ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

Г. Ш. ГУСЕЙНОВ

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ МАТРИЦЫ ЯКОБИ

Изучается прямая и обратная задача теории рассеяния для уравнения

$$\begin{cases} b_1y_1 + a_1y_2 = \lambda y_1, \\ a_{n-1}y_{n-1} + b_ny_n + a_ny_{n+1} = \lambda y_n \ (n = 2, 3, 4, \cdots), \end{cases} \tag{1}$$

где

$$a_n > 0, \ \operatorname{Im} b_n = 0 \ (n = 1, 2, 3, \cdots), \ \sum_{n=1}^{\infty} n(|1 - a_n| + |b_n|) < \infty. \tag{2}$$

Формальное решение обратной задачи рассеяния для (1) с $b_n \equiv 0$ рассмотрено в работе [1] при условии, что $a_n \to 1$ при $n \to \infty$ достаточно быстро. В настоящей работе изучена задача рассеяния в классе коэффициентов a_n, b_n, удовлетворяющих условию (2).

Задача рассеяния для дискретных уравнений, но в других постановках изучалась также в работах [2], [3], [4].

§1. Специальное решение

Рассмотрим дискретное уравнение

$$\begin{cases} b_1y_1 + a_1y_2 = \lambda y_1, \\ a_{n-1}y_{n-1} + b_ny_n + a_ny_{n+1} = \lambda y_n \ (n = 2, 3, 4, \cdots), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\{y_n\}_1^\infty$ — искомое решение, λ—комплексный параметр и

$$a_n > 0, \ \operatorname{Im} b_n = 0 \ (n = 1, 2, 3, \cdots), \ \sum_{n=1}^{\infty} n(|1 - a_n| + |b_n|) < \infty. \tag{1.2}$$

Уравнение (1.1) эквивалентно нахождению вектора $\{y_n\}_0^\infty$, удовлетворяющего уравнению

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_ny_n + a_ny_{n+1} = \lambda y_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots; \ a_0 = 1) \tag{1.3}$$

и начальному условию

$$y_0 = 0. \tag{1.3'}$$

Обозначим

$$\sigma(n) = \sum_{p=n}^{\infty} (|1 - a_p| + |b_p|).$$

В уравнении (1.1) положим $\lambda = 2\cos z$, где $z = \xi + i\tau$. Через ξ всюду в дальнейшем будем обозначать только вещественный параметр.

Теорема 1.1. *При условии* (1.2) *уравнение* (1.3) *имеет единственное решение, допускающее представление*

$$f_n(\xi) = \alpha_n e^{in\xi}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{im\xi}\right), \tag{1.4}$$

где α_n *и* A_{nm} *являются вещественными числами и* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 1$; $A_{nm} = 0$ *при* $m \leqslant 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} A_{nm} = 0$ $(m = 1, 2, 3, \cdots)$.

Далее

A) α_n *и* A_{nm} *удовлетворяют соотношениям*

$$a_n^2 A_{n+1,\, m} - A_{nm} + b_n A_{n,\, m+1} + A_{n-1,\, m+2} - A_{n,\, m+2} = 0 \tag{1.5}$$

$$(n,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots),$$

$$a_n^2 = 1 + A_{n,\,2} - A_{n-1,\,2} - b_n A_{n,\,1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots), \tag{1.6}$$

$$b_n = A_{n,\,1} - A_{n-1,\,1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots), \tag{1.7}$$

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = a_{n-1} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \tag{1.8}$$

Наоборот, если A_{nm} *удовлетворяет* (1.5), (1.6), (1.7), *а* α_n (1.8), *то функция* $f_n(\xi)$, *построенная по формуле* (1.4) *с помощью* α_n *и* A_{nm}, *является решением уравнения* (1.3).

B) α_n *и* A_{nm} *определяются однозначно по* a_n *и* b_n *по формулам*

$$\alpha_n = \left(\prod_{p=n}^{\infty} a_p\right)^{-1} \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots), \tag{1.9}$$

$$A_{n,\,1} = -\sum_{p=n+1}^{\infty} b_p \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots), \tag{1.10}$$

$$A_{n,\,2} = \sum_{p=n+1}^{\infty} (1 - a_p^2) + \sum_{p=n+1}^{\infty} \sum_{s=p+1}^{\infty} b_p b_s \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots), \tag{1.11}$$

$$A_{n,\,2k+1} = -\sum_{p=n+1+k}^{\infty} b_p - \sum_{q=1}^{k} \sum_{p=n+1+k-q}^{\infty} b_p A_{p,\,2q} + \tag{1.12}$$

$$+ \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{p=n+1+k-q}^{\infty} (1 - a_{p-1}^2) A_{p,\,2q+1} \quad (n=0,\ 1,\ 2;\ k=1, 2,\ 3,\ \cdots),$$

$$A_{n,\,2k} = \sum_{p=n+k}^{\infty} \sum_{q=p+1}^{\infty} b_p b_q + \sum_{p=n+k}^{\infty} (1 - a_p^2) + \sum_{q=1}^{k-1} \sum_{p=n+1+k-q}^{\infty} (1 - a_{p-1}^2) A_{p,\,2q} -$$

$$- \sum_{q=1}^{k-1} \sum_{p=n+k-q}^{\infty} b_p A_{p,\,2q+1} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;\ k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots). \tag{1.13}$$

Имеет место оценка

$$|A_{nm}| \leqslant C\,\sigma\left(n + \left[\frac{m}{2}\right]\right), \tag{1.14}$$

где через $[\cdot]$ *обозначена целая часть, а* C — *положительная постоянная, не зависящая ни от* n *и ни от* m.

C) *Решение* $f_n(\xi)$ *обладает следующими свойствами:*

1. $f_n(\xi)$ *непрерывна на вещественной оси* $-\infty < \xi < \infty$ *и допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость* $\operatorname{Im} z > 0$ *и там при каждом* n *относительно* z *имеет асимптотику*

$$f_n(z) = a_n e^{inz}[1 + O(e^{-\tau})] \quad (z = \xi + i\tau, \ \tau > 0), \tag{1.15}$$

где $O(e^{-\tau}) \to 0$ *при* $\tau \to \infty$ *равномерно по* $n\,(n \geqslant 0)$.

2. $f_n(z)$ *при* $\operatorname{Im} z \geqslant 0$ *относительно* n *имеет асимптотику*

$$f_n(z) = e^{inz}[1 + o(1)], \tag{1.16}$$

где $o(1) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *равномерно относительно* z, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$.

3. $$f_n(z + 2\pi) = f_n(z).$$

Доказательство. Утверждение A) проверяется непосредственной подстановкой (1.4) в (1.3). Формулы (1.9)—(1.13) вытекают из (1.5)—(1.8). Докажем оценку (1.14).

Ищем A_{nm} в виде ряда

$$A_{nm} = \sum_{l=0}^{\infty} A_{nm}^{(l)} \quad (m \geqslant 3),$$

где

$$A_{n,\,2k+1}^{(0)} = -\sum_{p=n+1+k}^{\infty} b_p \quad (k = 1, 2, 3, \cdots),$$

$$A_{n,\,2k}^{(0)} = -\sum_{p=n+k}^{\infty} \sum_{q=p+1}^{\infty} b_p b_q + \sum_{p=n+k}^{\infty} (1 - a_p^2) \quad (k = 2, 3, 4, \cdots),$$

$$A_{n,\,2k+1}^{(l)} = -\sum_{q=1}^{k} \sum_{p=n+1+k-q}^{\infty} b_p A_{p,\,2q}^{(l-1)} + \sum_{q=0}^{k-1} \sum_{p=n+1+k-q}^{\infty} (1 - a_{p-1}^2)\, A_{p,\,2q+1}^{(l-1)},$$
$$(l = 1, 2, 3, \cdots; \quad k = 1, 2, 3, \cdots),$$

$$A_{n,\,2k}^{(l)} = -\sum_{q=1}^{k-1} \sum_{p=n+k-q}^{\infty} b_p\, A_{p,\,2q+1}^{(l-1)} + \sum_{q=1}^{k-1} \sum_{p=n+1+k-q}^{\infty} (1 - a_{p-1}^2)\, A_{p,\,2q}^{(l-1)}$$
$$(l = 1, 2, 3, \cdots; \ k = 2, 3, 4, \cdots).$$

Введем обозначение

$$\eta(n) = \sum_{p=n}^{\infty} |1 - a_p^2|, \qquad \eta_1(n, k) = \sum_{p=n}^{\infty} (n-k)|1 - a_p^2| \quad (k \leqslant n),$$

$$\zeta(n) = \sum_{p=n}^{\infty} |b_p|, \qquad \zeta_1(n, k) = \sum_{p=n}^{\infty} (n-k)|b_p| \quad (k \leqslant n).$$

Нетрудно убедиться, что

$$|A^{(l)}_{n,\,2k+1}|,\quad |A^{(l)}_{n,\,2k}| \leqslant$$

$$\leqslant (\eta(n+k)+\zeta(n+k)+\zeta^2(n+k))\,\frac{(\eta_1(n+1,\,n)+\zeta_1(n+1,\,n))^l}{\left[\frac{l}{2}\right]!},$$

откуда и следует оценка (1.14)

Утверждение С) следует из представления (1.4) и оценки (1.14).

§ 2. Прямая задача рассеяния

Определение 2.1. Пусть $\{\psi_n(\lambda)\}_0^\infty$ и $\{g_n\}_0^\infty$ — два решения уравнения (1.3) с одним и тем же λ. Их вронскианом называется величина

$$a_n[\psi_n(\lambda)\,g_{n+1}(\lambda)-\psi_{n+1}(\lambda)\,g_n(\lambda)] = W[\psi_n(\lambda),\ g_n(\lambda)]. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Пусть* $\{\psi_n(\lambda)\}_0^\infty$ *и* $\{g_n(\mu)\}_0^\infty$ — *два решения уравнения* (1.3). *Имеет место тождество*

$$a_{n-1}[\psi_{n-1}(\lambda)\,g_n(\mu)-\psi_n(\lambda)\,g_{n-1}(\mu)]-a_n[\psi_n(\lambda)\,g_{n+1}(\mu)-\psi_{n+1}(\lambda)\,g_n(\mu)] =$$

$$=(\lambda-\mu)\,\psi_n(\lambda)\,g_n(\mu). \tag{2.2}$$

Доказательство. Так как

$$a_{n-1}\psi_{n-1}(\lambda)+b_n\psi_n(\lambda)+a_n\psi_{n+1}(\lambda)=\lambda\psi_n(\lambda),$$

$$a_{n-1}g_{n-1}(\mu)+b_ng_n(\mu)+a_ng_{n+1}(\mu)=\mu\,g_n(\mu),$$

то умножая первое из этих тождеств на $g_n(\mu)$, а второе — на $\psi_n(\lambda)$ и вычитая второе из первого, получим тождество (2.2).

Полагая в (2.2) $\mu=\lambda$, получаем

Следствие 2.1. Вронскиан двух решений уравнения (1.1) от n не зависит.

Из (2.1) очевидным образом следует

Лемма 2.2. *Для того чтобы решения* $\{\psi_n(\lambda_0)\}_0^\infty$ *и* $\{g_n(\lambda_0)\}_0^\infty$ *являлись линейно независимыми необходимо и достаточно, чтобы* $W[\psi_n(\lambda_0),\ g_n(\lambda_0)]\neq 0$.

Из вещественности a_n и b_n следует, что вместе с $\{f_n(\xi)\}_0^\infty$ решением уравнения (1.3) является и $\{\overline{f_n(\xi)}\}_0^\infty=\{f_n(-\xi)\}_0^\infty$. Так как вронскиан двух решений не зависит от n, то он совпадает со своим значением при $n\to\infty$. Поэтому, принимая во внимание (1.16), находим, что

$$W[f_n(\xi),\ f_n(-\xi)] = -2i\sin\xi. \tag{2.3}$$

Обозначим через $\{\varphi_n(\xi)\}_0^\infty$ решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi_0(\xi)=0,\quad \varphi_1(\xi)=1. \tag{2.4}$$

Лемма 2.3. *При всех* $\xi \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ *справедливо тождество*

$$-\frac{2i\sin\xi}{f_0(\xi)}\varphi_n(\xi) = f_n(-\xi) - S(\xi)f_n(\xi), \tag{2.5}$$

где

$$S(\xi) = \frac{f_0(-\xi)}{f_0(\xi)} \tag{2.6}$$

и функция $S(\xi)$ *обладает свойствами*

$$S(\xi) = S(-\xi) = [S(\xi)]^{-1}, \tag{2.7}$$

$$S(\xi + 2\pi) = S(\xi). \tag{2.8}$$

Доказательство. Из (2.3) и леммы (2.2) следует, что при $\xi \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ пара $\{f_n(\xi)\}_0^\infty$, $\{f_n(-\xi)\}_0^\infty$ образует фундаментальную систему решений уравнения (1.3). Поэтому

$$\varphi_n(\xi) = C_1 f_n(\xi) + C_2 f_n(-\xi). \tag{2.9}$$

Отсюда, в силу (2.3)

$$C_1 = \frac{W[\varphi_n(\xi), f_n(-\xi)]}{-2i\sin\xi}, \qquad C_2 = \frac{W[\varphi_n(\xi), f_n(\xi)]}{2i\sin\xi}.$$

Далее

$$W[\varphi_n(\xi), f_n(-\xi)] = a_0[\varphi_0(\xi)f_1(-\xi) - \varphi_1(\xi)f_0(-\xi)] = -f_0(-\xi);$$

и

$$W[\varphi_n(\xi), f_n(\xi)] = -f_0(\xi).$$

Поэтому тождество (2.5) следует из (2.9).

Заметим, что $f_0(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

Лемма 2.4. *Функция* $f_0(z)$ *в полосе* $\Pi_+ = \left\{z = \xi + i\tau: -\frac{\pi}{2} \leqslant \xi \leqslant \frac{3\pi}{2}, \tau > 0\right\}$ *может иметь только конечное число, причем простых нулей в точках* $z_j = i\tau_j$ $(j = 1, \cdots, N_0)$, $z_j = \pi + i\tau_j$ $(j = N_0 + 1, \cdots, N)$. *Имеет место равенство*

$$-\frac{2\sin z_j}{\dot{f}_0(z_j)f_1(z_j)} = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^2(z_j)} \overset{\text{def}}{=} M_j^2 \quad (j = 1, \cdots, N), \tag{2.10}$$

где точкой над функцией обозначена производная по z.

Доказательство. Сначала выясним распределение нулей функции $f_0(z)$ в верхней полуплоскости. Пусть $f_0(z_0) = 0$, где $z_0 = \xi_0 + i\tau_0$, $\tau_0 > 0$. Тогда $\{f_n(z_0)\}_1^\infty$ будет экспоненциально убывающим при $n \to \infty$ решением уравнения (1.1). Из симметричности этого уравнения следует, что $\lambda_0 = 2\cos z_0$ может быть только вещественным, следовательно, $\xi_0 = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. Таким образом, функция

$f_0(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ может иметь нули только на прямых $\operatorname{Re} z = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. Покажем, что нули простые.

Из уравнения (1.3) имеем соотношения

$$a_{n-1} f_{n-1}(z) + b_n f_n(z) + a_n f_{n+1}(z) = 2\cos z\, f_n(z),$$

$$a_{n-1} \dot{f}_{n-1}(z) + b_n \dot{f}_n(z) + a_n \dot{f}_{n+1}(z) = -2\sin z\, f_n(z) + 2\cos z\, \dot{f}_n(z).$$

Умножим первое из этих тождеств на $\dot{f}_n(z)$, а второе — на $f_n(z)$ и вычтем второе из первого. В результате мы получим

$$a_{n-1}[f_{n-1}(z)\dot{f}_n(z) - \dot{f}_{n-1}(z) f_n(z)] -$$

$$- a_n[f_n(z)\dot{f}_{n+1}(z) - \dot{f}_n(z) f_{n+1}(z)] = 2\sin z\, f_n(z).$$

Сложив эти тождества при $n = 1, 2, 3, \cdots$ и принимая во внимание, что $f_n(z) \to 0$, $\dot{f}_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$, $\operatorname{Im} z > 0$, получим

$$\dot{f}_0(z) f_1(z) - f_0(z)\dot{f}_1(z) = 2\sin z \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(z).$$

Полагая здесь $z = z_0$, мы получим

$$-\dot{f}_0(z_0) f_1(z_0) = 2\sin z_0 \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(z_0).$$

Отсюда следует, что $\dot{f}_0(z_0) \neq 0$ (так как $f_1(z_0) \neq 0$, в противном случае в силу $f_0(z_0) = 0$, мы получили бы $f_n(z_0) \equiv 0$) и одновременно мы получаем формулу (2.10).

Покажем теперь, что $f_0(z)$ в полосе Π_+ может иметь только конечное число нулей. Из (1.15) следует, что $f_0(z) \to \alpha_0$ при $\tau \to \infty$. Поэтому нули функции $f_0(z)$ в полосе Π_+ образуют ограниченное множество, которое может иметь предельные точки только в точках $z = 0$ и $z = \pi$. Следовательно, если $f_0(0) \neq 0$, $f_0(\pi) \neq 0$, то в силу аналитичности, множество нулей функции $f_0(z)$ в полосе Π_+ конечно.

Покажем, что независимо от значения функции $f_0(z)$ в точках $z = 0$ и $z = \pi$ множество ее нулей в Π_+ конечно. Будем это доказывать аналогично тому, как это сделано для уравнения Штурма-Лиувилля в [5]. Обозначим через δ точную нижнюю границу расстояний между двумя соседними нулями функции $f_0(z)$, лежащих на прямой $\operatorname{Re} z = 0$ или $\operatorname{Re} z = \pi$. Достаточно показать, что $\delta > 0$. Предположим противное. Тогда мы можем выделить такие последовательности нулей $\{s\pi + i\tau_k\}$, $\{s\pi + i\tau_k'\}$ (здесь $s = 0$ или $s = \pi$) функции $f_0(z)$, что $\lim\limits_{k\to\infty}(\tau_k' - \tau_k) = 0$, $\tau_k' > \tau_k \geqslant 0$ и $\max\limits_k \tau_k' < M$. Из (1.16) следует, что при достаточно большом n_0 равномерно относительно $\tau \geqslant 0$ и $n \geqslant n_0$ будем иметь

$$f_n(s\pi + i\tau) > \frac{(-1)^{sn}}{2} e^{-n\tau}.$$

Поэтому

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(s\pi + i\tau_k) f_n(s\pi + i\tau_k') > \frac{1}{4} \sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-n}(\tau_k + \tau_k') > \tag{2.11}$$

$$> \frac{1}{4} \sum_{n=n_0}^{\infty} e^{-2nM} = \frac{1}{4} \frac{e^{-2n_0 M}}{1 - e^{-2n_0 M}}.$$

С другой стороны, так как собственные векторы симметрического уравнения (1.1), отвечающие различным собственным значениям ортогональны, имеем

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s\pi + i\tau_k) f_n(s\pi + i\tau_k') + \sum_{n=1}^{n_0-1} f_n^2(s\pi + i\tau_k) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{n_0-1} f_n(s\pi + i\tau_k)[f_n(s\pi + i\tau_k') - f_n(s\pi + i\tau_k)] +$$

$$+ \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(s\pi + i\tau_k) f_n(s\pi + i\tau_k').$$

Переходя здесь к пределу при $k \to \infty$ и принимая во внимание, что при $1 \leqslant n \leqslant n_0 - 1$

$$\lim_{k\to\infty} [f_n(s\pi + i\tau_k) - f_n(s\pi + i\tau_k')] = 0,$$

мы получим

$$0 \geqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} f_n(s\pi + i\tau_k) f_n(s\pi + i\tau_k'). \tag{2.12}$$

Неравенства (2.11) и (2.12) противоречат друг другу. Поэтому наше предположение неверно, т. е. $\delta > 0$, следовательно функция $f_0(z)$ в полосе Π_+ может иметь только конечное число нулей.

§ 3. Формула разложения и спектр

Обозначим

$$J = \begin{pmatrix} b_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Тогда уравнения (1.1) могут быть записаны в виде

$$Jy = \lambda y.$$

Матрица J, как известно, называется бесконечной матрицей Якоби.

Обозначим через $l^2(1, \infty)$ гильбертово пространство векторов $y = \{y_n\}_1^\infty$, таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^2 < \infty$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n .$$

Далее, обозначим через L минимальный самосопряженный оператор, порожденный матрицей (3.1) в $l^2(1, \infty)$. Резольвента оператора L определяется по формуле

$$R_{nm}(z) = -\frac{1}{f_0(z)} \begin{cases} f_n(z)\varphi_m(z) & \text{при } m \leqslant n-1, \\ f_m(z)\varphi_n(z) & \text{при } m \geqslant n \quad (n, m = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases} \tag{3.2}$$

и удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} b_1 R_{1,m}(z) + a_1 R_{2,m}(z) - 2\cos z\, R_{1,m}(z) = \delta_{1,m}, \\ a_{n-1} R_{n-1,m}(z) + b_n R_{nm}(z) + a_n R_{n+1,m}(z) - 2\cos z\, R_{nm}(z) = \delta_{nm}, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$(n, m = 1, 2, 3, \cdots),$$

где δ_{nm}—символ Кронеккера.

Из результатов предыдущих параграфов следует, что векторы $\{u_n(\xi)\}_1^\infty$, $\{u_n(z_j)\}_1^\infty$, определенные по формулам

$$u_n(\xi) = f_n(-\xi) - S(\xi) f_n(\xi) \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \pi), \tag{3.4}$$

$$u_n(z_j) = M_j f_n(z_j) \quad (j = 1, \cdots, N), \tag{3.5}$$

являются ограниченными решениями уравнения (1.1).

В этом параграфе мы покажем, что они образуют полный набор нормированных собственных векторов этого уравнения.

Теорема 3.1. *Имеет место формула разложения по собственным векторам*

$$\delta_{nm} = \sum_{j=1}^{N} u_n(z_j)\overline{u_m(z_j)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi u_n(\xi)\overline{u_m(\xi)}\, d\xi \quad (n, m = 1, 2, 3, \cdots), \tag{3.6}$$

причем решения $\{u_n(\xi)\}_1^\infty$, $\{u_n(z_j)\}_1^\infty$ *при* $n \to \infty$ *обладают асимптотиками*

$$u_n(\xi) = e^{-in\xi} - S(\xi) e^{in\xi} + o(1) \quad (0 \leqslant \xi \leqslant \pi), \tag{3.7}$$

$$u_n(z_j) = M_j e^{inz_j}[1 + o(1)] \quad (j = 1, \cdots, N). \tag{3.8}$$

Доказательство. Наметим только путь вывода формулы (3.6). Пусть $\{h_n\}_1^\infty$ — произвольная финитная последовательность. Из уравнения (3.3) следует, что имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{R}_{nm}(\lambda) h_m = -\frac{h_n}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{3.9}$$

где

$$\tilde{R}_{nm}(\lambda) = R_{nm}(z) = R_{nm}\left(\arccos\frac{\lambda}{2}\right).$$

В λ-плоскости берем квадрат с центром в начале координат и со сторонами, имеющими длину, равную $2R$, где R—достаточно боль-

шое положительное число. Обозначим контур этого квадрата через Γ_R. Если взять от обоих частей (3.9) интеграл по контуру Γ_R, то при $R \to \infty$ мы получим

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{R}_{nm}(\lambda) h_m \right] d\lambda = -h_n. \tag{3.10}$$

С другой стороны, мы имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{R}_{nm}(\lambda) h_m \right] d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{-2}^{2} d\lambda \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} [\widetilde{R}_{nm}(\lambda - i0) - \right.$$

$$\left. - R_{nm}(\lambda + i0)] h_m \right\} + \sum_{j=1}^{N} \operatorname{Res} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \widetilde{R}_{nm}(\lambda) h_m \right\}_{\lambda=\lambda_j}. \tag{3.11}$$

Переходя в (3.11) к пределу при $R \to \infty$, принимая во внимание (3.10) и используя формулы (3.2) и (3.4), (3.5), мы получим формулу (3.6).

Асимптотические формулы (3.7), (3.8) вытекают из (3.4), (3.5), соответственно, в силу (1.16).

Теорема 3.2. *При условии* (1.2) *оператор* L *имеет непрерывный спектр, заполняющий сегмент* $[-2, 2]$ *и конечное число простых собственных значений, лежащих вне непрерывного спектра. Если* $h_n \equiv 0$, *то собственные значения лежат попарно симметрично относительно точки* $\lambda = 0$.

Доказательство. Покажем, что собственные значения оператора L являются простыми. Действительно, пусть собственному значению $\lambda_0 = 2\cos z_0$ отвечают два собственных вектора $\{\psi_n(z_0)\}_1^\infty$ и $\{g_n(z_0)\}_1^\infty$. Так как вронскиан двух решений не зависит от n, переходя к пределу в формуле

$$a_n [\psi_n(z_0) g_{n+1}(z_0) - \psi_{n+1}(z_0) g_n(z_0)] = W[\psi_n(z_0), g_n(z_0)]$$

при $n \to \infty$, получим $W[\psi_n(z_0), g_n(z_0)] = 0$, следовательно, в силу леммы 2.2 $\{\psi_n(z_0)\}_1^\infty$ и $\{g_n(z_0)\}_1^\infty$ линейно зависимы.

Теперь покажем, что для того чтобы некоторое число $\lambda_0 = 2\cos z_0$ $\operatorname{Im} z_0 > 0$ было собственным значением оператора L, необходимо и достаточно, чтобы $f_0(z_0) = 0$.

Действительно, пусть $f_0(z_0) = 0$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Тогда $\{f_n(z_0)\}_1^\infty$ является решением уравнения (1.1) и в силу (1.16) $f_n(z_0)$ экспоненциально убывает при $n \to \infty$. Следовательно, $\{f_n(z_0)\}_1^\infty \in l^2(1, \infty)$ является, собственным вектором оператора L, соответствующим собственному значению $\lambda_0 = 2\cos z_0$.

Наоборот, пусть $\lambda_0 = 2\cos z_0$, $\operatorname{Im} z_0 > 0$ — собственное значение и $\{y_n(z_0)\}_0^\infty$ — соответствующий собственный вектор краевой задачи (1.3)

(1.3′), следовательно, $y_0(z_0)=0$. Покажем, что $f_0(z_0)=0$. Допустим противное, пусть $f_0(z_0)\neq 0$. Тогда в силу равенства $W[f_n(z_0), \varphi_n(z_0)]=f_0(z_0)$, векторы $\{f_n(z_0)\}_0^\infty$, $\{\varphi_n(z_0)\}_0^\infty$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.3). Поэтому

$$y_n(z_0)=C_1 f_n(z_0)+C_2\varphi_n(z_0) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots), \tag{3.12}$$

где C_1 и C_2—постоянные и хотя бы одна из них отлична от нуля.

Так как $\{y_n(z_0)\}_1^\infty\in l^2(1,\infty)$, $\{f_n(z_0)\}_1^\infty\in l^2(1,\infty)$, а $\{\varphi_n(z_0)\}_1^\infty\overline{\in} l^2(1,\infty)$, то $C_2=0$, следовательно $C_1\neq 0$. Поэтому полагая в (3.12) $n=0$, получим, что $f_0(z_0)=0$.

Так как, в силу леммы 2.4, функция $f_0(z)$ в полосе Π_+ может иметь только конечное число нулей в точках $z_j=i\tau_j$ $(j=1,\cdots,N_0)$, $z_j=\pi+i\tau_j$ $(j=N_0+1,\cdots,N)$, то оператор L может иметь только конечное число собственных значений в точках $\lambda_j=2\cos z_j\in(2;\infty)$ $(j=1,\cdots,N_0)$, $\lambda_j=2\cos z_j\in(-\infty,-2)$ $(j=N_0+1,\cdots,N)$.

Записав формулы (3.6) в виде интеграла Стильтьеса, мы получим, что

$$h_n=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{m=1}^{\infty}h_m\varphi_m(\lambda)\right\}\varphi_n(\lambda)\,d\rho(\lambda), \tag{3.13}$$

где $\{\varphi_n(\lambda)\}_0^\infty$—решение уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_0(\lambda)=0$, $\varphi_1(\lambda)=1$, а $\rho(\lambda)$—спектральная плотность оператора L, причем

$$d\rho(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sqrt{4-\lambda^2}\,d\lambda}{\left|f_0\left(\arccos\dfrac{\lambda}{2}\right)\right|^2} & \text{при } -2\leqslant\lambda\leqslant 2,\\[2ex] \displaystyle\sum_{j=1}^{N}\frac{4\sin^2 z_j\,\delta(\lambda-2\cos z_j)\,d\lambda}{M_j^2 f_0^2(z_j)} & \text{при } \lambda\overline{\in}[-2,\ 2].\end{cases} \tag{3.14}$$

Полагая

$$H(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}h_n\varphi_n(\lambda),$$

из (3.13) имеем

$$h_n=\int\limits_{-\infty}^{\infty}H(\lambda)\varphi_n(\lambda)\,d\rho(\lambda) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \tag{3.15}$$

Умножая обе части равенства (3.15) на $\overline{h}_n$ и суммируя по n в пределах от 1 до ∞, мы получим равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty}|h_n|^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|H(\lambda)|^2\,d\rho(\lambda).$$

Из вида спектральной плотности (3.14) следует, что непрерывный спектр оператора L состоит из отрезка $[-2, 2]$.

Последняя часть теоремы 3.2 вытекает из того, что при $b_n \equiv 0$ в силу (1.10), (1.12) $A_{n,2k+1} \equiv 0$, следовательно, $f_0(z)$ является периодической функцией с периодом π.

§ 4. Обратная задача рассеяния

В § 3 (см. теорему 3.1) мы видели, что набор величин $\{S(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$; $z_1, \cdots, z_N$; $M_1, \cdots, M_N\}$ полностью определяет асимптотику при $n \to \infty$ всех нормированных собственных функций уравнения (1.1).

Определение (4.1). Совокупность величин $\{S(\xi)$ $(-\infty < \xi < \infty)$ $z_1, \cdots, z_N$; $M_1, \cdots, M_N\}$ называется данными рассеяния матрицы Якоби (3.1).

Обратная задача рассеяния состоит в определении матрицы Якоби (3.1), т. е. уравнения (1.1) по данным рассеяния.

1. При решении обратной задачи важную роль играет так называемое уравнение И. М. Гельфанда—Б. М. Левитана или уравнение В. А. Марченко, выводом которого мы сейчас займемся.

Подставляя в (2.5) вместо $f_n(\xi)$ его выражение (1.4), мы получим

$$-\frac{2i\sin\xi}{\alpha_n f_0(\xi)}\varphi_n(\xi) + 2i\sin n\xi = [1 - S(\xi)]e^{in\xi} +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} e^{-i(n+k)\xi} - \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} e^{i(n+k)\xi} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}[1 - S(\xi)]e^{i(n+k)\xi}.$$

Умножая обе части этого равенства на $\frac{1}{2\pi}e^{i(n+m)\xi}$ и интегрируя по ξ в пределах $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\left[-\frac{2i\sin\xi}{\alpha_n f_0(\xi)}\varphi_n(\xi) + 2i\sin n\xi\right]e^{i(n+m)\xi}d\xi = \tag{4.1}$$

$$= F^{(1)}_{2n+m} + (1-\delta_{0m})A_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk}F^{(1)}_{k+m+2n},$$

где

$$F^{(1)}_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1 - S(\xi)]e^{im\xi}d\xi.$$

Покажем, что интеграл в левой части равенства (4.1) может быть вычислен с помощью контурного интегрирования. Действительно, функция

$\left[-\frac{2i\sin z}{\alpha_n f_0(z)}\varphi_n(z)+2i\sin nz\right]e^{i(n+m)z}$ периодична с периодом 2π, аналитична в верхней полуплоскости, причем имеет лишь простые полюса в нулях функции $f_0(z)$ и, возможно особенности в точках $z=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ (так как возможно, что $f_0(k\pi)=0$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

С помощью уравнения

$$a_{n-1,T}y_{n-1}+b_{n,T}y_n+a_{n,T}y_{n+1}=\lambda y_n \quad (n=1, 2, 3, \cdots),$$

где

$$a_{n,T}=\begin{cases} a_n & \text{при } n\leqslant T, \\ 1 & \text{при } n>T; \end{cases} \qquad b_{n,T}=\begin{cases} b_n & \text{при } n\leqslant T, \\ 0 & \text{при } n>T, \end{cases}$$

можно показать, что функция $\frac{\sin z}{f_0(z)}$ не имеет особенности в точках $z=k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$. Поэтому левая часть (4.1) равна

$$\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma_R}\left[-\frac{2i\sin z}{\alpha_n f_0(z)}\varphi_n(z)+2i\sin nz\right]e^{i(n+m)z}dz+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2+iR}\left[-\frac{2i\sin z}{\alpha_n f_0(z)}\varphi_n(z)+2i\sin nz\right]e^{i(n+m)z}dz, \tag{4.2}$$

где $R>0$ — достаточно большое число, а Γ_R — замкнутый прямоугольный контур, состоящий из отрезков: $-\frac{\pi}{2}\leqslant\xi\leqslant\frac{3\pi}{2}$, $\tau=0$; $\xi=-\frac{\pi}{2}$, $0\leqslant\tau\leqslant R$; $\xi=\frac{3\pi}{2}$, $0\leqslant\tau\leqslant R$; $-\frac{\pi}{2}\leqslant\xi\leqslant\frac{3\pi}{2}$, $\tau=R$ и охватывающий все нули функции $f_0(z)$, лежащие в полосе Π_+. Первое слагаемое в (4.2) есть сумма вычетов подынтегральной функции, а последнее, в свою очередь, принимая во внимание, что

$$\varphi_n(z_j)=\frac{1}{f_1(z_j)}f_n(z_j),$$

равно

$$-F^{(0)}_{2n+m}-\sum_{k=1}^{\infty}A_{nk}F^{(0)}_{k+m+2n},$$

где

$$F^{(0)}_m=\sum_{j=1}^{N}M_j^2e^{imz_j}.$$

Далее, так как при $\operatorname{Im} z\to\infty$ $\varphi_n(z)=\frac{\alpha_0}{\alpha_n}e^{-i(n-1)z}[1+o(1)]$, $f_0(z)=$

$= \alpha_0 [1 + o(1)]$, то второе слагаемое в (4.2) при $R \to \infty$ дает $\left(\frac{1}{\alpha_n^2} - 1\right) c_{0m}$.

Поэтому, в результате, из (4.1) мы получим

$$F_{2n+m} + A_{nm} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} F_{k+m+2n} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots;\ m = 1, 2, 3, \cdots),$$

$$\frac{1}{\alpha_n^2} = 1 + F_{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{nk} F_{k+2n} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{4.3}$$

где

$$F_m = F_m^{(0)} + F_m^{(1)} = \sum_{j=1}^{N} M_j^2 e^{imz_j} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - S(\xi)] e^{im\xi} d\xi. \tag{4.3'}$$

Таким образом, мы получили, что A_{nm} удовлетворяет уравнениям (4.3), причем F_m построены только по данным рассеяния. Уравнение (4.3) называется основным уравнением обратной задачи.

С помощью уравнения (4.3) нетрудно доказывается следующая

Лемма 4.1. *Для функции $f_0(\xi)$ справедливо представление*

$$f_0(\xi) = \begin{cases} (1 - e^{-i\xi}) A_1(\xi), & \text{если } f_0(0) = 0, \\ (1 + e^{i\xi}) A_2(\xi), & \text{если } f_0(\pi) = 0, \end{cases}$$

где функции $A_1(\xi)$, $A_2(\xi)$ непрерывны на вещественной оси $-\infty < \xi < \infty$, периодичны с периодом 2π, допускают аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость и $A_1(0) \neq 0$, $A_2(\pi) \neq 0$.

2. Покажем теперь, что основное уравнение (4.3) при каждом фиксированном n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ имеет единственное решение.

Пусть при некотором n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ однородное уравнение

$$h_m + \sum_{k=1}^{\infty} h_k F_{k+m+2n} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \cdots) \tag{4.4}$$

имеет ненулевое решение $h = \{h_m\}_1^{\infty}$ из $l^2(1, \infty)$. В силу вещественности F_m без ограничения общности, можно считать, что h_m вещественны. Продолжим вектор h на все пространство $l^2(-\infty, \infty)$, полагая $h_0 = h_{-1} = h_{-2} = \cdots = 0$, и обозначим

$$\sum_{m=1}^{\infty} h_m e^{im\xi} = H(\xi). \tag{4.5}$$

Функция $H(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость.

В силу обычного равенства Парсеваля

$$\sum_{m=1}^{\infty} h_m^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\xi)|^2 d\xi. \tag{4.6}$$

Умножим (4.4) на h_m и просуммируем по m в пределах от 1 до ∞:

$$\sum_{m=1}^{\infty} h_m^2 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_m h_k F_{k+m+2n} = 0.$$

Подставив сюда вместо h_m его выражение (4.3′) и принимая во внимание (4.5), (4.6) и (2.7), мы получим

$$\sum_{j=1}^{N} M_j^2 e^{2inz_j} H^2(z_j) + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(-\xi) - S(\xi) e^{2in\xi} H(\xi)|^2 d\xi = 0.$$

Отсюда, в силу положительности всех слагаемых и периодичности подынтегральной функции, имеем

$$H(z_j) = 0 \quad (j = 1, \cdots, N), \tag{4.7}$$

$$H(-\xi) - S(\xi) e^{2in\xi} H(\xi) = 0 \quad (-\infty < \xi < \infty). \tag{4.8}$$

Пусть сначала $f_0(0) \neq 0$, $f_0(\pi) \neq 0$. Подставив в (4.8) вместо функции $S(\xi)$ ее выражение (2.6), получим

$$\frac{e^{-in\xi} H(-\xi)}{f_0(-\xi)} = \frac{e^{in\xi} H(\xi)}{f_0(\xi)} \quad (-\infty < \xi < \infty). \tag{4.9}$$

Функция $\dfrac{e^{inz} H(z)}{f_0(z)}$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, в силу (4.7) она не имеет особенностей в точках $z = z_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ и непрерывна на вещественной оси. Из (4.9) следует, что по принципу симметрии она аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость, следовательно, эта функция—целая. Так как $\dfrac{e^{inz} H(z)}{f_0(z)} \to 0$ при $\operatorname{Im} z \to \infty$, то эта функция тождественно равна нулю, следовательно, $H(z) \equiv 0$, значит $h_m \equiv 0$.

Если хотя бы одно из чисел $f_0(0)$, $f_0(\pi)$ обращается в нуль, то следует умножить обе части (4.9) на $i(1 - e^{-i\xi})(1 + e^{i\xi}) = -2\sin\xi$ и дальше (принимая во внимание лемму 4.1), мы рассуждаем для $n \geq 1$ как и в первом случае. При $n = 0$, в силу того, что при $\operatorname{Im} z \to \infty$ $f_0(z) = \alpha_0 + o(1)$, $H(z) = h_1 e^{iz}[1 + o(1)]$, мы получим, что

$$-2\sin z \frac{H(z)}{f_0(-z)} \equiv i\frac{h_1}{\alpha_0}.$$

С другой стороны, в силу (4.9) функция $-2\sin\xi \dfrac{H(\xi)}{f_0(-\xi)}$ нечетная, следовательно, $H(\xi) \equiv 0$.

Таким образом, уравнение (4.3) при каждом n $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ имеет единственное решение.

3. Уравнение (4.3) позволяет нам формально решить обратную задачу рассеяния. Действительно, пусть совокупность величин $\{S(\xi);$

$z_1, \cdots, z_N$; $M_1, \cdots, M_N\}$ является данным рассеяния для задачи (1.1)+ +(1.2). Построим с помощью данных рассеяния последовательность F_m по формуле (4.3′) и рассмотрим уравнение (4.3) с неизвестными A_{nm}. Как выше показано, это уравнение имеет единственное решение A_{nm}. По A_{nm} мы определяем b_n, a_n по формулам (1.7), (1.6) соответственно.

Однако, эти рассуждения носят условный характер, так как мы заранее предполагаем, что совокупность величин $\{S(\xi); z_1, \cdots, z_N; M_1, \cdots, M_N\}$ является данными рассеяния. Поэтому возникает вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий на совокупность величин $\{S(\xi); z_1, \cdots, z_N; M_1, \cdots, M_N\}$ для того, чтобы она являлась данными рассеяния для некоторого уравнения вида (1.1) с коэффициентами из класса (1.2). Эта задача нами будет рассмотрена в другом месте.

В заключение приношу глубокую благодарность своему научному руководителю Б. М. Левитану за внимание к настоящей работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 9.XI.1975

Գ. Շ. ԳՈՒՍԵՅՆՈՎ. Յակոբիի անվերջ մատրիցի ցրման խնդիրը *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում են Յակոբիի անվերջ մատրիցի ցրման ուղիղ և հակադարձ խնդիրները։

G. Sh. GUSEINOV. *Scattering problem for the infinite Jacobi matrix* (summary)

The direct and the inverse scattering problems for the infinite Jacobi matrix s discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. M. Case* and *S. C. Chin*. The discrete version of the Marchenko equations in the inverse scattering problem, J. Math. Phys., 14, № 11, 1973, 1643—1647.
2. *В. Г. Таркопольский*. Задача рассеяния для разностного уравнения, ДАН СССР, 136, № 4, 1961, 779—782.
3. *М. С. Эскина*. Прямая и обратная задача рассеяния для уравнения в частных разностях, ДАН СССР, 166, № 4, 1966, 809—812.
4. *С. В. Манаков*. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах, ЖЭТФ, 67, вып. 2 (8), 1974, 543—555.
5. *В. А. Марченко*. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля, Киев, „Наукова Думка", 1972.