ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

И. П. МИЛОВИДОВА

О МНОЖЕСТВЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТОЧЕК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СРЕДНИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ЧИСЛОВОГО РЯДА

Введение

Рассмотрим условно сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

с действительными членами. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} Pa_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n' \tag{2}$$

получается из ряда (1) в результате некоторой перестановки членов. Обозначим через s_k — k-ую частную сумму ряда (2), а через $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k$ — n-ую среднюю арифметическую ряда (2). Мы будем рассматривать вопрос о множестве предельных точек последовательности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \cdots$ средних арифметических ряда (2) и свойства этих множеств. Для описания свойств этих множеств мы докажем две теоремы. В работе [1] мы получили те же самые свойства для последовательностей частных сумм ряда (2).

§ 1. Теорема о множестве предельных точек последовательности средних арифметических ряда

Теорема 1. *Множество F — предельных точек последовательности средних арифметических ряда* (2) *есть либо точка, либо отрезок вещественной оси, конечный или бесконечный.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1 докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть F — множество предельных точек последовательности средних арифметических ряда* (2), *получаемого перестановкой членов из условно сходящегося ряда, и пусть a и b — две точки этого множества. Тогда*

$$[a, b] \subset F \tag{3}$$

Доказательство. Если включение (3) неверно, то существует точка c, такая, что $c \in (a, b)$, $c \notin F$. Так как множество F замкнуто, то существует такой интервал (a', b'), что $a < a' < b' < b$, $(a', b') \cap F = \varnothing$. Возьмем число ε_0, удовлетворяющее условиям

$$0 < \varepsilon_0 < b' - a'. \tag{4}$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma_{n+1} - \sigma_n) = 0$. Действительно, так как ряд (1) условно сходится, то n-ая частная сумма s_n ряда (2) удовлетворяет соотношению $s_{n+1} - s_n = a'_n \to 0$ при $n \to \infty$. Так как метод средних арифметических регулярен, то отсюда вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s_{k+1} - s_k)\right| = 0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(s_{k+1} - s_k) = \frac{1}{n}\sum_{k'=2}^{n+1} s_{k'} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} s_k -$$

$$- \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k - \frac{s_1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\sigma_{n+1} - \sigma_n - \frac{s_1}{n} = (\sigma_{n+1} - \sigma_n) - \frac{\sigma_{n+1}}{n} - \frac{s_1}{n}.$$

Отсюда и из соотношения (5) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sigma_{n+1} - \sigma_n - \frac{1}{n}\sigma_{n+1} - \frac{1}{n}s_1\right) = 0. \tag{6}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a'_n = 0$, то из регулярности метода средних арифметических вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a'_j = \lim_{k\to\infty}\frac{s_k}{k} = 0.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число k_0, что $\left|\frac{s_k}{k}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ для $k > k_0$. Следовательно, для любого $n > k_0$

$$|\sigma_n| < \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k_0} s_k\right| + \frac{\varepsilon}{2n}\sum_{k=k_0+1}^{n} k < \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k_0} s_k\right| + \frac{\varepsilon n}{2}. \tag{7}$$

Далее, для ε найдется такое натуральное число n_0, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k_0} s_k\right| < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}n$, откуда и из соотношения (7) вытекает, что для $n > n_0$ $\left|\frac{1}{n}\sigma_n\right| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sigma_n = 0$. Учитывая это и принимая во внимание соотношение (6), получаем $\lim\limits_{n\to\infty}(\sigma_{n+1} - \sigma_n) = 0$. Это значит, что для ε_0, удовлетворающего неравенству (4), найдется такое натуральное число N, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство

$$|\sigma_{n+1} - \sigma_n| < \varepsilon_0. \tag{8}$$

Возьмем на интервале (a', b') какой-нибудь отрезок $[a'', b'']$ длины ε_0 (это можно сделать в силу соотношения (4)). Так как a и b — предельные точки для последовательности средних арифметических ряда (2), то отсюда и из неравенства (8) следует, что на отрезке $[a'', b'']$ находятся величины σ_n для бесчисленного множества различных номеров n; а в таком случае на $[a'', b''] \subset (a', b')$ лежит предельная точка последовательности σ_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$.

Следовательно, наш вывод, что интервал (a', b') не содержит ни одной предельной точки множества F — предельных точек последовательности средних арифметических ряда (2) неверен; к этому выводу мы пришли, исходя из предположения, что включение (3) неверно. Следовательно, оно верно и лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Покажем, что множество F замкнуто и связно, а так как всякое замкнутое связное множество точек на прямой есть либо точка, либо отрезок этой прямой (конечный или бесконечный), то отсюда будет вытекать утверждение теоремы 1. Замкнутость множества F следует из того, что множество предельных точек любой последовательности замкнуто. Докажем, что множество F связано. В самом деле, если оно состоит из одной точки, то теорема доказана. Если же существуют две точки a и b, $a < b$, такие, что $a \in F$, $b \in F$, то из леммы вытекает, что F — связное множество и доказательство теоремы 1 завершено.

§ 2. Теорема о некоторых перестановках членов ряда

Теорема 2. *Если ряд* (1) *с действительными членами условно сходится, и если задан отрезок* $[a, b]$ *действительной оси, то члены ряда* (1) *можно переставить так, что у ряда* (2), *полученного в результате этой перестановки, множество предельных точек последовательности средних арифметических совпадает с отрезком* $[a, b]$.

Доказательство. Так как ряд (1) условно сходится, то его можно разбить на три ряда:

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i = \infty \quad (d_i > 0;\ i = 1, 2, 3, \cdots), \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \infty \quad (c_i > 0;\ i = 1, 2, 3, \cdots), \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = -\infty \quad (b_i < 0;\ i = 1, 2, 3, \cdots), \tag{11}$$

не содержащих общих членов. Отсюда следует, что

$$\lim_{i\to\infty} b_i = \lim_{i\to\infty} d_i = 0. \tag{12}$$

Пусть a_1 — первый член ряда (1), и пусть ε_1 такое положительное число, что удовлетворяется неравенство

$$2|a_1 - a| < \varepsilon_1. \tag{13}$$

Переставляя члены ряда (1), будем строить ряд (2), обозначая через s'_n его n-ую частную сумму, а через σ'_n — его среднее арифметическое порядка n. Таким образом

$$\sigma'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s'_k. \tag{14}$$

Положим $a'_1 = a_1$. Пусть натуральное число ω_1 так велико, что удовлетворяется неравенство

$$\frac{3\varepsilon_1 + |b - a|}{\omega'} < \varepsilon_1 \tag{15}$$

($\varepsilon_1 > 0$ удовлетворяет соотношению (13)). Из ряда (10) возьмем в определяемый ряд (2) ω' членов $c_j^{(0)}$ $(1 \leqslant j \leqslant \omega')$ так, чтобы

$$\left|\sum_{j=1}^{\omega'} c_j^{(0)}\right| < \frac{\varepsilon_1}{2} - |a_1 - a| \tag{16}$$

(это возможно сделать, так как ряд (10) сходится)*. В силу неравенства (16)

$$\left| a - \left(a_1 + \sum_{j=1}^{\omega'} c_j^{(0)}\right)\right| \leqslant |a - a_1| + \left|\sum_{j=1}^{\omega'} c_j^{(0)}\right| < |a - a_1| +$$

$$+ \frac{\varepsilon_1}{2} - |a_1 - a| = \frac{\varepsilon_1}{2}.$$

Полагая

$$\omega' + 1 = m_1, \tag{17}$$

отсюда имеем: $|s_{m_1} - a| < \frac{\varepsilon_1}{2}$. Из соотношений (17) и (15) получаем: $\frac{3\varepsilon_1 + |b - a|}{m_1} < \varepsilon_1$. Оценим $|\sigma'_{m_1} - a|$. Из определения σ'_{m_1} и соотношений (16) и (17) имеем

$$|\sigma'_{m_1} - a| = \left|\frac{1}{m_1}\left[m_1 a_1 + \sum_{j=1}^{\omega'} (m_1 - j)\, c_j^{(0)}\right] - a\right| < |a_1 - a| +$$

* Здесь и всюду в дальнейшем, при построении ряда (2) из рядов (9), (10), (11) мы берем члены, еще не использованные в процессе построения ряда (2).

$$+\frac{1}{m_1}\left|\sum_{i=1}^{\omega'}\sum_{j=1}^{i} c_j^{(0)}\right| < |a_1 - a| + \frac{1}{m_1} m_1 \left|\sum_{j=1}^{\omega'} c_j^{(0)}\right| < \frac{\varepsilon_1}{2},$$

и, следовательно,

$$|s'_{m_1} - a| < \varepsilon_1. \qquad (18)$$

Рассмотрим последовательность чисел, удовлетворяющих условию

$$b - a > \varepsilon_1 > 2\varepsilon_2 > 2^2\varepsilon_3 > \cdots > 2^{k-1}\varepsilon_k > 2^k\varepsilon_{k+1} > \cdots > 0, \qquad (19)$$

где ε_1 удовлетворяет неравенству (13). Пусть заданы натуральные числа m_k $(k=1, 2, 3, \cdots, r)$ и n_k $(k = 1, 2, 3, \cdots, r-1)$ такие, что удовлетворяются неравенства

$$m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < \cdots < m_k < n_k < m_{k+1} < \cdots < m_r,$$

$$\frac{3\varepsilon_k + |b - a|}{m_k} < \varepsilon_k \ (k = 1, 2, \cdots, r). \qquad (20)$$

Предположим, что у ряда (2) уже определены члены от номера 1 до номера m_r так, что

$$|s'_{m_k} - a| < \varepsilon_k \ (k = 1, 2, \cdots, r), \qquad (21)$$

$$|s'_{m_k} - a| < \frac{\varepsilon_k}{2} \ (k = 1, 2, \cdots, r). \qquad (22)$$

Заметим, что из соотношений (21) и (22) при $k = r$ в силу неравенств $|s'_{n_r} - s'_{m_r}| \leqslant |s'_{m_r} - a| + |s'_{n_r} - a|$ вытекает, что

$$|s'_{m_r} - s'_{m_r}| < \frac{3}{2}\varepsilon_r. \qquad (23)$$

Частная сумма s'_{m_r} может лежать на числовой оси : 1) левее точки a, 2) на отрезке $[a, b]$, 3) правее точки b. В третьем случае из неравенства (22) следует, что

$$|s'_{m_r} - b| < \frac{\varepsilon_r}{2}. \qquad (24)$$

В случае 1 и 2, если не выполняется неравенство (24), определяемый ряд (2), после того, как задана частная сумма s'_{m_r}, строим следующим образом. В качестве следующих членов определяемого ряда (2) возьмем из ряда (10) столько положительных членов по модулю меньших $\frac{\varepsilon_r}{2}$* (обозначим их через $d_1^{(r)}, d_2^{(r)}, \cdots, d_{v_r}^{(r)}$), чтобы выполнялись неравенства

$$0 < b - s'_{m_r} - \sum_{k=1}^{v_r} d_k^{(r)} < \frac{\varepsilon_r}{2}.$$

---

* Это возможно в силу соотношения (12).

Итак

$$0 < b - s'_{m_r+v_r} < \frac{\varepsilon_r}{2} \tag{25}$$

(если неравенство (24) выполняется, то полагаем $v_r = 0$). Пусть

$$\left| \sum_{k=2}^{m_r+v_r} (k-1)\, a_k \right| + 1 = M. \tag{26}$$

Возьмем натуральное число

$$\omega_r > 1 \tag{27}$$

настолько большим, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\frac{M}{m_r + v_r + \omega_r} < \frac{\varepsilon_r}{4} \cdot \tag{28}$$

В силу сходимости ряда (10) из него можно взять ω_r членов, не вошедших в частную сумму $s'_{m_r+v_r}$ (обозначим их через $c_k^{(r)}$, $k=1, 2, \cdots, \omega_r$) так, что

$$c_k^{(r)} < 0, \sum_{k=1}^{\omega_r} c_k^{(r)} < \min\left(\frac{\varepsilon_r}{4},\ b - s'_{m_r+v_r},\ \frac{\varepsilon_r}{2} - |b - s'_{m_r}|\right) \cdot \tag{29}$$

После члена с номером $m_r + v_r$ поместим взятые нами члены $c_k^{(r)}$ $(k = 1, 2, \cdots, \omega_r)$ в определяемый ряд (2) в том порядке, в каком они расположены в ряде (10). Положим

$$m_r + v_r + \omega_r = n_r. \tag{30}$$

Таким образом, мы определили члены определяемого ряда (2) для значений n, удовлетворяющих неравенству

$$m_r < n \leqslant n_r. \tag{31}$$

Отметим при этом, что члены ряда (2) для n, удовлетворяющих неравенству (31) есть либо $d_k^{(r)} > 0$ $(k = 1, 2, \cdots, v_r)$, либо $c_k^{(r)} > 0$ $(k = 1, 2, \cdots, \omega_r)$. Из соотношений (27) и (30) ясно, что $m_r < n_r$. Из неравенств (25), (29) соотношения (30) и построения ряда (2) следует, что

$$0 < b - s'_{n_r} < \frac{\varepsilon_r}{2}, \tag{32}$$

или в силу соотношения (30)

$$0 < b - s'_{m_r} - \sum_{k=1}^{v_r} d_k^{(r)} - \sum_{k=1}^{\omega_r} c_k^{(r)} < \frac{\varepsilon_r}{2} \cdot$$

Отсюда и из соотношения (22) имеем

$$0 < \sum_{k=1}^{v_r} d_k^{(r)} + \sum_{k=1}^{\omega_r} c_k^{(r)} < b - s'_{m_r} < |b - a| + \frac{\varepsilon_r}{2} \cdot \tag{33}$$

Из соотношения (32) вытекает, что

$$|b - s'_{n_r}| < \frac{\varepsilon_r}{2}. \tag{34}$$

Заметим, что из неравенства (33) и построения определяемого ряда (2) следует, что

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a'_{m_r+i}\right| \leqslant \sum_{j=1}^{v_r} d_j^{(r)} + \sum_{j=1}^{\omega_r} c_j^{(r)} < |b-a| + \frac{\varepsilon_r}{2} \tag{35}$$

$$(1 \leqslant k \leqslant v_r + \omega_r).$$

Оценим разность $s'_{n_r} - \sigma'_{n_r}$. Учитывая соотношения (26), (23), (29), (30) и определение $c_k^{(r)}$ и ω_r после (28) получаем $c_k^{(r)} > 0$, $k = 1, 2, \cdots, \omega_r$ и

$$|\sigma'_{n_r} - s'_{n_r}| = |\sigma'_{m_r+v_r+\omega_r} - s'_{m_r+v_r+\omega_r}| =$$

$$= \frac{1}{m_r + v_r + \omega_r}\left|\sum_{k=1}^{m_r+v_r+\omega_r} s'_k - (m_r + v_r + \omega_r)\, s'_{m_r+v_r+\omega_r}\right| =$$

$$= \frac{1}{m_r + v_r + \omega_r} \cdot \left|\sum_{k=1}^{m_r+v_r} s'_k + \omega_r s'_{m_r+v_r} + \sum_{i=1}^{\omega_r} (\omega_r - i + 1)\, c_i^{(r)} - \right.$$

$$\left. - (m_r + v_r + \omega_r)\left(s'_{m_r+v_r} + \sum_{i=1}^{\omega_r} c_i^{(r)}\right)\right| <$$

$$< \frac{1}{m_r + v_r + \omega_r}\left\{\left|\sum_{k=2}^{m_r+v_r} (k-1)\, a'_k\right| + \left|\sum_{i=1}^{\omega_r} (m_r + v_r + i - 1)\, c_i^{(r)}\right|\right\},$$

откуда

$$|s'_{n_r} - \sigma'_{n_r}| < \frac{M}{m_r + v_r + \omega_r} + \sum_{k=1}^{\omega_r} c_k^{(r)} < \frac{\varepsilon_r}{2}. \tag{36}$$

Отсюда и из соотношений (34) следует, что

$$|\sigma'_{n_r} - b| < \varepsilon_r. \tag{37}$$

Принимая во внимание (22) и (37), естественно ввести следующее

Определение 1. Построение частных сумм определяемого ряда (2) для номера n, удовлетворяющих неравенству

$$m_r < n \leqslant n_r, \tag{38}$$

назовем r-ым обходом отрезка $[a, b]$ слева направо из точки s_{m_r}.

Докажем теперь, что все обобщенные частные суммы σ'_n определяемого ряда (2) с номерами n, удовлетворяющими неравенству (38), лежат на отрезке $[a-3\varepsilon_r, b+3\varepsilon_r]$. Действительно, в силу соотношения

$$\sigma_n' = \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_k' \tag{39}$$

для этих номеров n

$$\sigma_n'=s_{m_r}'+(\sigma_n'-s_{m_r}')=(s_{m_r}'-a)+a-\sum_{k=1}^{m_r}\frac{k-1}{n}a_k'+\sum_{k=m_r+1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_k'. \tag{40}$$

Полагая в (39) $n=m_r$, получаем

$$|\sigma_{m_r}'-s_{m_r}'|=\left|\sum_{k=1}^{m_r}\left(1-\frac{k-1}{m_r}\right)a_k'-\sum_{k=1}^{m_r}a_k'\right|=\frac{1}{m_r}\left|\sum_{k=1}^{m_r}(k-1)\,a_k'\right|.$$

Отсюда и из соотношения (23) вытекает, что

$$\frac{1}{m_r}\left|\sum_{k=1}^{m_r}(k-1)\,a_k'\right|<\frac{3}{2}\varepsilon_r.$$

Из последнего неравенства и из (38)

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m_r}(k-1)\,a_k'\right|\leqslant\frac{1}{m_r}\left|\sum_{k=1}^{m_r}(k-1)\,a_k'\right|<\frac{3}{2}\varepsilon_r. \tag{41}$$

В силу (33), (35) и замечания после неравенства (31) имеем для номеров n, удовлетворяющих этому неравенству

$$0\leqslant\sum_{k=m_r+1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a_k'\leqslant\sum_{k=m_r+1}^{n}a_k'<\sum_{k=1}^{v_r}d_k^{(r)}+$$

$$+\sum_{k=1}^{m_r}c_k^{(r)}<|b-a|+\frac{\varepsilon_2}{2}. \tag{42}$$

В силу (22), (41) и (42) для номеров n, удовлетворяющих неравенству (38), из (40) вытекает

$$a-\frac{\varepsilon_r}{2}-\frac{3}{2}\varepsilon_r<\sigma_n'<a+|b-a|+3\varepsilon_r,\ \text{то есть}$$

Все обобщенные частные суммы σ_n' определяемого ряда (2), *полученные при r-ом обходе отрезка $[a, b]$ слева направо* (*см. определение* 1), *лежат на отрезке $[a-3\varepsilon_r, b+3\varepsilon_r]$.*

После r-го обхода отрезка $[a, b]$ слева направо, строим далее ряд (2) следующим образом. Из ряда (1) берем первый член, не использованный при построении ряда (2) (обозначим его через $a^{(r)}$) и помещаем его на (n_r+1)-ое место в ряде (2). В силу неравенства (34) имеем

$$|s_{n_r+1}-b|=|s'_{n_r}+a^{(r)}-b|\leqslant\frac{\varepsilon_r}{2}+|a^{(r)}|. \tag{44}$$

Из определения s'_n (см. 14)) и неравенств (37) и (44) вытекает

$$|s'_{n_r+1}-b|=\left|\frac{n_r}{n_r+1}\cdot\frac{1}{n_r}\left(\sum_{i=1}^{n_r}s_i+s_{n_r+1}\right)-b\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n_r+1}\left(n_r|s'_{n_r}-b|+|s'_{n_r+1}-b|\right)<|a^{(r)}|+\frac{3}{2}\varepsilon_r. \tag{45}$$

Частная сумма s'_{n_r+1} удовлетворяет одному из двух неравенств: случай 1

$$s'_{n_r+1}\geqslant a, \tag{46}$$

случай 2

$$s'_{n_r+1}<a. \tag{47}$$

В случае 1 определяемый ряд (2) строим далее так. Из ряда (11) в ряд (2) помещаем члены $b_i^{(r)}$ $(i=1, 2,\cdots, u_r)$, не вошедшие в частную сумму s'_{n_r+1}, такие, что

$$|b_i^{(r)}|<\frac{\varepsilon_r}{2}\quad(i=1, 2,\cdots, u_r), \tag{48}$$

причем u_r выбираем так, что

$$s'_{n_r+1}+\sum_{i=1}^{u_r-1}b_i^{(r)}\geqslant a,$$

$$s'_{n_r+1}+\sum_{i=1}^{u_r}b_i^{(r)}<a \tag{49}$$

(это возможно сделать в силу определения ряда (11) и соотношения (12). В случае 2 полагаем $u_r=0$. В случае 1 из неравенств (48), (49) и построения определяемого ряда (2) вытекает, что

$$0<a-s'_{n_r+1+u_r}<\frac{\varepsilon_r}{2}. \tag{50}$$

Очевидно, что в случае 2, когда $u_r=0$, из (47) получаем $s'_{n_r+1+u_r}<a$, а из (34) и определения $a^{(r)}$ имеем

$$0<a-s'_{n_r+1+u_r}<b-s'_{n_r+1+u_r}<|a^{(r)}|+\frac{\varepsilon_r}{2}.$$

Из двух последних неравенств и соотношения (50), справедливого для случая 1, следует, что во всех случаях выполняются неравенства

$$0<a-s'_{n_r+1+u_r}<|a^{(r)}|=\frac{\varepsilon_r}{2}. \tag{51}$$

После члена с номером $n_r + 1 + u_r$ определяемый ряд (2) строим следующим образом. Из ряда (9) берем в ряд (2) члены, не вошедшие в частную сумму $s'_{n_r+1+u_r}$, $\tilde{d}_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, \cdots, t_r)$ так, чтобы удовлетворялись неравенства

$$|\tilde{d}_i^{(r)}| < \frac{\varepsilon_{r+1}}{2} \; (i = 1, 2, \cdots, t_r), \tag{52}$$

$$0 < a - \left(s'_{n_r+1+u_r} + \sum_{i=1}^{t_r} \tilde{d}_i^{(r)} \right) < \frac{\varepsilon_{r+1}}{2} \tag{53}$$

(в силу свойств ряда (9), соотношения (12) и неравенства (51) это возможно сделать). Пусть натуральное число p_r так велико, что удовлетворяются неравенства

$$\frac{3\varepsilon_{r+1} + |b - a|}{p_r} < \varepsilon_{r+1}, \tag{54}$$

$$\frac{1}{p_r} \left| \sum_{i=2}^{n_r+1+u_r+t_r} (i-1)\, a'_i \right| < \frac{\varepsilon_{r+1}}{4}. \tag{55}$$

После того, как построена частная сумма определяемого ряда (2) с номером $n_r + 1 + u_r + t_r$, в ряд (2) помещаем p членов ряда (10), не вошедших в сумму $s_{n_r+1+u_r+t_r}$ (обозначим их через $\tilde{c}_i^{(r)}$, $i = 1, 2, \cdots, p_r$), причем p_r выбираем так, чтобы выполнялись условия:

$$\sum_{i=1}^{p_r} \tilde{c}_i^{(r)} < \frac{\varepsilon_{r+1}}{4}, \tag{56}$$

$$0 < a - \left(s'_{n_r+1+u_r} + \sum_{i=1}^{t_r} \tilde{d}_i^{(r)} + \sum_{i=1}^{p_r} \tilde{c}_i^{(r)} \right) < \frac{\varepsilon_{r+1}}{2} \tag{57}$$

(это возможно сделать в силу соотношений (10) и (53). Из неравенств (51), (57) и положительности $\tilde{d}_i^{(r)}$ $(i = 1, 2, \cdots, t_r)$ и $\tilde{c}_i^{(r)} (i = 1, 2, \cdots, p_r)$ вытекает, что

$$0 < \sum_{i=1}^{t_r} \tilde{d}_i^{(r)} + \sum_{i=1}^{p_r} \tilde{c}_i^{(r)} < \frac{\varepsilon_r}{2} + |a^{(r)}| + \frac{\varepsilon_r}{2} = |a^{(r)}| + \varepsilon_r, \tag{58}$$

так как $\varepsilon_{r+1} < \varepsilon_r$ (см. (19)). Положим

$$n_r + 1 + u_r + t_r + p_r = m_{r+1}. \tag{59}$$

Из (57) и (59) и построения определяемого ряда имеем

$$|s'_{m_{r+1}} - a| < \frac{\varepsilon_{r+1}}{2}. \tag{60}$$

Из соотношения (39) (в котором полагаем $n = m_{r+1}$) неравенств (55), (56) и соотношения (59) следует, что

$$|\sigma'_{m_{r+1}} - s'_{m_{r+1}}| = \frac{1}{m_{r+1}} \left| \sum_{i=2}^{m_{r+1}} (i-1) a'_i \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m_{r+1}} \left| \sum_{i=2}^{n_r+1+u_r+t_r} (i-1) a_i \right| + \sum_{i=1}^{p_r} \tilde{c}_i^{(r)} < \frac{\varepsilon_{r+1}}{2}. \tag{61}$$

В силу неравенств (60) и (61) имеем

$$|\sigma'_{m_{r+1}} - a| \leqslant |\sigma'_{m_{r+1}} - s'_{m_{r+1}}| + |s'_{m_{r+1}} - a| < \varepsilon_{r+1}. \tag{62}$$

Принимая во внимание (37) и (62) естественно ввести следующее

Определение 2. Построение определяемого ряда (2) для частных сумм с номерами n, удовлетворяющими неравенству

$$n_r < n \leqslant m_{r+1}, \tag{63}$$

назовем r-ым *обходом отрезка* $[a, b]$ *справа налево* из точки s'_{n_r}.

Оценим теперь σ'_n для номеров n, удовлетворяющих неравенству (63). В силу соотношения (39)

$$\sigma'_n = s'_{n_r} + \sigma'_n - s'_{n_r} = s'_{n_r} + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a'_k - \sum_{k=1}^{n_r} a'_k =$$

$$= (s'_{n_r} - b) + b - \sum_{k=1}^{n_r} \frac{k-1}{n} a'_k + \sum_{k=n_r+1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a'_k. \tag{64}$$

Из (39) при $n = n_r$ и неравенства (36) имеем

$$|\sigma'_{n_r} - s'_{n_r}| < \frac{\varepsilon_r}{2}.$$

Отсюда получаем, в частности

$$\frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^{n_r} (k-1) a'_k \right| < \frac{\varepsilon_r}{2} \quad (n_r < n \leqslant m_{r+1}). \tag{65}$$

В соотношении (64) оценим последнюю сумму. Из (59) и построения определяемого ряда (2) (см. определение $a^{(r)}$ после (43), рассуждения после (47)) имеем

$$\left| \sum_{k=n_r+1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a'_k \right| \leqslant \sum_{k=n_r+1}^{n} |a'_k| < |a^{(r)}| + \sum_{k=n_r+2}^{m_{r+1}} |a'_k| =$$

$$= |a^{(r)}| + \sum_{i=1}^{u_r} |b_i^{(r)}| + \sum_{i=1}^{t_r} \tilde{d}_i^{(r)} + \sum_{i=1}^{p_r} \tilde{c}_i^{(r)} \quad (n_r < n \leqslant m_{r+1}). \tag{66}$$

Из (44), (51) и построения ряда (2) (см. рассуждения после (47)) имеем

$$\sum_{i=1}^{u_r} |b_i^{(r)}| = |s'_{n_r+1+u_r} - s'_{n_r+1}| \leqslant |s'_{n_r+1+u_r} - a| +$$

$$+ |b - s'_{n_r+1}| + |a-b| < |a-b| + 2\,|a^{(r)}| + \varepsilon_r. \qquad (67)$$

Из соотношения (66), в силу неравенств (58) и (67), получаем

$$\left|\sum_{k=n_r+1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a'_k\right| < |a-b| + 4\,|a^{(r)}| + 2\varepsilon_r;\ (n_r < n \leqslant m_{r+1}). \qquad (68)$$

Из соотношения (64), в силу неравенств (34), (65) и (68), имеем

$$\sigma'_n > -\frac{\varepsilon_r}{2} + b - \frac{\varepsilon_r}{2} - |a-b| - 4\,|a^{(r)}| - 2\varepsilon_r = a - 4\,|a^{(r)}| - 3\varepsilon_r, \qquad (69)$$

$$n_r < n \leqslant m_{r+1}.$$

В силу определения $a^{(r)}$ после (43), построения определяемого ряда (2) (см. рассуждения после (47), (51), (55)) и условия (58), имеем $b_i^{(r)} < 0$ $(i = 1, 2, \cdots, u_r)$ и неравенства

$$\sum_{k=n_r+1}^{n}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)a'_k < |a^{(r)}| + \sum_{k=n_r+2}^{n_r+u_r+1}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)b_{k-n_r-1} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{t_r}\tilde{d}_i^{(r)} + \sum_{i=1}^{p_r}\tilde{c}_i^{(r)} < |a^{(r)}| + \left(\sum_{i=1}^{t_r}\tilde{d}_i^{(r)} + \sum_{i=1}^{p_r}\tilde{c}_i^{(r)}\right) < \qquad (70)$$

$$< 2\,|a^{(r)}| + \varepsilon_r,\ n_r < n \leqslant m_{r+1}.$$

Из (64), в силу неравенств (70), (34) и (65), имеем

$$\sigma'_n < |s'_{n_r} - b| + b + \left|\sum_{k=1}^{n_r}\frac{k-1}{n}a'_k\right| + 2\,|a^{(r)}| +$$

$$+ \varepsilon_r < b + 2\,|a^{(r)}| + 2\varepsilon_r\ \ (n_r < n \leqslant m_{r+1}). \qquad (71)$$

Из соотношений (69) и (71) следует, что

При r-ом обходе отрезка $[a, b]$ справа налево (см. определение 2 после (59)) средние арифметические суммы для определяемого ряда (2) лежат на отрезке $[a - 4\,|a^{(r)}| - 3\varepsilon_r,\ b + 4\,|a^{(r)}| + 3\varepsilon_r]$. (72)

Из утверждений (43) и (72) следует, что

Все средние арифметические суммы σ'_n определяемого ряда (2), полученные при r-ом обходе отрезка $[a, b]$ слева направо и при r-ом обходе отрезка $[a, b]$ справа налево, не выходят за пределы отрезка $[a, b]$ дальше чем на $4\,|a^{(r)}| + 3\varepsilon_r$. (73)

Заметим, что $s'_{n_{r+1}}$ и $\sigma'_{m_{r+1}}$ для определяемого ряда (2) удовлетворяют соответственно неравенствам (60) и (62), то есть неравенствам (22) и (21), в которых полагаем $k=r+1$. Далее, натуральное число m_{r+1}, в силу соотношения (59) и (54) удовлетворяет неравенству (20) для $k=r+1$. Тогда у нас выполняются все условия, которые позволяют нам сделать следующий $(r+1)$-ый обход отрезка $[a, b]$ слева направо из точки $s'_{m_{r+1}}$ и справа налево из точки $s'_{n_{r+1}}$ с помощью частных сумм определяемого ряда (2). Сделаем эти обходы. Далее, делая последовательно $(r+2)$, $(r+3)$, $(r+4)$ и т. д. обходы отрезка $[a, b]$ слева направо и справо налево, мы полностью определяем ряд (2). Докажем теперь, что каждая точка отрезка $[a, b]$ является предельной для последовательности средних арифметических сумм σ'_n построенного ряда (2). Действительно, так как соотношения (21) и (37) выполняются соответственно для любых натуральных k и r, то в силу (19) и построения ряда (2) вытекает, что точки a и b являются предельными для последовательности средних арифметических сумм σ'_n ряда (2), и этот ряд получается перестановкой членов из условно сходящегося ряда (1). В таком случае из леммы, доказанной после формулировки теоремы 1, вытекает, что каждая точка отрезка $[a, b]$ является предельной для последовательности средних арифметических построенного ряда (2). Поэтому для доказательства теоремы 2 остается показать, что все предельные точки последовательности средних арифметических σ'_n для построенного ряда (2) лежат на отрезке $[a, b]$. В самом деле, возьмем произвольное $\sigma>0$. Из (19) следует, что $\lim\limits_{r\to\infty} \varepsilon_r=0$; кроме того $a^{(r)}$ $(r=1, 2, 3,\cdots)$ являются различными членами условно сходящегося ряда (1) и, следовательно, $\lim\limits_{r\to\infty} a^{(r)}=0$. Тогда найдется такое натуральное N, что

$$4\,|a^{(r)}|+3\,\varepsilon_r<\frac{\sigma}{2},\ r>N. \tag{74}$$

Из (74), утверждения (73) и построения ряда (2) вытекает, что начиная с N-го обхода отрезка $[a, b]$ слева направо и справа налево, все средние арифметические σ'_n ряда (2) лежат на отрезке $\left[a-\frac{\sigma}{2},\ b+\frac{\sigma}{2}\right]$, а так как σ — произвольное положительное число, то все предельные точки последовательности σ'_n $(n=1, 2,\cdots)$ лежат на отрезке $[a, b]$, и теорема 2 доказана*.

Московский станкоинструментальный институт

Поступила 23.III.1976

* Теорема имеет место и для случая, когда отрезок $[a, b]$ бесконечный. Если, например, отрезок $[a, b]=[a, \infty)$, то ряд (2) строится следующим образом. Пусть $b_1>a$. Возьмем систему отрезков $[a, b_1]$, $[a, b_1+1]$, $[a, b_1+2],\cdots$, $[a, b_1+n],\cdots$. Част-

Ի. Պ. ՄԻԼՈՎԻԴՈՎԱ. Թվային շարքի թվաբանական միջինների հաջորդականության սահմանային կետերի բազմության վերաբերյալ (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում են իրական անդամներով պայմանական զուգամետ շարքեր։ Ապացուցվում է, որ եթե այդպիսի շարքի անդամները որևէ ձևով տեղափոխվեն, ապա տեղափոխված շարքի միջին թվաբանականների սահմանային կետերի բազմությունը հանդիսանում է կետ, կամ իրական առանցքի հատված (վերջավոր կամ անվերջ)։

Ապացուցվում է նաև, որ եթե ուղղի վրա տված է հատված, վերջավոր կամ անվերջ, ապա պայմանական զուգամետ շարքի անդամները կարելի է այնպես տեղափոխել, որ ստացված շարքի միջին թվաբանականների սահմանային կետերի բազմությունը համընկնի տվյալ հատվածի հետ։

I. P. MILOVIDOVA. *On the set of limiting points for the sequence of arithmetical means for numerical series* (summary)

In the paper conditionally convergent series with real elements are considered. it is proved that if elements of any such series undergo permutation, then the set of limiting points of the arithmeticat means for the resulting series is either a point or an interval on, finite or infinite.

Also, every conditionally convergent series may be permitted in such a way, that the set of all limiting points of arithmetic means for the resulting series will coincide with any prescribed interval.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. П. Миловидова.* Ряды с комплексными членами, область сходимости которых есть прямая, Изв. Вуз-ов, Матем., 1971, № 10, 47—56.

ную сумму s'_{m_1} строим так же, как и для случая конечного отрезка $[a, b]$. Затем делаем последовательно обходы первого отрезка системы слева направо и справа налево; обход второго отрезка системы, третьего и т. д.

Если $[a, b] = (-\infty, +\infty)$, то берем систему отрезков $[0, 1]$, $[-1, 0]$, $[0, 2]$, $-2, 0]$, $[0, 3]$, $[-3, 0], \cdots$, полагаем $s'_{m_1} = a_1$ и делаем последовательно обходы каждого отрезка слева направо и справа налево.