

Г. С. МИКАЕЛЯН

D-ТЕОРЕМЫ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ВИЛАНДТОВЫХ ГРУПП

В в е д е н и е

В статье применяется аксиоматический подход к силовой теории бесконечных групп. В § 1 приводятся определения основных понятий и основные результаты. В частности, на языке классов групп формулируются и обобщаются понятия *D*-теоремы (см. [5]) и θ -виландтовой подгруппы. Последнее является обобщением понятия нильпотентной холловской Π -подгруппы группы, рассматриваемом Виландтом [2]. Приводятся некоторые *D*-теоремы, имеющие место в θ -виландтовых группах. В § 2 проводится некоторое необходимое в дальнейшем исследование силовских классов групп. Здесь, в частности, строится оператор силового замыкания Syl . В § 3 устанавливаются некоторые свойства θ -виландтовых групп, необходимые также и в доказательствах основных результатов, которые приводятся в последнем параграфе.

§ 1. *D*-теоремы в θ -виландтовых группах

При изучении теорем типа Силова Ф. Холл в своей работе [5] ввел в рассмотрение следующие классы групп: E_Π — класс групп, в которых существуют холловские Π -подгруппы; C_Π — класс E_Π -групп, в которых холловские Π -подгруппы сопряжены; D_Π — класс C_Π -групп, в которых каждая Π -подгруппа содержится в некоторой холловской Π -подгруппе (здесь и в дальнейшем через Π обозначается некоторое множество простых чисел). С другой стороны известно, что различные теоремы типа Силова можно получать, заменяя класс Π -групп некоторым „хорошим“ классом групп X (см., например, [3]). Но тогда, естественно, следуя Ф. Холлу, ввести и исследовать классы групп E_X , C_X и D_X . Сразу же отметим, что для большинства классов X , для которых имеет место какая-нибудь нетривиальная теорема типа Силова, класс E_X совпадает с классом всех групп, а классы C_X и D_X совпадают. Рассматриваемые нами классы (силовские классы) также являются такими и мы ограничимся исследованием только класса D_X .

Пусть X — абстрактный класс групп — класс групп, содержащий вместе с каждой группой все ей изоморфные.

Определение. Группа принадлежит к классу D_X тогда и только тогда, когда каждая ее X -подгруппа порождает X -подгруппу вместе с некоторым сопряженным любой X -подгруппы этой группы. Если $G \in D_X$, то скажем еще, что в G справедлива D_X -теорема.

Классическими примерами D_X -теорем, при подходящих выборах класса X , являются упомянутая теорема Силова и известная теорема Ф. Холла о холловских Π -подгруппах конечных разрешимых групп. Ряд интересных D -теорем содержится в работе [5].

В работе [2] Виландт показал, что конечная группа, обладающая нильпотентной холловской Π -подгруппой, содержится в классе D_X , если в качестве X взять класс всех Π -групп. Но нильпотентная холловская Π -подгруппа группы разлагается в прямое произведение своих p -подгрупп, $p \in \Pi$, т. е. является θ -разложимой при некотором частном выборе расщепляемой системы абстрактных классов групп θ . Учитывая еще, что p -компоненты нильпотентной холловской Π -подгруппы являются максимальными p -подгруппами и в исходной конечной группе, мы приходим к следующему определению.

Определение. Подгруппу A группы G назовем θ -виландтовой в G , если она θ -разложима и каждая ее максимальная X -подгруппа такова и в G для всех $X \in \theta$. Группу, обладающую θ -виландтовой подгруппой, назовем θ -виландтовой.

Теперь нильпотентные холловские Π -подгруппы группы становятся θ -виландтовыми, если в качестве класса $X \in \theta$ взять класс p -групп для некоторого простого числа p , при этом предполагая, что для различных классов X эти числа различны. Максимальные X -подгруппы группы, т. е. X -подгруппы группы, не содержащиеся в других X -подгруппах этой группы, также являются θ -виландтовыми подгруппами для всякого класса X , если взять $\theta = \{X\}$.

Итак, на языке классов мы имеем формулировки и обобщения понятий D -теоремы и нильпотентной холловской Π -подгруппы. Но эти понятия связаны между собой: например, в теореме Виландта—из существования в конечной группе нильпотентной холловской Π -подгруппы следует выполняемость в ней некоторой D -теоремы. Поэтому можно ожидать, что аналогичная импликация имеет место и в упомянутом общем случае и тогда естественно поставить вопрос: не справедлива ли какая-нибудь D -теорема в θ -виландтовых группах? (Отметим, что аналогичный вопрос, связанный с холловскими подгруппами групп, поставлен во II части работы [2]).

Конечно, не реальна попытка установления D_X -теорем в произвольных θ -виландтовых группах, без каких-либо ограничений на θ и на группы. Обычно, при аксиоматическом подходе к силовской теории групп, на классы из θ накладываются некоторые естественные ограничения. Чаще всего это—силовские классы: классы групп, замкнутые относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов, расширений и локальной теоремы. Рассмотрением таких классов и мы ограничиваемся

и под θ всюду будем понимать некоторую расщепляемую систему силовских классов (см. [3]).

Отметим, что хотя такое ограничение на классы из θ и довольно сильное, но все же у нас сохраняется большая возможность выбора различных расщепляемых систем силовских классов. В самом деле, если X — произвольный класс групп, а A — простая конечная группа, не лежащая в X , то, применяя лемму 3, легко доказать, что $A \notin \text{Syl } X$, где через $\text{Syl } X$ обозначается силовское замыкание класса X — минимальный силовский класс, содержащий X (легко сообразить, что он однозначно определен). Отсюда следует, что два класса групп, один из которых содержит простую конечную группу, не лежащую в другом, порождают различные силовские классы. А это дает нам возможность построить большую серию различных расщепляемых систем силовских классов.

Ясно, что при установлении D_X -теорем в θ -виландтовых группах в качестве класса X нужно брать некоторый, зависящий от θ , класс групп. Этот класс должен быть связан с θ примерно так же, как и класс Π -групп — с системой классов p -групп по всем $p \in \Pi$. Ясно также, что чем шире класс X , тем сильнее соответствующая D_X -теорема. В этом отношении самым широким классом X , для которого мы устанавливаем D_X -теорему в соответствующих θ -виландтовых группах, является класс

$$X = \text{Syl } (U \theta).$$

Следует отметить, что для полного соблюдения той связи между X и θ , которая отмечалась выше, нужно было в установленных нами D_X -теоремах взять $X = \overline{\text{Syl } (U \theta)}$ (см. § 3). Однако, при таком широком выборе класса X установить D_X -теоремы в θ -виландтовых группах видимо очень трудно, если это вообще возможно (см. также замечание после теоремы 4).

Обычно, для перенесения силовских теорем на бесконечные группы, на эти группы необходимо налагать некоторые условия конечности. Чаще всего — это конечность числа сопряженных подгрупп рассматриваемого типа данной группы (см., например, [10]). При таком ограничении на θ -виландтовые подгруппы группы у нас получается следующая теорема. (Напомним, что под фактором группы, как обычно, понимается фактор-группа любой ее подгруппы).

Теорема 1. Пусть локально конечная группа G обладает θ -виландтовой подгруппой с конечным числом сопряженных. Тогда, если в каждом конечном факторе группы G справедлива D_X -теорема для всякого $X \in \theta$, то $G \in D_{\text{Syl } (U \theta)}$.

Другим условием конечности, налагаемым на бесконечную группу при установлении в ней силовских теорем, является конечность индекса соответствующего радикала (см., например, [11], [12]). Для формулировки полученного в этом плане результата напомним, что

θ -радикалом группы называется ее максимальная инвариантная θ -разложимая подгруппа. Он однозначно определяется (см. [3]) и обозначается через $R_\theta(G)$.

Теорема 2. Пусть локально конечная θ -виландтова группа G обладает θ -радикалом конечного индекса. Тогда, если в каждой конечной подгруппе группы G справедлива D_X -теорема для всех $X \in \theta$, то $G \in D_{\text{Syl}(\theta)}$.

Наконец, сопряженность в группе силовских подгрупп или баз, картеровых подгрупп и т. д. очень часто зависит от силовского или нормального нормализатора некоторой подгруппы или базы данного типа рассматриваемой группы. Такая связь установлена в теоремах 3, 4. Отметим, что этот подход в теореме 3 комбинируется с подходом, применяемом в теореме 2. Приведем необходимое

Определение. Нормальный нормализатор подмножества A группы G обозначим через $N_G[A]$ и определим равенством:

$$N_G[A] = \bigcap_{g \in G} g^{-1} N_G(A) g.$$

Далее, назовем группу θN -группой, если все ее X -подгруппы являются N -группами (см. [1]) для всех $X \in \theta$.

Теорема 3. Пусть периодическая группа G обладает такой θ -виландтовой подгруппой A , что $G = G/N_G[A]$ является локально конечной θN -группой с θ -радикалом конечного индекса. Тогда если в каждой конечной подгруппе группы G справедлива D_X -теорема для всех $X \in \theta$, то $G \in D_{\text{Syl}(\theta)}$.

Пусть число силовских классов в θ больше 1 или же θ составлен из одного, но силовского класса периодических групп. Тогда справедлива

Теорема 4. Если группа G обладает такой θ -виландтовой подгруппой A , что $G = G/N_G[A]$ — конечная θN -группа, в каждой подгруппе которой справедлива D_X -теорема для всех $X \in \theta$, то $G \in D_{\text{Syl}(\theta)}$.

Отметим, что в работе [7] П. А. Гольберг доказал, что если некоторая группа G обладает разлагающейся в прямое произведение своих p -компонент, $p \in \Pi$, холловской Π -подгруппой A с конечным числом сопряженных, то в ней для всякой Π -подгруппы B существует такой элемент g , что $g^{-1}Bg \subseteq A$, т. е. $G \in D_X$, где X — класс всех Π -групп. Заменяя классы из θ некоторыми классами p -групп, при этом предполагая, что для различных классов берутся различные простые числа p , мы сможем получить эту теорему из леммы 13 настоящей статьи, которая носит редукционный характер — выполнимость D_X -теоремы в группе сводится к D_X -теореме для некоторого конечного фактора этой группы (в ситуации теоремы Гольберга в указанном факторе работает теорема Виландта). Однако, при сделанном выше выборе классов из θ , приведенную теорему Гольберга нельзя вывести из теоремы 4, как и теорему Виландта из леммы 8. Это было бы возможно,

если бы в предположениях теоремы 4 справедлив был бы результат $G \in D_{\text{Syl}(U\bar{G})}$, что, по-видимому, не так.

Далее, в условиях теоремы 4 предполагается, что если $\bar{G} = \{X\}$, то X — силовский класс периодических групп. Отметим, что при таком частном выборе $\bar{G}$ известна теорема Б. И. Плоткина [3], в которой X — произвольный силовский класс, и отсутствует условие $\bar{G} \in \{X\} \cap N$ теоремы 4. Однако в ней предположение теоремы 4 о том, что каждая подгруппа группы $\bar{G}$ лежит в D_X усиливается и заменяется аналогичным предположением относительно всех конечных факторов группы G .

§ 2. Силовское замыкание классов групп

После появления работы Ф. Холла [6], в теории групп широко и с успехом применяется язык операторов. При этом под теоретико-групповым оператором понимается функция, сопоставляющая каждому классу групп некоторый второй класс групп. Значение оператора U на классе X обозначается через UX . По традиции определяются операторы S, H, E, L — если X произвольный класс групп, то SX — класс всех подгрупп, а HX — голоморфных образов X -групп, EX — класс всех расширений X -групп при помощи X -групп, LX — класс всех групп, обладающих локальными системами из X -групп. Оператор Syl сопоставляет каждому классу X его силовское замыкание Syl X . Как суперпозиция функций определяется произведение операторов, причем в произведении UV сначала применяется оператор U . Например, (см. [4])

$$\text{Syl } A = HSRN,$$

где A — класс абелевых групп, RN — класс RN -групп (см. [1]). Для всякого оператора U помимо степени $U^2 = U \cdot U$ определяются также все степени U^γ — для всякого порядкового числа γ подставляется $U^1 = U$ и если для всех $\mu < \gamma$ все U^μ уже определены, то для произвольного класса X предполагается $U^\gamma X = \bigcup_{\mu < \gamma} U^\mu X$, если γ — предельно и $U^\gamma = U \cdot U^{\gamma-1}$, если $\gamma - 1$ существует. Для всякого оператора U определяется также оператор $\bar{U}$: $\bar{U}X$ есть объединение всех классов $U^\gamma X$, где γ пробегает класс всех порядковых чисел.

Пусть X — произвольный класс групп, U, V — теоретико-групповые операторы. Для всякого порядкового числа γ определим классы $X_{U,V}^\gamma$ следующим образом: $X_{U,V}^0 = UX$, $X_{U,V}^1 = VUX$. Далее, если для всех порядковых чисел $\mu < \gamma$ классы $X_{U,V}^\mu$ уже определены, то положим $X_{U,V}^\gamma = \bigcup_{\mu < \gamma} X_{U,V}^\mu$, если γ — предельное. Если же $\gamma - 1$ существует и является предельным, то подставим $X_{U,V}^\gamma = UX_{U,V}^{\gamma-1}$, а если существует $\gamma - 2$, то $X_{U,V}^\gamma = VX_{U,V}^{\gamma-1}$ при $X_{U,V}^{\gamma-1} = UX_{U,V}^{\gamma-2}$ и $X_{U,V}^\gamma = UX_{U,V}^{\gamma-1}$ при $X_{U,V}^{\gamma-1} = VX_{U,V}^{\gamma-2}$.

Лемма 1. Для всякого порядкового числа γ и всякого класса групп X из $SX = X$ следует

$$SX^\gamma = X^\gamma, \quad (1)$$

где всюду в дальнейшем принято обозначение

$$X^\gamma = X_{E,L}^\gamma$$

для всех порядковых чисел γ .

Доказательство. Проведем индукцию по γ . Пусть $\gamma = 0$ и $G \in EX$, G/B , $B \in X$. Если A — произвольная подгруппа в G , то ввиду теоремы об изоморфизме и из условия леммы получаем $A \cap B$, $A/A \cap B \in X$ и $A \in EX$. Пусть для всех порядковых чисел $\mu < \gamma$ (1) верно. Тогда случай предельного γ тривиален, а случай $X^\gamma = EX^{\gamma-1}$ проверяется аналогично случаю $\gamma=0$, если же $X_\gamma = LX^{\gamma-1}$ и $[G_\alpha/x \in I]$ — локальная система из $X^{\gamma-1}$ -групп X^γ -группы G , то система $[A \cap G_\alpha/x \in I]$ будет локальной для A , и применяя индукцию, получаем $A \in LX^{\gamma-1}$.

Лемма 2. Для всякого порядкового числа γ и всякого класса X из $HX = X$ следует $HX^\gamma = X^\gamma$.

Доказательство проводится аналогично предыдущему.

Лемма 3. Для всякого класса групп $X \overline{EL}X = \bigcup_{\gamma} X^\gamma$, где γ пробегает класс всех порядковых чисел.

Доказательство очевидно.

Выше была подчеркнута большая роль силовских классов при изучении теорем типа Силова. Поэтому важно иметь описание оператора Syl . Такое описание дается в следующей теореме.

Теорема 5. $Syl = \overline{ELHS}$, т. е. для всякого класса групп X $Syl X = \overline{ELHSX}$.

Доказательство. Ясно, что $\overline{ELHSX} \subseteq Syl X$. С другой стороны нетрудно заметить, что $HSX = SHSX = HHSX$ и применяя леммы 1, 2, 3, получаем

$$S \overline{ELHSX} = H \overline{ELHSX} = \overline{ELHSX},$$

Покажем, что $L \overline{ELHSX} = \overline{ELHSX}$. Пусть $G \in L \overline{ELHSX}$ и $[G_\alpha/x \in I]$ — ее локальная система из групп, принадлежащих классу $\overline{ELHSX}$. По лемме 3 каждое G_α содержится в некотором классе $(HSX)^{\gamma(\alpha)}$. Так как I — множество, то существует некоторое порядковое число γ больше всех $\gamma(\alpha)$ для всякого $\alpha \in I$. Тогда $G_\alpha \in (HSX)^\gamma$ для всякого $\alpha \in I$, т. е. $G \in \overline{ELHSX}$.

Очевидно также, что $E \overline{ELHSX} \subseteq \overline{ELHSX}$. Таким образом, $\overline{ELHSX}$ является силовским классом. Теорема доказана.

Теперь приведем пример силовского класса, лежащего между силовскими классами периодических групп и всех

групп*. Сначала отметим, что нам не удалось решить следующую проблему:

Проблема. Существует ли силовский класс, лежащий между классами всех p -групп и локально конечных p -групп, где p — простое число?

Обозначим через P класс периодических групп. Покажем, что класс $\text{Syl}(A \cup P)$ не совпадает с классом всех групп и, тем самым, будет промежуточным силовским классом между P и классом всех групп. Пусть $X = A \cup P$. Тогда $HX = X$ и по лемме 3

$$\text{Syl} X = \bigcup_{\gamma} X^{\gamma},$$

где γ пробегает класс всех порядковых чисел. Индукцией по γ покажем, что никакая свободная группа ранга больше 1 не содержится в X^{γ} . При $\gamma = 0$ это очевидно. Пусть оно верно для всех $\mu < \gamma$. Тогда при предельном γ все ясно. Если же $\gamma - 1$ существует, то возможны два случая:

1) $X^{\gamma} = EX^{\gamma-1}$, и G свободная $X^{\gamma-1}$ -группа. Тогда для некоторого $A \triangleleft G$, $A \in X^{\gamma-1}$. Ввиду индуктивного предположения и теоремы Нильсена—Шрейера $A = 1$, что приводит к противоречию с индуктивным предположением.

2) $X^{\gamma} = LX^{\gamma-1}$. Этот случай аналогичен предыдущему.

В заключение приведем еще одну лемму, необходимую в дальнейшем.

Лемма 4. $\text{Syl}(\bigcup \theta) \cap \bar{Y} = Y$, где $Y \in \theta$, а через $\bar{Y}$ обозначен класс всех групп, любой элемент которых порождает циклическую Y -подгруппу.

Доказательство. По лемме 3 $\text{Syl}(\bigcup \theta) = \bigcup_{\gamma} X^{\gamma}$, где $X = \bigcup \theta$.

Индукцией по γ покажем, что $X^{\gamma} \cap \bar{Y} = Y$. При $\gamma = 0$ и предельном γ все очевидно. Пусть $\gamma - 1$ существует и $X^{\gamma} = EX^{\gamma-1}$. Тогда для некоторого $A \triangleleft G$, $A \in X^{\gamma-1}$. Из $G \in \bar{Y}$ следует, что $A \in \bar{Y}$, $G/A \in \bar{Y}$. Применяя индукцию, получаем $A, G/A \in Y$, т. е. $G \in Y$. Аналогично рассматривается случай $X^{\gamma} = LX^{\gamma-1}$.

§ 3. Некоторые свойства θ -виландтовых групп

В настоящем параграфе устанавливаются некоторые свойства θ -виландтовых групп. Все эти свойства необходимы также при доказательстве основных результатов статьи.

Лемма 5. Пусть G — конечна и для всех $X \in \theta$, $G \in D_X$. Тогда, если A — θ -виландтова подгруппа в G , а B — ее инвариантная Y -подгруппа для некоторого $Y \in \theta$, то A/B — θ -виландтова в G/B .

* Этот пример автору сообщил Б. И. Плоткин.

Доказательство. Ясно, что $B \subseteq A$ и A/B θ -разложима. Очевидно также, что каждая максимальная Y -подгруппа группы A/B такова и в G/B . Пусть C/B — максимальная X -подгруппа в A/B , $X \in \theta$, $X \neq Y$. Тогда, ввиду $X \cap \bar{Y} = 1$ можно применить лемму Шура, согласно которой $C = B_1 B$, где $B_1 \simeq C/B$, т. е. $B_1 \in X$. Пусть B_2 — содержащая $B_1 X$ -подгруппа в A . Тогда из равенств $B_1 B = B_2 B$ и $B_2 \cap B = 1$ получаем $B_2 = B_1$, т. е. B_1 является максимальной X -подгруппой в A и, следовательно, в G .

Покажем, что $B_1 B/B$ — максимальная X -подгруппа в G/B . Пусть $B'/B \in X$ и $B'/B \supseteq B_1 B/B$. Тогда по той же лемме Шура $B' = B'' B$, где $B'' \simeq B'/B$. Следовательно, $B_1 B \subseteq B'' B$. Но из $G \in D_X$ следует $g^{-1} B'' g \subseteq B_1$, $g \in G$ и мы получаем:

$$g^{-1} B'' B g = g^{-1} B'' g B \subseteq B_1 B.$$

Сравнение порядков групп $B_1 B$ и $B'' B$ и полученные включения дают нам: $B_1 B = B'' B = B'$, что и требовалось показать. Лемма доказана.

Обозначим через Π^θ класс θ -разложимых групп.

Лемма 6. Если каждая подгруппа конечной θ -виландтовой группы G является D_X -группой для всех $X \in \theta$, то $G \in D_{\Pi^\theta}$.

Доказательство. Индукцией по порядку группы докажем, что если A — θ -виландтова подгруппа, а H — произвольная Π^θ -подгруппа в G , то для некоторого $g \in G$

$$g^{-1} H g \subseteq A. \quad (2)$$

Ясно, что для некоторого $X \in \theta$ инвариантная X -подгруппа B группы H нетривиальна. Сначала предположим, что $B \triangleleft G$. Тогда, по лемме 5, A/B — θ -виландтова подгруппа в G/B . Рассуждения, аналогичные сделанным в доказательстве предыдущей леммы, показывают, что каждая максимальная Y -подгруппа группы G/B является образом некоторой максимальной Y -подгруппы группы G при естественном гомоморфизме $G \rightarrow G/B$, для всякого $Y \in \theta$. Отсюда и из того, что $G' \in D_X$, $Y \in \theta$, для каждой подгруппы G' из G , получаем $G' B/B \in D_Y$. Таким образом, группа G/B удовлетворяет всем условиям леммы. Применяя индукцию, получаем $g^{-1} H B g \subseteq A$, $g \in G$, т. е. (2) в случае $B \triangleleft G$ доказано.

Предположим, что не $B \triangleleft G$. Пусть A_X и M_X — максимальные X -подгруппы соответственно в группах A и $M = N_1(B)$. Тогда из $G \in D_X$ следует

$$B \subseteq M_X \subseteq g^{-1} A_X g, \quad (3)$$

где $g \in G$. Обозначим $A^* = M \cap g^{-1} A g$. A^* θ -разложима. Далее, для всякого $Y \in \theta$ ее максимальная Y -подгруппа, будет такой же и в группе M . Действительно, при $Y = X$ это следует из (3), если же $Y \neq X$, то ввиду θ -разложимости A , из (3) получаем $g^{-1} A_Y g \subseteq M$. Таким образом, A^* θ -виландтова подгруппа в M и группа M удовлетворяет всем требованиям леммы. Но, так как $|M| < |G|$ и $H \subseteq M$, то

согласно индукции $H \subseteq g_1^{-1} A^* g_1$, или $H \subseteq (gg_1)^{-1} A (gg_1)$, где $g_1 \in M$. Включение (2) доказано и в этом случае.

Теперь, для доказательства леммы достаточно заметить, что если H_1 и H_2 — $\Pi \theta$ -подгруппы группы G , то по (2)

$$g_1^{-1} H_1 g_1, g_2^{-1} H_2 g_2 \subseteq A, g_1, g_2 \in G$$

и отсюда получаем $G \in D_{\Pi\theta}$, ввиду $A \in \Pi\theta$.

Лемма 7. Пусть A — θ -виландтова подгруппа $D_{\Pi\theta}$ -группы G и X — класс групп, обладающий тем свойством, что в A содержится некоторая сопряженная каждой X -подгруппе группы G . Тогда этим же свойством обладает и класс LX .

Доказательство. Пусть H — LX -подгруппа в G , $[H_\alpha / \alpha \in I]$ — ее локальная система из X -подгрупп. Ясно, что каждая H_α θ -разложима. По теореме 3 Плоткина [3] H θ -разложима. Остается заметить, что θ -виландтова подгруппа группы максимальна в группе как $\Pi\theta$ -подгруппа.

Лемма 8. Пусть каждая подгруппа конечной группы G является D_γ -группой для всех $\gamma \in \theta$. Тогда, если G обладает θ -виландтовой подгруппой A , то для всякой ее X^γ -подгруппы H существует такой элемент $g \in G$, что

$$g^{-1} H g \subseteq A, \quad (4)$$

где $X = \cup \theta$, а классы X^γ образуются так, как в лемме 1.

Доказательство. Применим совместную индукцию по порядку n группы и по порядковому числу γ . При $n=1$ утверждение леммы тривиально, а при $\gamma=0$ оно следует из того, что $G \in D_\gamma$ для всякого $\gamma \in \theta$. Пусть оно верно для всех пар (μ, n) и из справедливости для пары (μ, k) следует его справедливость для пары $(\mu+1, k)$ для всех $k < n$, $\mu < \gamma$. Пусть группа G имеет порядок n . Ясно, что если γ предельное, то все очевидно. Пусть $\gamma-1$ существует, тогда возможны два случая.

1). $X^\gamma = LX^{\gamma-1}$. Достаточно в этом случае применить леммы 6, 7. Ввиду конечности группы G этот случай легко сходится к индукции и непосредственно.

2). $X^\gamma = EX^{\gamma-1}$. Тогда $H/C \cong D$, где $C, D \in X^{\gamma-1}$. Если $C=1$, то $H \in X^{\gamma-1}$ и достаточно применить индукцию. Пусть $C \neq 1$. Тогда по индукции C θ -разложима и, следовательно, обладает нетривиальной нормальной Y -подгруппой B для некоторого $Y \in \theta$. Разберем два случая:

а) $B \triangleleft G$. Тогда, по лемме 5 A/B будет θ -виландтовой подгруппой группы G/B , в которой, как показано при доказательстве леммы 6, каждая подгруппа является D_Z -группой для всех $Z \in \theta$. Пусть F/B — произвольная $X^{\gamma-1}$ -подгруппа в G/B . Тогда, если $\gamma-2$ существует, то ясно, что $X^{\gamma-1} = LX^{\gamma-2}$ и F/B обладает локальной системой из $X^{\gamma-2}$ -групп. Отсюда следует $F/B \in X^{\gamma-2}$, т. е. $F \in X^{\gamma-1}$. Но $\gamma-1 < \gamma$. По индукции для некоторого $g \in G$ получаем $g^{-1} F g \subseteq A$ или $g^{-1} F/B g \subseteq$

$\subseteq A/B$, где $\bar{g} = gB$. Если же $\gamma - 2$ не существует, то при предельном $\gamma - 1$ $F/B \in X^{\gamma-1}$ и $\mu < \gamma - 1$ и, следовательно, $F \in X^{\gamma-1}$, а при $\gamma - 1 = 0$ $F/B \in Z$ для некоторого $Z \in \theta$. Если $Z = Y$, то $F \in Y$, а если $Z \neq Y$, то $F = F'B$, где $F' \simeq F/E \in Z$. По предположению для некоторого $g \in G$ $g^{-1}F'g \subseteq A$ или $\bar{g}^{-1}F/B\bar{g} \subseteq A/B$, где $\bar{g} = gB$. Итак, мы показали, что группа G/B удовлетворяет условиям леммы и для ее $X^{\gamma-1}$ -подгрупп верно заключение этой леммы. Так как $B \neq 1$ $H/B \in X^{\gamma}$ по лемме 2, то применяя индукцию получаем $\bar{g}^{-1}H/B\bar{g} \subseteq A/B$ или $g^{-1}Hg \subseteq A$, $g \in G$.

б) не $B \trianglelefteq G$. В обозначениях леммы 6 группа M будет удовлетворять всем условиям нашей леммы. Пусть D ее $X^{\gamma-1}$ -подгруппа. Она будет такой же подгруппой и для G и по индукции

$$g_1^{-1}Dg_1 \subseteq A, \quad g_1 \in G,$$

т. е. D θ -разложима. Но тогда, ввиду того, что M удовлетворяет всем условиям леммы 6, получаем $g_2^{-1}Dg_2 \subseteq A^*$, $g_2 \in M$. Таким образом, в группе M порядка $|M|$ для $X^{\gamma-1}$ -подгрупп верно (4). По индукции оно верно и для X^{γ} -подгрупп группы M . Но $H \subseteq M$ и остальная часть доказательства проводится так же, как и в лемме 6. Лемма доказана.

Лемма 9. $\Sigma \cap \text{Syl}(U^{\theta}) \subseteq \Pi^{\theta}$, где через Σ обозначен класс циклических групп.

Доказательство. Легко показать, что если существует бесконечная циклическая $\text{Syl}(U^{\theta})$ -группа, то θ составлена из одного класса. Поэтому предположим, что A — конечная циклическая группа из класса $\text{Syl}(U^{\theta})$. Очевидно, достаточно показать, что если A — циклическая p -группа, p — простое, то $A \in Y$ для некоторого $Y \in \theta$. Пользуясь леммой 3, берем представление $\text{Syl}(U^{\theta}) = \bigcup_{\gamma} X^{\gamma}$, где $X = U^{\theta}$ и применяя индукцию по γ покажем, что если A — циклическая p -группа из класса X^{γ} , то $A \in Y$ для некоторого $Y \in \theta$. При $\gamma = 0$ и при предельных γ все очевидно. Пусть $\gamma - 1$ существует. Тогда возможны два случая:

1) $X^{\gamma} = LX^{\gamma-1}$. Этот случай тривиален.

2) $X^{\gamma} = EX^{\gamma-1}$. Тогда $A/B \simeq C$,

где B и C — циклические p -группы из класса $X^{\gamma-1}$.

По индукции B и C принадлежат некоторым классам $Y, Z \in \theta$. Но так как θ — расщепляемая система силовских классов, то $Y = Z$ и, следовательно, $A \in Y$.

Лемма 10. Если A — θ -виландтова подгруппа группы G , H — ее $\text{Syl}(U^{\theta})$ -подгруппа, то из $H \subseteq N_G(A)$ следует $H \subseteq A$.

Доказательство. Ясно, что если A_x — X -сомножитель в A , $X \in \theta$, то она максимальна как X -подгруппа в G и $N_G(A) \subseteq N_G(A_x)$. Теперь, для доказательства леммы достаточно воспользоваться предыдущей леммой, при этом имея ввиду, что X -элементы нормализа-

тора максимальной X -подгруппы лежат в этой подгруппе для всякого силовского класса X .

Лемма 11. θ -виландтова подгруппа θ -виландтовой группы содержит ее θ -радикал.

Доказательство. Достаточно заметить, что для всякого класса $X \in \theta$ произведение X -сомножителей θ -радикала и θ -виландтовой подгруппы принадлежит классу X и, следовательно, содержится в последней.

Лемма 12. Пусть G — локально конечная группа, каждая конечная подгруппа которой содержится в классе D_X для всех $X \in \theta$. Тогда, если A ее θ -виландтова подгруппа конечного индекса, то $\bar{A} = A/R_0(G)$ будет θ -виландтовой подгруппой группы

$$\bar{G} = G/R_0(G).$$

Доказательство. Ясно, что $\bar{A}$ θ -разложима и ее максимальная X -подгруппа имеет вид $BR_0(G)/R_0(G) = \bar{B}$, где BX — сомножитель в A , $X \in \theta$. Покажем, что $\bar{B}$ — максимальная как X -подгруппа и в группе $\bar{G}$. Пусть

$$\bar{B} \subseteq \bar{C} = C/R_0(G) \in X.$$

Очевидно, можно предполагать, что

$$C = F \cdot R_0(G), \quad (5)$$

где F — конечная группа. Обозначим

$$\tilde{X} = \text{Syl}(U\theta \setminus X).$$

Пусть $\tilde{X}$ — элемент в C . Тогда, по теореме об изоморфизмах

$$\{c\}/\{c\} \cap R_0(G) \in X.$$

Но, по лемме 2 из [8], $X \cap \tilde{X} = 1$. Следовательно, $c \in R_0(G)$, т. е. все $\tilde{X}$ -элементы группы C образуют подгруппу в ней, что будет верно и для ее подгруппы F . Далее, из $F \in \text{Syl}(X \cup \tilde{X})$ следует, что для всякого $b \in F \setminus \{b\}$ $\bar{F}/\bar{F} \in X$, где $\bar{F}$ — максимальная $\tilde{X}$ -подгруппа в F . Применяя здесь лемму 4, получаем $F/\bar{F} \in X$, так как $F/\bar{F} \in \tilde{X}$. Отсюда лемма Шура нам дает $F = E \cdot \bar{F}$, где $E \in X$. Теперь, имея ввиду (5), получаем

$$C = E \bar{F} R_0(G) = E R_X(G) R_{\theta'}(G),$$

где $\theta' = \theta \setminus \{X\}$. Но по лемме из [9] $C \in D_X$, так как $E R_X(G) \in X$, то для некоторого $x \in C$ $x^{-1} E R_X(G) x \subseteq B$ или

$$C = x^{-1} C x \subseteq BR_0(G).$$

Отсюда мы получаем $\bar{C} = \bar{B}$, т. е. $\bar{B}$ максимальна в $\bar{G}$ как X -подгруппа. Но это вместе с θ -разложимостью $\bar{A}$ и означает, что $\bar{A}$ θ -виландтова в $\bar{G}$.

§ 4. Доказательства D -теорем

В этом параграфе приводятся доказательства теорем 1—4.

Доказательство теоремы 1. Пусть A — θ -виландтова подгруппа группы G , обладающая конечным числом сопряженных. Тогда по лемме 11 $R_0(G) \subseteq A$ и по лемме 1 работы Б. И. Плоткина [3] группа $A/R_0(G)$ конечна. По известной лемме Дизмана конечной будет и нормальный делитель

$$\bar{B} = \{g^{-1} A g | g \in G\} / R_0(G)$$

группы $\bar{G} = G/R_0(G)$. Пусть $H \text{ Syl}(U \theta)$ -подгруппа в G . Тогда из конечности числа $|\bar{G} : N_{\bar{G}}(\bar{A})|$ следует конечность $|\bar{G} : N_{\bar{G}}(\bar{A})|$ а из этого — конечность индекса $|\bar{H} : N_{\bar{G}}(\bar{A}) \cap \bar{H}|$, где $\bar{H} = HR_0(G)/R_0(G)$. Но по лемме 10 $\bar{H} \cap N_{\bar{G}}(\bar{A})$ содержится в конечной группе $\bar{A}$. Следовательно, $\bar{H}$ конечна, и поэтому конечна группа $\bar{H}\bar{B}$, которая вместе с тем и θ -виландтова, согласно лемме 12. Теперь, применяя относительно группы $\bar{H}\bar{B}$ лемму 8, получаем $\bar{g}^{-1} \bar{H} \bar{g} \subseteq \bar{A}$, $\bar{g} \in \bar{H}\bar{B}$. Переход к прообразам и по существу завершает доказательство теоремы.

Доказательство теоремы 2. Пусть A — θ -виландтова подгруппа группы G . Тогда по лемме 11 $R_0(G) \subseteq A$. По условию группа

$$A_X R_0(G) / R_0(G) \cong A_X / R_X(G),$$

где $X \in \theta$, конечна. Из конечности группы $G/R_0(G)$ следует, что существует конечное число классов из θ , для которых не $A_X \triangleleft G$. Пусть такими классами являются $X_1, \dots, X_n$. Тогда

$$A_{X_i} = B_i R_{X_i}(G), \quad (6)$$

где B_i — конечная группа, $i = 1, \dots, n$.

Пусть $C \text{ Syl}(U \theta)$ -подгруппа в G . Ввиду $CR_0(G) \in \text{Syl}(U \theta)$ можно считать, что $R_0(G) \subseteq C$. Предположим, что $C = C' R_0(G)$, где C' конечна. Обозначим еще $D = D' R_0(G)$, где $D' = \langle C', B_1, \dots, B_n \rangle$. Ясно, что D' конечна. Она и θ -виландтова. Действительно, пусть B_i — содержащая B_i максимальная X_i -подгруппа группы D' . Тогда учитывая (6), получаем

$$A_{X_i} \subseteq B_i R_{X_i}(G), \quad B_i R_{X_i}(G) \in X_i,$$

а отсюда ввиду того, что A_{X_i} максимальна в G как X_i -подгруппа, получаем $A_{X_i} = B_i R_{X_i}(G)$, т. е. $B_i \subseteq A_{X_i}$, $i = 1, \dots, n$. Но тогда,

очевидно, $\{B_1, \dots, B_n\}$ будет θ -разложимой, как подгруппа группы A . Прибавляя к ней X -подгруппы группы D' для классов $X \neq X_i$, $i=1, \dots, n$, мы получаем θ -виландтову подгруппу A' группы D' .

Теперь, по лемме 8 для некоторого $g \in D'$ $g^{-1} C' g \subseteq A'$. Отсюда

$$g^{-1} C g = g^{-1} C' g R_0(G) \subseteq A' R_0(G) = A.$$

Это и требовалось доказать.

Следствие. Пусть локально конечная группа G обладает θ -виландтовой подгруппой конечного индекса. Тогда, если каждая конечная подгруппа G является D_X -группой для всех $X \in \theta$, то все ее $\text{Syl}(U^\theta)$ -подгруппы θ -разложимы.

Доказательство. Не сложно показать, что в предположениях следствия θ -радикал группы G имеет в ней конечный индекс. Остается воспользоваться доказательством теоремы 2.

Для доказательства теоремы 3 нам нужна следующая лемма. Пусть X — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов и

$$\Pi^\theta \subseteq X \subseteq \overline{\text{Syl}(U^\theta)},$$

Лемма 13. Пусть периодическая группа G обладает такой θ -виландтовой подгруппой A , что $\bar{G} = G/N_G[A]$ является θN -группой, в которой θ -виландтовы подгруппы суть максимальные X -подгруппы. Тогда из $\bar{G} \in D_X$ следует $G \in D_X$.

Доказательство. Отметим сначала, что группа

$$\bar{A} = AN_G[A]/N_G[A]$$

является θ -виландтовой подгруппой группы $\bar{G}$, как следует из включения $N_G[A] \subseteq N_G(A_X)$ и леммы 2 работы [8], согласно которой образ максимальной X -подгруппы A_X группы A и, следовательно G , будет такой же подгруппой в $\bar{G}$ при естественном гомоморфизме $G \rightarrow \bar{G}$. Теперь, если H — X -подгруппа в G , то $\bar{H} = HN_G[A]/N_G[A]$ будет X -группой и по условию $\bar{g}^{-1} \bar{H} \bar{g} \subseteq \bar{A}$, где $\bar{g} \in \bar{G}$. Переходя к прообразам, получаем $g^{-1} H g \subseteq A \cdot N_G[A]$, т. е. если $h \in H$, то $g^{-1} h g = ab$, где $a \in A$, $b \in N_G[A]$. Таким образом, $g^{-1} h g \in N_G(A)$ и остается воспользоваться леммой 10.

Доказательство теоремы 3. Покажем, что $\bar{G}$ — θ -виландтова. Обозначим $\bar{A} = AN_G[A]/N_G[A]$. Пусть A_X — максимальная X -подгруппа в A и пусть

$$\bar{A}_X = A_X N_G[A]/N_G[A] \subseteq \bar{B} = B N_G[A] \in X. \quad (7)$$

Так как $\bar{G}$ — θN -группа и включение в (7) строгое, то для некоторого $\bar{b} \in \bar{B} \setminus \bar{A}_X$ будет $\bar{b}^{-1} \bar{A}_X \bar{b} = \bar{A}_X$. Отсюда для каждого $a \in A_X$

получаем $a's = b^{-1}ab$, где $a' \in A_X$, $b \in B$, $s \in N_G[A]$. По лемме 2 из [8] можно предполагать, что $|b| \in X$. Теперь ясно, что $b^{-1}ab \in N_G(A_X)$ и, следовательно, $b^{-1}ab \in A_X$. Таким образом, $b \in N_G(A_X)$ и снова $b \in A_X$, так как $|b| \in X$. Полученное противоречие и показывает, что $\overline{A_X}$ максимальна в $\overline{G}$ как X -подгруппа, и, следовательно, $\overline{G}$ θ -виландтова.

Группа $\overline{G}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2. По этой теореме $\overline{G} \in D_{\text{Syl}(U^\theta)}$. С другой стороны, по следствию из теоремы 2 в $\overline{G}$ θ -виландтовы подгруппы являются максимальными $\text{Syl}(U^\theta)$ -подгруппами. К группе G можно применить лемму 13, которая нам и дает $G \in D_{\text{Syl}(U^\theta)}$.

Доказательство теоремы 4. По лемме 10 A содержит все $\text{Syl}(U^\theta)$ -элементы группы $N_G[A]$. Тогда группа $K = A \cap N_G[A]$ составлена из всех $\text{Syl}(U^\theta)$ -элементов группы $N_G[A]$ и характеристична в ней. Следовательно $K \triangleleft G$. Ясно, что группа A/K конечна и содержит конечное число сопряженных в G/K , в силу изоморфизма $A/K \simeq AN_G[A]/N_G[A]$. По лемме Дицмана $\{g^{-1}Ag/g \in G\} K/K$ будет конечным нормальным делителем в G/K . Тогда очевидно, для всякой $\text{Syl}(U^\theta)$ -подгруппы B группы G $G_1 = B\{g^{-1}Ag/g \in G\}$ — периодическая группа, так как при $|\theta| > 1$ классы из θ периодичны по лемме 1 из (8), а при $|\theta| = 1$ $\text{Syl}(U^\theta)$ — класс периодических групп по предположению. Теперь, учитывая

$$N_{G_1}[A] = N_G[A] \cap G_1,$$

получаем

$$G_1/N_{G_1}[A] \simeq G_1N_G[A]/N_G[A].$$

Таким образом, группа G_1 удовлетворяет всем условиям теоремы 3. По этой теореме для некоторого $g \in G_1$ $g^{-1}Bg \subseteq A$. Теорема доказана.

Армянский государственный пединститут
им. Х. Абовяна

Поступила 15.III.1977

Հ. Ս. ՄԻԿԱԵԼԻԱՆ. D -թեորեմներ վիլանդյան խմբերի շրջ դասերում (ամփոփում)

Հոդվածում կիրառվում է աքսիոմատիկ մեթոդ խմբերի սիլովյան տեսության մեջ: Մտնվում են D -թեորեմներ և θ -վիլանդյան խմբի գաղափարներն ու ապացուցվում D -թեորեմներ θ -վիլանդյան խմբերի որոշ դասերում:

G. S. MIKAELIAN. D -theorems in some classes of Vilandt groups (summary)

The axiomatic approach to the Sylow group theory is used. In terms of classes of groups the notions of D -theorem and of θ -Vilandt group is established and generalized.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Г. Курош. Теория групп, М., Изд. „Наука“, 1967.
2. H. Wilandt. Zum Satz von Sylow, Math. Z., 60, 1954, 407—408; 71, 1959, 461—462.
3. Б. И. Плоткин. Абстрактные силовские свойства, Тр. Уральск. Электромех-ин-та инж. ж-д. трансп., 1959, вып. 2, 7—14.
4. Б. И. Плоткин. Радикалы в группах, операции на классах групп и радикальные классы, Избранные вопросы алгебры и логики, Сборник, посвященный памяти А. И. Мальцева, Новосибирск, 1973.
5. Ph. Hall. Theorems like Sylow, Proc. London Math. Soc., 6, 1956, 286—304.
6. Ph. Hall. On non-strictly simple groups, Proc. Cambr. Phil. Soc., 59, 1963, 531—553.
7. П. А. Гольберт. К теореме Виландта, УМН, 14, № 1, 1959, 153—156.
8. Г. С. Микаелян. О силовских базах бесконечных групп относительно расщепляемой системы силовских классов, Изв. АН Арм.ССР, „Математика“, VI, № 5, 1971, 394—405.
9. Г. С. Микаелян. О Q -картеровых подгруппах локально конечных групп, ДАН Арм.ССР, V, № 1, 1972, 7—9.
10. А. П. Дуцман, А. Г. Курош, А. И. Узков. Sylowsche Untergruppen von unendlichen Gruppen, Мат. сб., 3., 1938, 179—185.
11. П. А. Гольберт. S -радикал и силовские базы бесконечных групп, Мат. сб., 50, 1960, 25—42.
12. S. E. Stonehewer. Abnormal subgroups of a class of periodic locally soluble groups, Proc. London Math. Soc., 14, 1964, 520—536.