ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

А. А. АНДРЯН

ОБЩАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

В выпуклой области D, ограниченной замкнутой ляпуновской кривой Γ, рассмотрим систему уравнений составного типа вида

$$\frac{\partial v_0}{\partial \bar z} - q(x, y)\frac{\partial v_0}{\partial z} = \sum_{j=1}^{m} a^j(x, y)\, v_j + a^0(x, y)\, v_0 + b^0(x, y)\,\bar v_0 + F, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} - \lambda_j(x, y)\frac{\partial v_j}{\partial y} = \sum_{l=1}^{m} b_l^j(x, y)\, v_l + \mathrm{Re}\,(c_j(x, y)\, v_0) + f_j, \tag{2}$$

$$(j = 1, \cdots, m)$$

где $z = x + iy$, $q(x, y)$—комплекснозначная, а $\lambda_1(x, y), \cdots, \lambda_m(x, y)$— — действительные функции, принадлежащие классу $C^1_*(D+\Gamma)$ и $|q(x, y)| \leqslant \text{const} < 1$, а $\lambda_i(x, y) \neq \lambda_j(x, y)$ при $i \neq j$; остальные коэффициенты системы (1)—(2) предполагаем принадлежащими классу $C^1(D+\Gamma)$, причем функции $b_l^j(x, y)$ $(i, j = 1, \cdots, m)$ являются действительными; $F(x, y) \in C_\alpha(D+\Gamma)$, $f_j(x, y) \in C^1(D+\Gamma)(j=1, \cdots, m)$— заданные, а $v_j(x, y) \in C^1(D) \cap C_\alpha(D+\Gamma)$ $(j = 0, 1, \cdots, m)$—искомые функции, причем функции $v_1(x, y), \cdots, v_m(x, y)$, $f_1(x, y), \cdots, f_m(x, y)$ являются действительными.

Предположим, что каждая характеристика семейства характеристик $\varkappa_j(x, y) = \text{const}$ $(j = 1, \cdots, m)$ системы (2), проходящая через область D, пересекает ее границу Γ ровно в двух точках и имеются лишь две характеристики этого семейства, которые касаются границы Γ, соответственно, в точках M_j и N_j, причем касательные в этих точках параллельны. Не ограничивая общности, будем считать, что M_j следует за M_{j+1}, N_j — за N_{j-1}, а N_n следует за M_1, M_n—за N_1.

Положительно ориентированные дуги $\overset{\frown}{M_j N_j}$ и $\overset{\frown}{N_j M_j}$ обозначим, соответственно, через Γ_j^1 и Γ_j^2.

Рассмотрим следующую граничную задачу.

Граничная задача А. Найти решение системы (1)—(2), удовлетворяющее граничным условиям

$$\mathrm{Re}\,[a_0(t)\, v_0(t)] + \sum_{j=1}^{m} a_{0j}(t)\, v_j(t) = h_0(t), \; t \in \Gamma, \tag{3}$$

$$\mathrm{Re}\,[a_k(t)\, v_0(t)] + \sum_{j=1}^{m} a_{kj}(t)\, v_j(t) = h_k(t), \; t \in \Gamma_k^1, \tag{4}$$

$$(k = 1, \cdots, m).$$

где $a_k(t)$ — комплекснозначные, а $a_{kj}(t)$ — действительные функции, непрерывные по Гельдеру, соответственно, на Γ при $k=0$ и на Γ_k^1 при $k=1,\cdots,m$; $h_0(t)\in C_\alpha(\Gamma)$, а $h_k(t)\in C_\alpha^1(\Gamma_k^1)$ $(k=1,\cdots,m)$ — заданные действительные функции.

Пусть $P^{(k)}=\|P_{je}^{(k)}\|$, $k=1,\cdots,m$ и $Q^{(k)}(t)=\|Q_{je}^{(k)}\|$, $k=1,\cdots,m-1$ — квадратные матрицы, соответственно, порядка $m-k+2$ и $k+1$, где

$$P_{j1}^{(k)}(t)=a_{j-1}(t),\quad P_{je}^{(k)}(t)=a_{j-1,e}(t),\ j=1,\cdots,m-\\ -k+2,\ e=2,\cdots,m-k+1;$$

$$Q_{11}^{(k)}(t)=a_0(t),\quad Q_{1,e+1}^{(k)}=a_{0,m-k+e}(t),\quad Q_{j+1,1}^{(k)}(t)=a_{m-k+e}(t),\\ Q_{j+1,e+1}^{(k)}(t)=a_{m-k+j,m-k+e}(t),\ j,e=1,\cdots,m.$$

Относительно коэффициентов граничных условий (3)—(4) предположим следующее, что

$$\det P^{(1)}(t)\neq 0 \text{ при } t\in\Gamma_1^1\cap\Gamma_m^2,$$

$$\det P^{(k)}(t)\neq 0 \text{ при } t\in\Gamma_{m-k+1}^1\cap\Gamma_{m-k+2}^2,\ k=2,\cdots,m,$$

$$a_0(t)\neq 0 \text{ при } t\in\Gamma_1^2\cap\Gamma_m^2,$$

$$\det Q^{(k)}(t)\neq 0 \text{ при } t\in\Gamma_{m-k+1}^1\cap\Gamma_{m-k}^2,\ k=1,\cdots,m-1,$$

$$a_{0,m-k+1}(t)=\cdots=a_{m-k,m-k+1}(t)=0,\ a_{m-k+1,m-k+1}(t)=1$$

$$\text{в точках } N_k,\ k=1,\cdots,m,$$

$$a_{0,m-k+1}(t)=a_{m-k+2,m-k+1}(t)=0,\ a_{m-k+1,m-k+1}(t)=1$$

$$\text{в точках } M_k,\ k=1,\cdots,m.$$

В этих предположениях в работе [1] для главной части системы (1)—(2) доказана следующая

Теорема 1. *Граничная задача A является нетеровой, а ее индекс равен*

$$\varkappa=\frac{1}{\pi}\,[\arg\overline{b_0(t)}]_\Gamma+1,$$

где $b_0(t)$ — вполне определенная функция.

В настоящей работе теорема 1 устанавливается и для общей системы (1)—(2), а также строится сопряженная граничная задача к задаче A и условия разрешимости неоднородной задачи A формулируются в терминах сопряженной задачи.

Исследование граничной задачи A. Через H_0 обозначим подпространство в $C_\alpha(D+\Gamma)$, состоящее из функций, аналитических в области D. А через H_j обозначим подпространство в

$C_2(D+\Gamma)$, состоящее из функций, постоянных вдоль j-ой характеристики системы (2) ($j=1,\cdots, m$).

Все операторы, которые встречаются ниже, являются линейными.

Условимся через A с различными индексами обозначать вполне непрерывный оператор в $C_2(D+\Gamma)$, а через B с различными индексами—вполне непрерывный оператор из H_j в $C_2(D+\Gamma)$ ($j=1,\cdots, m$).

Уравнение [1] эквивалентно уравнению следующего вида (см. [2]):

$$v_0(\zeta)=\varphi(\zeta)+A_1\left(\sum_{j=1}^{m} a^j v_j+a^0 v_0+b^0\bar{v}_0+F\right), \tag{5}$$

где $\varphi(\zeta)$ ($\zeta=\xi+i\eta$) — решение однородного уравнения Бельтрами

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}}-q(\xi,\eta)\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=0.$$

Решая уравнение (5) относительно $v_0(\zeta)$, получим (см. [2])

$$v_0=\varphi+A_2\varphi+A_3\left(\sum_{j=1}^{m} a^j v_j\right)+A_3 F, \tag{6}$$

где A_2, A_3 — некоторые вполне непрерывные операторы.

Система (2) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений (см. [3]):

$$v_j(\xi,\eta)=\psi_j(\xi,\eta)-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_j^2}}\int\limits_{l_j(\xi,\eta)}\sum_{i=1}^{m} b_i^j(x,y)\,v_i(x,y)\,ds_{xy}-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_j^2}}\int\limits_{l_j(\xi,\eta)}\operatorname{Re}\left(c_j(x,y)\,v_0(x,y)\right)ds_{xy}-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda_j^2}}\int\limits_{l_j(\xi,\eta)} f_j(x,y)\,ds_{xy}, \tag{7}$$

$$(j=1,\cdots,m)$$

где $l_j(\xi,\eta)$ — часть j-й характеристики системы (2), соединяющая точку (ξ,η) с Γ_j^1, а $\psi_j(\xi,\eta)$ — решение однородного уравнения

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi}-\lambda_j(\xi,\eta)\frac{\partial\psi_j}{\partial\eta}=0.$$

Систему интегральных уравнений (7) разрешим относительно функций $v_1(\xi,\eta),\cdots, v_m(\xi,\eta)$. Это решение записывается в виде (см. [3])

$$v_j(\xi,\eta)=\psi_j(\xi,\eta)+\int\limits_{l_j(\xi,\eta)}\operatorname{Re}\left(c_j(x,y)\,v_0(x,y)\right)ds_{xy}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} B_{ij}\psi_i(\xi,\eta)+A_{j1}v_0(\xi,\eta)+C_{j1}(f_1,\cdots,f_m), \tag{8}$$

$$(j=1,\cdots,m)$$

где $C_{j1}\colon C_\alpha(D+\Gamma)\to C_\alpha(D+\Gamma)$ — ограниченный оператор для $j=1,\cdots,m$.

Теперь подставим $v_0(\zeta)$ из (6) в (8). Тогда система уравнений (8) примет вид

$$v_j=\psi_j+\int\limits_{l_j(\xi,\eta)}\operatorname{Re}(c_j(x,y)\varphi(x,y))\,ds_{xy}+\sum_{i=1}^{m}B_{ij}\psi_i+$$

$$+A_{j2}\varphi+A_{j3}(v_1,\cdots,v_m)+C_{j2}(f_1,\cdots,f_m,F),\tag{9}$$

где $C_{j2}\colon C_\alpha(D+\Gamma)\to C_\alpha(D+\Gamma)$ — ограниченный оператор для $j=1,\cdots,m$.

Пусть

$$G_1=\bigoplus_{j=1}^{m+1}C_\alpha(D+\Gamma),\ G_2=\bigoplus_{j=0}^{m+1}H_j,\ F_1=C_\alpha(D+\Gamma)\oplus\left[\bigoplus_{j=1}^{m}C^1(D+\Gamma)\right],$$

$$F_2=C_\alpha(\Gamma)\oplus\left[\bigoplus_{j=1}^{m}C_\alpha^1(\Gamma_j^1)\right]$$

— соответственно банаховы пространства вектор-функций

$$v=(v_0,\ v_1,\cdots,v_m),\ w=(\varphi,\ \psi_1,\cdots,\psi_m),\ f=(F,\ f_1,\ \cdots,f_m),$$

$$h=(h_0,\ h_1,\cdots,h_m).$$

Подставим выражение v_j $(j=0,1,\cdots,m)$ из формул (6), (9) в граничные условия (3), (4). Результат подстановки запишем в виде одного уравнения

$$Tw=L_1v+L_2w+M_1f+h,\tag{10}$$

где

$$Tw=\Big(\operatorname{Re}[a_0(t)\varphi(t)]+\sum_{j=1}^{m}a_{0j}(t)\psi_j(t),\cdots,\operatorname{Re}[a_m(t)\varphi(t)]+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}a_{mj}(t)\psi_j(t)\Big);$$

L_1, L_2, M_1 — некоторые операторы, причем L_1, L_2 — вполне непрерывные (см. [4]), а M_1 — ограниченный.

Из утверждения теоремы 1 следует, что T — нетеровый оператор с индексом, равным $\varkappa$.

Далее систему уравнений (6), (9) также запишем в виде одного уравнения

$$Ev=N_1v+N_2w+M_2f,\tag{11}$$

где E — единичный, N_1 — вполне непрерывный, а N_2, M_2 — ограниченные операторы, причем размерность ядра сопряженного оператора к M_2 равна нулю.

Таким образом, мы получили, что граничная задача A для системы (1), (2) эквивалентна системе линейных уравнений (10), (11) в банаховом пространстве.

Как показано в работе [4], система уравнений вида (10), (11) является нетеровой, а ее индекс равен $\operatorname{ind} E + \operatorname{ind} T = \varkappa$.

Итак, теорема 1 установлена и для общей системы (1), (2).

Далее, аналогично тому как это сделано в работе [4], можно построить сопряженную граничную задачу к граничной задаче A и получить условия разрешимости неоднородной задачи A в терминах сопряженной задачи.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 20.IV.1976

Ա. Ա. ԱՆԴՐՅԱՆ. Ընդհանուր եզրային խնդիր բաղադրյալ տիպի սիստեմի համար (*ամփոփում*)

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է ընդհանուր եզրային խնդիր առաջին կարգի բաղադրյալ տիպի սիստեմի համար։ Պահանջվում է, որ իրական բաղադրիչները չինեն տարբեր։ Այդ խնդրի համար կառուցվում է լրիվ տեսությունը։

A. A. ANDRIAN. *General boundary value problem for systems of composite type* (summary)

For the first order systems of composite type with arbitrary number of different characteristics on the plane the general boundary value problem is considered. The complete theory of the problem is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Д. М. Муртазаев.* Граничная задача для системы уравнений составного типа со многими вещественными характеристиками, ДАН Тадж. ССР, XIII, № 12, 1970, 12—15.
2. *А. Д. Джураев.* Системы уравнений составного типа, М., 1972.
3. *А. А. Андрян.* Об одной граничной задаче для систем уравнений гиперболического типа, Изв. АН Арм.ССР, „Математика" X, № 4, 1975, 329—341.
4. *А. А. Андрян.* Некоторые граничные задачи для систем уравнений составного типа, Изв. АН Арм.ССР, „Математика", XI, № 4, 1976, 332—344.