется по тем индексам, для которых квадраты $\Delta_l^{(k)}$ находятся во внешности $\delta_{l_0}^{(k_0)}$. K_0 — концентрический с $\delta_{l_0}^{(k_0)}$ круг радиуса $r_0 = \dfrac{1}{8 N_{k_0-1}}$ и с центром z_0. Основной областью в нашем рассмотрении будет

$$\widetilde{D}_m = \overset{*}{D}_m \setminus K_0. \tag{12}$$

Рассмотрим гармоническую в этой области функцию ω_m, которая удовлетворяет граничному условию

$$\omega_m(z) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad z \in \partial K_0, \\ 0 & \text{для} \quad z \in \partial \overset{*}{D}_m. \end{cases} \tag{13}$$

Согласно лемме 3 и предположению, что рациональные функции R_ε не имеют полюсов на $\delta_{l_0}^{(k_0)}$, имеем

$$\int\limits_{D_m \cup \delta_{l_0}^{(k_0)}} |\Phi_m|^2 \psi dm < 2A \cdot B.$$

С помощью леммы 2 теперь нетрудно получить оценку

$$|\Phi_m(z)| < A_m \cdot \sqrt{B}, \quad z \in \overset{*}{D}_m, \tag{14}$$

где постоянная A_m зависит только от S'_{m-1} и N_{m-1}.

Опять с помощью лемм 2, 4 будем иметь

$$|\Phi_m^{(\varepsilon)}(z)| < C_0 \cdot \left\{ \alpha(\varepsilon) + \frac{2 C_{m-1} \cdot S_m}{S'_m} \cdot N_{m-1}^2 \sqrt{B} \right\}, \quad z \in K_0.$$

Поэтому для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$|\Phi_m^{(\varepsilon)}(z)| < B_m \cdot \frac{S_m}{S'_m}, \quad z \in K_0, \tag{15}$$

где

$$B_m = 3 C_0 \cdot C_{m-1} \cdot N_{m-1}^2 \sqrt{B}.$$

Согласно принципу максимума для субгармонических функций (для области $\widetilde{D}_m$) имеем

$$\log |\Phi_m^{(\varepsilon)}(z)| < (1 - \omega_m(z)) \cdot \log (A_m \sqrt{B}) + \omega_m(z) \cdot \log \left(B_m \cdot \frac{S_m}{S'_m} \right), \tag{16}$$

где $z \in \widetilde{D}_m$.

9°. Займемся оценкой гармонической функции ω_m. Существенным является то обстоятельство, что ширина коридоров области $\widetilde{D}_m$ больше, чем $\dfrac{1}{2 N_{m-2}}$.

Через F_m обозначим подмножество тех точек $\widetilde{D}_m$, расстояние которых до границы этой области не менее, чем $\dfrac{S'_{m-1}}{N_{m-1}}$. (Нетрудно проверить, что $m(E \setminus F_m) \to 0$, $m(F_m \setminus E) \to 0$ при $m \to \infty$).

Пусть $\zeta \in F_m$. Выберем такие круги

$$K_1(z_1,\ r),\ K_2(z_2,\ r),\cdots,\ K_p(z_p,\ r),$$

где

$$r=\frac{1}{4N_{m-2}},$$

что

$$|z_k-z_{k-1}|=\frac{r}{2},\ 1\leqslant k\leqslant p,\ |z_0-z_1|=\frac{3}{2}r_0,\quad \zeta\in K_p.$$

Точка ζ удалена от границы круга K_p на расстояние, не менее, чем

$$\frac{S'_{m-1}}{N_{m-1}}\cdot K_i\subset F_m,\quad i=1,\ 2,\cdots,\ p-1;\quad K_p\subset \widetilde{D}_m.$$

Легко видеть, что количество кругов можно взять не более, чем $16\,N_{m-2}$.

Введем в рассмотрение гармонические функции $\mu_0(z)$, $\mu_1(z)$, $\mu_2(z),\cdots,\ \mu_p(z)$.

$$\mu_0(z)=\log\frac{|z-z_0|}{2r_0}\Big/\log\frac{1}{2}.$$

$\mu_0(z)=1$ при $|z-z_0|=r_0$ и $\mu_0(z)=0$ при $|z-z_0|=2r_0$. На круге $K(z_1,\ r')$, $r'=\frac{r}{8}$, имеем

$$\mu_0(z)>\log\left(\frac{3}{4}+\frac{r}{2r_0}\right)\Big/\log\frac{1}{2}=\lambda_1,$$

$$\mu_1(z)=\lambda_1\cdot\log\frac{|z-z_1|}{r}\Big/\log\frac{1}{8}.$$

$\mu_1(z)=\lambda_1$ при $|z-z_1|=\frac{r}{8}$ и $\mu_1(z)=0$ при $|z-z_1|=r$. На круге $K(z_2,\ r')$ имеем

$$\mu_1(z)>\lambda_1\cdot\log\frac{\frac{r}{2}+\frac{r}{8}}{r}\Big/\log\frac{1}{8}=\lambda_1\cdot\log\frac{5}{8}\Big/\log\frac{1}{8}=\lambda_1\lambda_2,$$

$$\mu_k(z)=\lambda_1\cdot\lambda_2^{k-1}\cdot\log\frac{|z-z_k|}{r}\Big/\log\frac{1}{8},\ 1\leqslant k\leqslant p,$$

$\mu_k(z)=\lambda_1\cdot\lambda_2^{k-1}$ при $|z-z_k|=\frac{r}{8}$ и $\mu_k(z)=0$ при $|z-z_k|=r$. Поэтому для $z\in K(z_k,\ r')$ имеем $\mu_k(z)>\lambda_1\cdot\lambda_2^k$.

Совершая последовательный переход по кругам K_0, $K_1,\cdots,\ K_p$, и каждый раз применяя принцип максимума для гармонических функций, в силу последних оценок получим

$$\omega_m(z)>\mu_p(z)\quad\text{для}\quad z\in K(z_p,\ r).$$

Кроме этого

$$\mu_p(\zeta) > \lambda_1\cdot\lambda_2^{p-1}\cdot\log\frac{|\zeta-z_p|}{r}\Big/\log\frac{1}{8} >$$

$$>\lambda_1\cdot\lambda_2^{p-1}\cdot\log\frac{r-\dfrac{S'_{m-1}}{N_{m-1}}}{r}\Big/\log\frac{1}{8} > \lambda_1\cdot\lambda_2^{p-1}\cdot\frac{S'_{m-1}}{n_{m-1}}$$

$(p < 16N_{m-2})$.

Таким образом, для любой точки ζ, $\zeta\in F_m$, имеем

$$\log|\Phi_m^{(s)}(\zeta)| < \log(A_m\sqrt{B}) + \lambda_1\cdot\lambda_2^{p-1}\cdot\log\left(B_m\cdot\frac{S_m}{S'_m}\right). \tag{17}$$

Каждый раз после выбора $N_1, N_2, \cdots, N_{m-1}$, число N_m, затем S'_m выбирается настолько большим, чтобы правая часть неравенства (17) стремилась к $-\infty$ при $m\to\infty$. Остается учесть лемму 4.

Теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16.V.1977

Ս. Հ. ՍԻՆԱՆՅԱՆ. L^p տարածության մետրիկայով առաջացած քվազիանալիտիկության մասին *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է կոմպլեքս հարթության վրա որոշված դրական ֆունկցիա, որը բավարարում է բնական պայմանի (պայմանավորված Սեգյոյի կլասիկ թեորեմայով)։ Ապացուցվում է այնպիսի ամենուրեք նոսր կոմպակտի գոյությունը, որ այդ կոմպակտի վրա դիտարկված ֆունկցիայի սահմանափակումը հանդիսանում է այնպիսի կշռային ֆունկցիա, որը ապահովում է L^p տարածության մետրիկայի միջոցով անալիտիկ ֆունկցիաների միակության հատկության փոխանցումը։

S. O. SINANIAN. *On quasianalyticity generated by the metric of the L^p space* (summary)

A positive function defined on the complex plain and satisfying some natural condition coming from the classical Sege theorem is considered.

The existence of a nowhere dence compact is proved, such that the metric of the L^p space (with weighting function, which is the restriction of the considered function on the compact) ensures the transmission of the uniqueness property of analytical functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Г. Витушкин.* Условие на множество, необходимое и достаточное для возможности равномерного приближения аналитическими (или рациональными) функциями всякой непрерывной на этом множество функции, ДАН СССР, 128, № 1, 1959, 17—20.
2. *М. С. Мельников, С. О. Синанян.* Вопросы теории приближений функций одного комплексного переменного, Современные проблемы математики, том 4, 1975, 143—250.
3. *С. О. Синанян.* Свойство единственности аналитических функций на замкнутых множествах без внутренних точек, Сиб. матем. журнал, 6, № 6, 1965, 1365—1381.
4. *С. О. Синанян.* Аппроксимация аналитическими функциями и полиномами в среднем по площади, Мат. сб., 69, № 4, 1966, 546—578.
5. *J. Brennan.* Approximation in the mean and quasianalyticity, J. Funct. Anal., 12, № 3, 1973, 307—320.