ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

А. А. ВАГАРШАКЯН

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ В ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ

В статье С. Я. Хавинсона [1] доказан следующий результат Пусть последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $|z_k|<1$ такова, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)=\infty$$

и

$$\frac{|z_{k+1}|-|z_k|}{(1-|z_{k+1}|)(1-|z_k|)}\geq\delta>0,$$

где $\delta>0$ от k не зависит. Если $f(z)$ — ограниченная в круге $|z|<$ аналитическая функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{k\to\infty}(1-|z_k|)\ln|f(z_k)|=-\infty,$$

то $f(z)\equiv 0$.

Аналогичный результат, при несколько других предположения на последовательность $|z_k|_{k=1}^{\infty}$, был получен И. В. Ушаковой [2], [3] В дальнейшем И. В. Ушакова [4] обобщила эти результаты на более широкие классы функций.

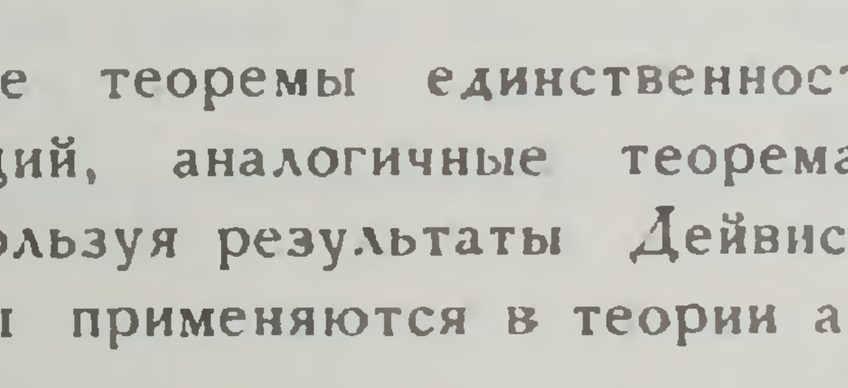
Теоремы вышеприведенного типа связаны с такими аппроксимационными процессами, в которых учитываются не только отклонения криближающего полинома от приближаемой функции, но и величины поэффициентов приближающих полиномов.

Основы теории, связывающей теоремы полноты, с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов, с теоремами единственности, были даны в работах Дейвиса, Фань-Цзи [5] и С. Я. Хавинсона [6].

В настоящей статье доказаны новые теоремы единственности для ограниченных аналитических функций, аналогичные теоремам И. В. Ушаковой и С. Я. Хавинсона. Используя результаты Дейвиса, Фань-Цзи, С. Я. Хавинсона, эти теоремы применяются в теории аппроксимации.

1°. Введем несколько обозначений. Пусть $\alpha\geq 0$, а $E\subseteq\partial D$—некоторое множество, где $D=\{z/|z|<1\}$. Рассмотрим всевозможные покрытия множества E счетным набором шаров радиусов r_i:

$$\bigcup_i S_i\supseteq E$$



и положим

$$M_\alpha(E) = \inf\left(\sum_i r_i^\alpha\right),$$

где infimum берется по всем таким покрытиям. Подробно о величинах $M_\alpha(E)$ можно познакомиться в книге Л. Карлесона [9]. Заметим, что $M_\alpha(E)$—неотрицательная, монотонно возрастающая, счетно полуаддитивная функция множеств. В случае, когда $\alpha = 0$ для любого непустого множества $F \subseteq \partial D$ имеем $M_0(F) \geqslant 1$, а в случае $\alpha > 1$, $M_\alpha(\partial D) = 0$.

Пусть $1 \leqslant \beta < \infty$ и $0 < A < \infty$. Обозначим

$$\Delta_\beta(y) = \left\{ x \in D \,\middle|\, \left| y - \frac{x}{|x|} \right|^\beta < A(1 - |x|) \right\},$$

где $y \in \partial D$.

Лемма 1. *Пусть* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $1 \leqslant \beta \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha}$, *а* $u(x)$ — *неотрицательная гармоническая функция, определенная на* D. *Тогда для множества*

$$F = \{y \in \partial D \mid \sup_{x \in \Delta_\beta(y)} ((1 - |x|)^\alpha u(x)) = \infty\}$$

имеет место

$$M_{\beta(1-\alpha)}(F) = 0$$

Обратно, для любого $F \subset \partial D$ *такого, что* $M_{\beta(1-\alpha)}(F) = 0$, *существует неотрицательная гармоническая функция* $u(x)$ *такая, что в любой точке* $y \in F$ *имеет место*

$$\sup_{x \in \Delta_\beta(y)} ((1 - |x|)^\alpha u(x)) = \infty.$$

Доказательство леммы 1, в несколько более общей форме, можно найти у автора [7].

Лемма 2. *Пусть* $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ — *последовательность в* D, *удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty.$$

Тогда существует множество $E \subseteq \partial D$ *такое, что*

$$M_{\beta(1-\alpha)}(E) = 0,$$

где

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad 1 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$$

и

$$\sum_{\Delta_\beta(y) \ni z_k} (1 - |z_k|)^\alpha < \infty$$

для любого $y \in \partial D \setminus E$.

Доказательство. Для точек $0 \neq z \in D$ положим

$$C(z) = |y \in \partial D \mid z \in \Delta_\beta(y)|.$$

Через $\chi(z, y)$ мы обозначим характеристическую функцию множества $C(z)$, определенную на ∂D. Введем функцию

$$f(y) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha} \chi(z_k, y), \quad y \in \partial D.$$

Легко заметить, что

$$f(y) = \sum_{\Delta_\beta(y) \ni z_k} (1 - |z_k|)^{\alpha}.$$

Следовательно, достаточно доказать, что для множества $E = \{y \in \partial D / f(y) = \infty\}$, $M_{\beta(1-\alpha)}(E) = 0$. Предположим, что это не так, т. е. $M_{\beta(1-\alpha)}(E) > 0$. Согласно теореме Безиковича (см. Л. Карлесон [9], стр. 18) существует компактное множество $F \subset E$ такое, что $M_{\beta(1-\alpha)}(F) > 0$. Далее, по теореме Фростмана (см. Л. Карлесон [9], стр. 14) существует константа a такая, что для любого компактного множества F существует неотрицательная мера μ, обладающая свойствами:

$$\mu(S_r) \leqslant r^{\beta(1-\alpha)}$$

для любого интервала $S_r \subset \partial D$ длины $2r$ и

$$\mu(F) \geqslant a M_{\beta(1-\alpha)}(F).$$

Следовательно, мы имеем

$$\infty = \int_F f(y)\, \mu(dy) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha} \int_F \chi(z_k, y)\, \mu(dy) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) \right) \sup_{z \in D} \frac{\mu(C(z))}{(1 - |z|)^{1-\alpha}}.$$

Заметим, что $C(z)$ — интервал на ∂D с центром в точке $\frac{z}{|z|}$ и длиной $2 A^{\frac{1}{\beta}} (1 - |z|)^{\frac{1}{\beta}}$. Следовательно

$$\infty \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) \right) \sup \frac{A^{1-\alpha} \mu(S_r)}{r^{\beta(1-\alpha)}} \leqslant A^{1-\alpha} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) \right) < \infty,$$

где supremum берется по всем интервалам длины $2r$. Из полученного противоречия вытекает, что $M_{\beta(1-\alpha)}(E) = 0$.

Лемма 3. *Пусть $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в D, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |w_k|)^{\alpha} < \infty,$$

где $0 < \alpha < 1$, а $B(z, w_k)$ — произведение Бляшке с нулями в точках $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда для любого множества $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющего условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)^{\alpha}=\infty$$

и

$$\inf_{i\neq j}\left|\frac{1}{(1-|z_i|)^{\alpha}}-\frac{1}{(1-|z_j|)^{\alpha}}\right|>0,$$

имеет место

$$\varliminf_{n\to\infty}(1-|z_n|)^{\alpha}\ln|B(z_n,\ w_k)|>-\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\pi_{\alpha}(z)=\frac{z}{|z|}(1-(1-|z|)^{\alpha}),$$

где $0\neq z\in D$ и $\pi(0)=0$. Заметим, что $\pi(z)$ отображает единичный круг на себя и для любого $z\in D$, $|\pi(z)|\leqslant|z|$. Пусть w и z—точки из D, удовлетворяющие условию

$$\min\{|w|,\ |z|\}\geqslant 1-(2(1-\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Докажем, что имеет место неравенство

$$\left|\frac{|\pi(w)|-|\pi(z)|}{1-|\pi(w)||\pi(z)|}\right|\leqslant\left|\frac{|w|-|z|}{1-|w||z|}\right|. \tag{1}$$

Обозначим $x=1-|w|$ и $y=1-|z|$. Тогда неравенство (1) примет вид

$$\left|\frac{x^{\alpha}-y^{\alpha}}{x^{\alpha}+y^{\alpha}-x^{\alpha}y^{\alpha}}\right|\leqslant\left|\frac{x-y}{x+y-xy}\right|, \tag{2}$$

где $0<x,\ y<(2(1-\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}$. Сначала рассмотрим случай, когда $x>y$. Неравенство (2) можно записать в виде

$$(x^{\alpha}-y^{\alpha})(x+y-xy)\leqslant(x-y)(x^{\alpha}+y^{\alpha}-x^{\alpha}y^{\alpha}),$$

или

$$2x^{\alpha}y+xy^{\alpha+1}+x^{\alpha+1}y^{\alpha}\leqslant 2xy^{\alpha}+x^{\alpha+1}y+x^{\alpha}y^{\alpha+1}.$$

Так как $xy^{\alpha+1}\leqslant x^{\alpha+1}y$, то достаточно доказать, что

$$2x^{\alpha}y+x^{\alpha+1}y^{\alpha}\leqslant 2xy^{\alpha}+x^{\alpha}y^{\alpha+1},$$

или, что то же самое

$$2y^{1-\alpha}-y\leqslant 2x^{1-\alpha}-x. \tag{3}$$

Заметим, что функция $f(t)=2t^{1-\alpha}-t$ имеет неотрицательную производную при $0<t<(2(1-\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}$, и поэтому в этом интервале $f(t)$ — неубывающая функция. Из приведенного замечания и из неравенств

$$0<y<x<(2(1-\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}$$

следует неравенство (3). Аналогично рассматривается случай, когда $0 < x < y < (2(1-x))^{\frac{1}{\alpha}}$.

Не теряя общности, можно предположить, что

$$\min\{|w_k|, |z_k|\} > 1 - (2(1-x))^{\frac{1}{\alpha}}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Тогда в силу (1) имеем

$$|B(|\pi(z)|, |\pi(w_k)|)| = \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{|\pi(w_k)| - |\pi(z)|}{1 - |\pi(w_k|\,|\pi(z)|} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{|w_k| - |z|}{1 - |w_k|\,|z|} \right| \leqslant |B(z, w_k)| \tag{4}$$

при $|z| > 1 - (2(1-x))^{\frac{1}{\alpha}}$. Заметим, что последовательности $|\pi(w_k)|_{k=1}^{\infty}$ и $|\pi(z_n)|_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям

1. $$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - \pi(w_k)|) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |w_k|)^{\alpha} < \infty;$$

2. $$\inf_{i \neq j} \left| \frac{|\pi(z_i)| - |\pi(z_j)|}{(1 - |\pi(z_i)|)(1 - |\pi(z_j)|)} \right| =$$

$$= \inf_{i \neq j} \left| \frac{1}{(1 - |z_i|)^{\alpha}} - \frac{1}{(1 - |z_j|)^{\alpha}} \right| > 0;$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\pi(z_n)|) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|)^{\alpha} = \infty.$$

Из условия 1 следует, что произведение Бляшке с нулями $\{|\pi(w_k)|\}_{k=1}^{\infty}$ сходится $B(z, |\pi(w_k)|) \not\equiv 0$, из 2 и 3 следует, что последовательность $\{|\pi(z_n)|\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы И. В. Ушаковой и С. Я. Хавинсона [1] (эта теорема приведена во введении настоящей статьи). Следовательно мы имеем

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} (1 - |\pi(z_n)|) \ln |B(|\pi(z_n)|, |\pi(w_k)|)| > -\infty.$$

Пользуясь неравенством (4), получим

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} (1 - |z_n|)^{\alpha} \ln |B(z_n, w_k)| > -\infty.$$

2°. Теперь докажем основной результат настоящей статьи.

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$, *числа* $0 < \alpha < 1$, $1 \leqslant \beta \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$, $2 < A < \infty$ *и множество* $E \subseteq \partial D$ *таковы, что для любой точки* $y \in E$ *существует подпоследовательность* $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, *удовлетворяющая условиям:*

1. $$\left|y-\frac{z_{n_k}}{|z_{n_k}|}\right|^\beta < A(1-|z_{n_k}|);$$

2. $$\inf_{i\neq j}\left|\frac{1}{(1-|z_{n_i}|)^\alpha}-\frac{1}{(1-|z_{n_j}|)^\alpha}\right|>0;$$

3. $$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_{n_k}|)^\alpha=\infty,$$

а множество E удовлетворяет условию

$$M_{\beta(1-\alpha)}(E)>0.$$

Если $f(z)$ — ограниченная, аналитическая на D функция и

$$\lim_{n\to\infty}(1-|z_n|)^\alpha\ln|f(z_n)|=-\infty, \tag{5}$$

то $f(z)\equiv 0$.

Доказательство. Предположим, что теорема не верна, т. е. существует последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям теоремы и ограниченная аналитическая функция $f(z)\not\equiv 0$, для которой имеет место (5). Не теряя общности, можно считать $|f(z)|\leqslant 1$, $|z|<1$. Из факторизационной теоремы Неванлинны следует, что

$$f(z)=z^p B(z,\ w_k)\exp\left\{-\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\,\mu(d\vartheta)+iC\right\},$$

где p — натуральное число, $B(z,\ w_k)$ — произведение Бляшке, составленное по нулям функции $f(z)$, μ — конечная положительная мера, а C — действительное число. Следовательно, имеем

$$(1-|z|)^\alpha\ln|f(z)|=p(1-|z|)^\alpha\ln|z|+(1-|z|)^\alpha\ln|B(z,\ w_k)|-$$
$$-(1-|z|)^\alpha u(z), \tag{6}$$

где $u(z)$ — неотрицательная гармоническая функция. Из леммы 1 следует, что существует множество $F_1\subset\partial D$ такое, что

$$M_{\beta(1-\alpha)}(F_1)=0 \tag{7}$$

и для любой точки $y\in\partial D\setminus F_1$

$$\sup_{\Delta_\beta(y)\ni z}(1-|z|)^\alpha u(z)<\infty. \tag{8}$$

Так как

$$\lim_{|z|\to 1}(1-|z|)^\alpha\ln|z|=0,$$

то нам остается оценить второе слагаемое в (6). Из леммы 2 следует, что существует множество $F_2\subset\partial D$ такое, что

$$M_{\beta(1-\alpha)}(F_2)=0, \tag{9}$$

и для любого $y\in\partial D\setminus F_2$

$$\sum(1-|w_k|)^\alpha<\infty, \tag{10}$$

где сумма берется по тем w_k, которые удовлетворяют условию

$$\left| y - \frac{w_k}{|w_k|} \right|^3 \leqslant A\, 2^{3+1} (1 - |w_k|). \tag{11}$$

Далее, так как

$$v(z) = \sum_{k=1} \frac{1 - |z|^2}{\left| z - \dfrac{w_k}{|w_k|} \right|^3} (1 - |w_k|)$$

—неотрицательная гармоническая функция на D, то из леммы 1 вытекает, что существует множество $F_3 \subset \partial D$ такое, что

$$M_{3(1-\varepsilon)}(F_3) = 0, \tag{12}$$

и для любой точки $y \in \partial D \setminus F_3$

$$\sup_{\Delta_3(y) \ni z} (1 - |z|)^3 v(z) < \infty. \tag{13}$$

В силу (7), (9) и (12) имеем

$$M_{3(1-\varepsilon)}(F) = 0,$$

где $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$. Так как $M_{3(1-\varepsilon)}(E) > 0$, то существует точка $y \in E \setminus F$. Разобьем произведение Бляшке $B(z, w_k)$ на три множителя

$$B(z, w_k) = B_1(z)\, B_2(z)\, B_3(z),$$

где $B_1(z)$—произведение Бляшке, составленное по тем w_k, которые удовлетворяют условию $|y - w_k| \geqslant \frac{1}{4}$, $B_2(z)$ составлена по тем w_k, которые удовлетворяют условию (11) и $|y - w_k| < \frac{1}{4}$, а $B_3(z)$ составлена по остальным точкам w_k. Заметим, что

$$\lim_{z \to y} (1 - |z|)^2 \ln |B_1(z)| = 0. \tag{14}$$

Прежде чем продолжать изучение произведения Бляшке, докажем одно неравенство. Для любых точек z, $w \in D$ имеем

$$\ln \left| \frac{w - z}{1 - \bar{w} z} \right|^2 = -\ln \left(1 + \frac{(1 - |w|^2)(1 - |z|^2)}{|w - z|^2} \right) \geqslant -$$

$$- \frac{(1 - |w|^2)(1 - |z|^2)}{|w - z|^2}. \tag{15}$$

Последнее неравенство имеет место, так как $\ln(1 + x) \leqslant x$, $x > 0$. Далее заметим, что если

$$2(1 - |w|) \leqslant \left| z - \frac{w}{|w|} \right|, \tag{16}$$

то справедливо неравенство

$$\left|z-\frac{w}{|w|}\right| \leqslant |z-w| + \left|w-\frac{w}{|w|}\right| =$$

$$= |z-w| + (1-|w|) \leqslant |z-w| + \frac{1}{2}\left|z-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Следовательно

$$2|z-w| \geqslant \left|z-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Поэтому, если z и w удовлетворяют неравенству (16), то в силу (15) имеем

$$\ln\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|^2 \geqslant -4\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{\left|z-\frac{w}{|w|}\right|^2}. \tag{17}$$

Теперь предположим, что w удовлетворяет условию

$$A\,2^{\beta+1}(1-|w|) < \left|y-\frac{w}{|w|}\right|^{\beta}, \tag{18}$$

где $y \in \partial D$ — заранее фиксированная точка, $z \in \Delta_{\frac{1}{4}}(y)$ и $|y-w|,\ |y-z| < \frac{1}{4}$.

Тогда имеет место неравенство

$$2(1-|w|) \leqslant \left|z-\frac{w}{|w|}\right|. \tag{19}$$

Действительно, если

$$4(1-|w|) \leqslant \left|\frac{w}{|w|}-\frac{z}{|z|}\right|,$$

то неравенство (19) очевидно, так как

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{w}{|w|}-\frac{z}{|z|}\right| \leqslant \left|z-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Предположим, что

$$\left|\frac{w}{|w|}-\frac{z}{|z|}\right| < 4(1-|w|).$$

Тогда имеем

$$A\,2^{\beta+1}(1-|w|) \leqslant \left|y-\frac{w}{|w|}\right|^{\beta} \leqslant 2^{\beta-1}\left(\left|y-\frac{z}{|z|}\right|^{\beta}+\left|\frac{z}{|z|}-\frac{w}{|w|}\right|^{\beta}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\beta-1}(A(1-|z|)+4(1-|w|)).$$

Следовательно вспоминая, что $A > 2$, получим

$$2(1-|w|) \leqslant 4\frac{A-1}{A}(1-|w|) \leqslant 1-|z|.$$

Далее

$$2(1-|w|)\leqslant 1-|z|\leqslant\left|z-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Таким образом, мы доказали, что если $z\in\Delta_\delta(y)$, w удовлетворяют условию (18) и $|y-z|<\frac{1}{4}$, $|y-w|<\frac{1}{4}$, то имеет место (16), следовательно имеет место и неравенство (17). Так как нули произведения Бляшке $B_3(z)$ удовлетворяют условию

$$A\,2^{\beta+1}(1-|w_k|)<\left|y-\frac{w_k}{|w_k|}\right|^\beta$$

и $|y-w_k|<\frac{1}{4}$, то из вышеприведенных оценок следует, что для

$$z\in\Delta_\beta(y)\cap\left\{z/|y-z|<\frac{1}{4}\right\}$$

имеет место

$$\ln|B_3(z)|\geqslant -2\sum\frac{(1-|w_k|^2)(1-|z|^2)}{\left|z-\frac{w_k}{|w_k|}\right|^2}\geqslant -4v(z). \tag{20}$$

Пусть $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность, соответствующая точке y, о которой говорится в формулировке теоремы. Из леммы 3 следует, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(1-|z_{n_k}|)^\alpha\ln|B_3(z_{n_k})|>-\infty. \tag{21}$$

Таким образом, из оценок (13), (14), (20), (21) имеем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(1-|z_{n_k}|)^\alpha\ln|B(z_{n_k},\ w_m)|>-\infty.$$

Наконец, учитывая (8), получим

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(1-|z_{n_k}|)^\alpha\ln|f(z_{n_k})|>-\infty,$$

что противоречит (5). Теорема доказана.

Аналог теоремы 1 верен и в крайнем случае, когда $\alpha=0$, $\beta=1$. В этом случае имеет место

Теорема 2. *Пусть последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и множество $E\subset\partial D$ положительной меры таковы, что для любой точки $y\in E$ существует бесконечная подпоследовательность $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям*

$$\left|y-\frac{z_{n_k}}{|z_{n_k}|}\right|\leqslant A(1-|z_{n_k}|),\quad k=1,\ 2,\ \cdots,$$

где $A < \infty$ *от* k *не зависит. Тогда из того, что для ограниченной аналитической функции* $f(z)$ *имеет место*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0,$$

следует, что $f(z) \equiv 0$.

Доказательство вытекает из того, что ограниченная аналитическая функция, не равная тождественно нулю, почти всюду на ∂D имеет некасательные граничные значения, которые не могут обращаться в нуль на множестве положительной лебеговой меры.

Замечание. Вторая часть леммы 1 показывает, что доказанные выше теоремы в некотором смысле точны.

3°. Приведем приложение доказанных теорем в теории аппроксимации. Приведенная ниже конструкция достаточно универсальна и ее можно применять во многих случаях. Для иллюстрации этого метода мы рассмотрим вопросы приближения функций из L_p, $1 \leqslant p < \infty$, рациональными функциями с фиксированными полюсами. Сначала сформулируем некоторые общие теоремы, доказательство которых можно найти у С. Я. Хавинсона [8].

Пусть X—нормированное пространство, а $p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$—норма в n-мерном пространстве $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in E^n$, причем для любого $m > n$ и любых $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$

$$p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = p(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \underbrace{0, \cdots, 0}_{m-n}).$$

Пространство, сопряженное к E^n обозначим $(E^n)^*$, а через p^*—норму в нем.

Определение. Мы скажем, что система $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$, $o(p)$ полна в X, если для любого $\varepsilon > 0$ и любого элемента $x \in X$ существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ такие, что

$$\|x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j\| < \varepsilon$$

и

$$p(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) < \varepsilon.$$

Теорема (С. Я. Хавинсон). Для того чтобы система $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ была $o(p)$ полна в X необходимо и достаточно, чтобы для любого линейного функционала $l \in X^*$ из неравенства

$$p^*(l(\varphi_1), l(\varphi_2), \cdots, l(\varphi_n)) \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \cdots$$

следовало бы, что $l = 0$.

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такова, что* $|z_{2k}| < 1$, $|z_{2k+1}| > 1$, $k = 1, \cdots$. *Предположим, что* $\{z_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\left\{\frac{1}{z_{2k+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям теоремы 1. Далее пусть* c_k — *положительные числа, такие, что* $c_k \to \infty$. *Тогда для любой функции*

$f(e^{i\vartheta}) \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, и любого числа $\varepsilon > 0$ существует последовательность $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такая, что

$$\int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\vartheta}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z_k - e^{i\vartheta}} \right|^p d\vartheta < \varepsilon$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \exp\left\{ - \frac{c_k}{|1 - |z_k||^\alpha} \right\} < \varepsilon.$$

Доказательство. В пространстве L_p, $1 \leqslant p < \infty$, рассмотрим систему $\left\{ \frac{1}{z_k - e^{i\vartheta}} \right\}_{k=1}^{\infty}$. В E^n введем норму

$$p(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \exp\left\{ - \frac{c_k}{|1 - |z_k||^\alpha} \right\}.$$

Заметим, что

$$p^*(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(|\lambda_k| \exp\left\{ \frac{c_k}{|1 - |z_k||^\alpha} \right\} \right).$$

Пусть $l \in L_p^*$. Тогда существует функция $g \in L_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, такая, что

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\vartheta}) \overline{g(e^{i\vartheta})}\, d\vartheta = l(f), \quad f \in L_p.$$

Пусть

$$1 \geqslant p^*\left(l\left(\frac{1}{z_1 - e^{i\vartheta}}\right), \ldots, l\left(\frac{1}{z_n - e^{i\vartheta}}\right) \right) =$$

$$= \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| l\left(\frac{1}{z_k - e^{i\vartheta}}\right) \right| \exp\left\{ \frac{c_k}{|1 - |z_k||^\alpha} \right\}.$$

Обозначая

$$F(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\overline{g(e^{i\vartheta})}}{z - e^{i\vartheta}}\, d\vartheta,$$

получим

$$|F(z_k)| \leqslant \exp\left\{ - \frac{c_k}{|1 - |z_k||^\alpha} \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{22}$$

Функция $F(z)$ аналитическая на D и принадлежит H_q. Из факторизационной теоремы Неванлинны следует, что функцию $F(z)$ можно представить в виде

$$F(z) = \frac{F_1(z)}{F_2(z)},$$

где $F_1(z)$ и $F_2(z)$ –аналитические функции и $|F_1(z)| \leqslant 1$, $|F_2(z)| \leqslant 1$. Из неравенства (22) следует, что

$$(1-|z_{2k}|)^{\alpha} \ln |F_1(z_{2k})| \leqslant (1-|z_{2k}|)^{\alpha} \ln |F(z_{2k})| \leqslant -\frac{c_k}{(1-|z_{2k}|)^{\alpha}}.$$

Поэтому в силу теоремы 1 имеем $F(z) \equiv 0$ при $|z| < 1$. Аналогично доказывается, что $F(z) \equiv 0$ при $|z| > 1$. Следовательно, функция $g(e^{i\vartheta})$, которая порождает функционал l, равна нулю почти всюду. Поэтому $l \equiv 0$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 4. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такова, что* $|z_{2k}| < 1$, $|z_{2k+1}| > 1$, $k = 1, \cdots$ *и подпоследовательности* $\{z_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\left\{\frac{1}{z_{2k+1}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям теоремы 2, а* c_k *—положительные числа и* $c_k \to \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_p$, $1 \leqslant p < \infty$, *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует последовательность* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, *такая, что*

$$\int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\vartheta}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z_k - e^{i\vartheta}} \right|^p d\vartheta < \varepsilon$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{c_k} < \varepsilon.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 1.IX.1976

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Միակության թեորեմ սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների համար և նրա կիրառությունը մոտարկումների տեսության մեջ (*ամփոփում*)

Հոդվածում ապացուցվում են միակության նոր թեորեմներ սահմանափակ անալիտիկ ֆունկցիաների համար և բերվում են այդ թեորեմների որոշ կիրառություններ մոտարկումների տեսության մեջ։

A. A. VAGARSHAKIAN. *A uniqueness theorem for bounded analytic functions and its application in the theory of approximation* (summary)

In this paper new theorems of uniquens for bounded analytic functions are proved. An application in the theory of approximation is indicated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Я. Хавинсон.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН, XVIII, 2 (110), 1963.
2. *И. В. Ушакова.* Теория единственности для функций, голоморфных и ограниченных в единичном круге, ДАН СССР, 130, № 1, 1960.
3. *И. В. Ушакова.* Некоторые теоремы единственности для функций, мероморфных в еди-

ничном круге. Тезисы докл. V Всесоюзной конференции по теории функции. Ереван, 1960.

4. *И. В. Ушакова.* Некоторые теоремы единственности для функций, субгармонических и мероморфных в единичном круге, ДАН СССР, 137, № 6, 1961.
5. *Ky Fan* and *Ph. Davis.* Complete sequences and approximation in normed linear spaces, Duke Math. journ., 24, № 2, 1957.
6. *С. Я. Хавинсон.* Некоторые вопросы полноты систем, ДАН СССР, 137, № 4, 1961.
7. *А. А. Вагаршакян.* Граничные свойства некоторых классов гармонических функций, Известия АН Арм. ССР, сер. «Математика», X, № 1, 1975.
8. *С. Я. Хавинсон.* О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов, Известия АН Арм. ССР, сер. «Математика», VI, №№ 2—3, 1971.
9. *Л. Карлесон.* Избранные проблемы теории исключительных множеств, Изд. «Мир», М., 1971.