

Г. К. ОГАНЕСЯН

О РЯДАХ ИЗ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В работе [1] доказана следующая

Теорема. Пусть ряд из независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ . Если

$$P(|\xi| \geq y) = O(e^{-y^q}).$$

при некотором $q > 2$, то у величин $\{\xi_n\}$ существуют все моменты и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M \xi_n^2)^{\beta} < +\infty$$

при всех $\beta > \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{q-1}$.

В настоящей работе доказывается одно обобщение сформулированной теоремы. В частности, это обобщение содержит следующий результат: пусть ряд из независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ . Если

$$P(|\xi| \geq y) = O(e^{-e^y}),$$

то у величин $\{\xi_n\}$ существуют все моменты и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M \xi_n^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\log^{2+\varepsilon} \left(\frac{1}{M \xi_n^2} \right)} < +\infty$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Для формулировки нашей теоремы введем функции $H(y)$ и $H^*(y)$. Пусть $H(y)$ — положительная, непрерывная, строго возрастающая функция на $[0, +\infty)$. Функция $H^*(y)$ определяется соотношением $H(H^*(y)) = y + 1$ или же $H^*(y) = H^{-1}(y + 1)$.

Предположим, что при некотором $\alpha < 1$

$$\frac{H^*(y)}{y^2} \downarrow \quad (1)$$

справедливо.

Теорема 1. Пусть ряд из независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ . Если

$$P(|\xi| \geq y) = O(e^{-yH(y)}), \quad (2)$$

то у величин $\{\xi_n\}$ существуют все моменты и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (M(\xi_n^2))^{\frac{1}{2}} \frac{1}{H^*\left(\frac{1}{\sqrt{M(\xi_n^2)}}\right) \log^{1+\varepsilon} \frac{1}{M(\xi_n^2)}} < +\infty$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Предварительно докажем ряд лемм.

Лемма 1. Пусть случайная величина ξ удовлетворяет условию (2). Если

$$\Phi(z) = Me^{z\xi},$$

то

$$|\Phi(z)| \leq ce^{|z| \cdot H^*(|z|)}.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} |\Phi(z)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy} dP(\xi < y) \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|z||y|} dP(\xi < y) \right| \leq \\ &\leq 1 - \int_0^{+\infty} e^{|z||y|} dP(|\xi| \geq y) = 1 - e^{|z|y} P(|\xi| \geq y) \Big|_0^{\infty} + \\ &+ |z| \int_0^{\infty} e^{|z|y} P(|\xi| \geq y) dy. \end{aligned}$$

Положим $|z| = r$ и, используя условие (2), имеем

$$|\Phi(z)| \leq c_1 \left[1 + r \int_0^{+\infty} e^{ry - yH(y)} dy \right].$$

При $y \geq H^*(r)$ выполняется неравенство

$$ry - yH(y) \leq -y,$$

используя этот факт, получаем

$$|\Phi(z)| \leq c_1 \left[1 + r \int_0^{H^*(r)} e^{ry-yH(y)} dy + r \int_{H^*(r)}^{+\infty} e^{ry-yH(y)} dy \right] \leq \\ \leq c_1 [1 + e^{rH^*(r)} - 1 + r] \leq c_2 e^{rH^*(r)}.$$

Лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. Пусть $\varphi(t)$ — неубывающая на $[0; +\infty)$ функция. Пусть, далее, $H^*(t)$ — монотонно возрастающая, положительная, непрерывная функция, удовлетворяющая условию (1). Если

$$\int_2^{\infty} \frac{\varphi(t)}{H^*(t) t^2 \log^{1+\varepsilon} t} dt < +\infty, \quad (3)$$

то

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t H^*(t) \log^{1+\varepsilon} t} d\varphi(t) < +\infty. \quad (4)$$

Доказательство. Введем обозначение $h(t) \equiv \frac{\int_0^t H^*(x) dx}{x}$.

Из условия (1) следует неравенство

$$\frac{1}{\alpha+1} H^*(t) \leq h(t) \leq H^*(t). \quad (5)$$

Из неравенства (5) при помощи несложных выкладок убеждаемся, что $h(t)$ монотонно возрастающая, положительная, дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{h(t)}{t^2} \downarrow.$$

Используя эти свойства $h(t)$, из (3) получим

$$\left| \int_2^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t \log^{1+\varepsilon} t} d \frac{1}{h(t)} \right| < +\infty. \quad (6)$$

Из (6) следует, что если $r \geq r_1$, то

$$1 \geq - \int_r^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t \log^{1+\varepsilon} t} d \frac{1}{h(t)} \geq - \varphi(r) \int_r^{\infty} \frac{1}{t \log^{1+\varepsilon} t} d \frac{1}{h(t)} = \\ = \varphi(r) \frac{1}{h(r) r \log^{1+\varepsilon} r} - \varphi(r) \int_r^{\infty} \frac{1}{h(t) t^2 \log^{1+\varepsilon} t} dt -$$

$$= \varphi(r) \int_r^\infty \frac{1+\varepsilon}{h(t) t \log^{1+\varepsilon} t} dt.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\varphi(r)}{h(r) r \log^{1+\varepsilon} r} < M \text{ для } r > r_1. \quad (7)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \int_2^r \frac{1}{h(t) t \log^{1+\varepsilon} t} d\varphi(t) &= \frac{\varphi(r)}{h(r) r \log^{1+\varepsilon} r} - \\ &- \int_2^r \varphi(t) \frac{1}{t \log^{1+\varepsilon} t} d \frac{1}{h(t)} + \int_2^r \varphi(t) \frac{1}{h(t) t^2 \log^{1+\varepsilon} t} dt + \\ &+ \int_2^r \varphi(t) \frac{1+\varepsilon}{h(t) t^2 \log^{2+\varepsilon} t} dt. \end{aligned}$$

Из (3), (6), (7) следует, что правая часть этого равенства ограничена. Следовательно, ограничена и левая часть. Из неравенства (5) вытекает справедливость неравенства (4), что и требовалось доказать.

Введем обозначение $N(t) = \int_0^t \frac{n(r)}{r} dr$, где $n(r)$ число нулей

функции $\Phi(z) = Me^{z^2}$ в круге $|z| \leq r$.

Лемма 3. Пусть $H(t)$ — положительная, монотонно возрастающая, непрерывная функция, которая при некотором $\alpha < 1$ удовлетворяет условию (1).

Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — последовательность нулей функции $\Phi(z) = Me^{z^2}$ с учетом их кратности. Если

$$|\Phi(z)| \leq c e^{|z| H^*(|z|)}, \quad (8)$$

то

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{H^*(|z_k|) |z_k| \log^{1+\varepsilon} |z_k|} < +\infty. \quad (9)$$

Доказательство: Из формулы Иенсена следует (см. [2], стр. 220)

$$N(t) \leq c_1 t H^*(t).$$

Отсюда получаем

$$\int_0^\infty \frac{N(t)}{H^*(t) t^2 \log^{1+\varepsilon} t} dt \leq c_1 \int_0^\infty \frac{1}{t \log^{1+\varepsilon} t} dt < +\infty.$$

Если теперь в лемме 2 вместо $\varphi(t)$ возьмем $N(t)$, то получим

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{H^*(t) t \log^{1+\varepsilon} t} dN(t) < +\infty.$$

Отсюда имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{n(t)}{H^*(t) t^2 \log^{1+\varepsilon} t} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{H^*(t) t \log^{1+\varepsilon} t} dN(t) < +\infty.$$

Следовательно, если в лемме 2 вместо $\varphi(t)$ взять $n(t)$, то получим

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{H^*(t) t \log^{1+\varepsilon} t} dn(t) < +\infty.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{H^*(|z_k|) |z_k| \log^{1+\varepsilon} |z_k|} &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r \frac{1}{H^*(t) t \log^{1+\varepsilon} t} dn(t) = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{H^*(t) t \log^{1+\varepsilon} t} dn(t) < +\infty. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем произвольное число n . Тогда случайная величина ξ допускает разложение

$$\xi = \xi_n + \eta_n, \text{ где } \eta_n = \sum_{k=n}^{\infty} \xi_k.$$

По теореме Леви-Райкова (см. [3], стр. 77) следует, что для случайной величины ξ_n также имеет место соотношение (2). Пусть $\Phi(z)$ — характеристическая функция ξ , $f_n(z)$ и $\psi_n(z)$ — характеристические функции величин ξ_n и η_n соответственно. Из равенства

$$\Phi(z) = f_n(z) \Psi_n(z)$$

следует, что все нули функции $f_n(z)$ являются нулями функции $\Phi(z)$. В силу сказанного имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{H^*(|z_{n_k}|) |z_{n_k}| \log^{1+\varepsilon} |z_{n_k}|} < +\infty \quad (10)$$

и

$$M(\xi_n^2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{n_k}|^2} < +\infty, \quad (11)$$

где $\{z_{n_k}\}_1^{\infty}$ — последовательность нулей функций с учетом кратности. Введем обозначение

$$P(x) = \{H^*(x^{-\frac{1}{2}}) \log^{1+\varepsilon}(x^{-\frac{1}{2}})\}^{-1} x^{\frac{1}{2}}.$$

Воспользовавшись условием (1), получим $P(x) \cdot x^{-1} \downarrow$. Отсюда следует, что $P(x)$ — полуаддитивная функция (см. [4], стр. 105). Из (10), (11) вытекает, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{M(\xi_n^2)}}{H^*\left(\frac{1}{\sqrt{M(\xi_n^2)}}\right) \log^{1+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{M(\xi_n^2)}}} &= \sum_{n=1}^{\infty} P(M(\xi_n^2)) \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z_{nk}|^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\frac{1}{|z_{nk}|^2}\right) = \\ &= \sum_{n,k=1}^{\infty} \frac{1}{H^*(|z_{nk}|) |z_{nk}| \log^{1+\varepsilon} |z_{nk}|} < +\infty. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть ряд из независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ . Если

$$P(|\xi| \geq y) = O(e^{-y^q})$$

при некотором $q > 2$, то у величин $\{\xi_n\}$ существуют все моменты и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M(\xi_n^2)^{\frac{1}{2} \frac{q}{q-1}}}{\log^{1+\varepsilon} \frac{1}{M(\xi_n^2)}} < +\infty.$$

Отсюда следует, что если для сходящегося почти всюду на $[0, 1]$ ряда по системе Радемахера

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t)$$

выполняется условие

$$P(|f(t)| \geq y) = O(e^{-y^q}) \quad (q > 2),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|^{\frac{q}{q-1}}}{\log^{1+\varepsilon} |a_n|} < +\infty.$$

Следствие 2. Пусть ряд из независимых случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ . Если

$$P(|\xi| \geq y) = O(e^{-e^y}),$$

то у величин $\{\xi_n\}$ существуют все моменты и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(M(\xi_n^2))^{\frac{1}{2}}}{\log^{1+\varepsilon} \left(\frac{1}{M(\xi_n^2)} \right)} < +\infty.$$

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю, профессору Е. М. Никишину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила 21.XII.1975

Գ. Կ. ՇՈՎԱՆԵՍԻԱՆ. Անկախ փոփոխական մեծություններից կազմված շարքերի վերաբերյալ (ամփոփում)

Հոդվածում ապացուցվում է մի թեորեմ անկախ փոփոխական մեծություններից կազմված շարքերի վերաբերյալ: Այդ թեորեմում ընդհանրացվում և ուժեղացվում է Ե. Մ. Նիկիշինի մի արդյունքը:

G. K. HOVANESSIAN. *On series of independent random variables*
(summary)

A theorem about series of independent random variables is proved. This theorem generalizes and strengthens a result of E. M. Nickishin.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Е. М. Никишин. Об одном свойстве сумм независимых величин, Матем. заметки, 16, вып. 5, 1974.
2. А. Н. Маркушевич. Теория аналитических функций, т. 2, М., Изд. «Наука», 1968.
3. Ю. В. Линник, И. В. Островский. Разложения случайных величин и векторов, М., Изд. «Наука», 1972.
4. Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа. Неравенства, М., ИИЛ, 1948.