ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

Б. Т. БАТИКЯН

ПОДАЛГЕБРЫ КОРАЗМЕРНОСТИ 1 (НЕКОММУТАТИВНЫЙ СЛУЧАЙ)

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей e над алгебраически замкнутым полем K, и пусть B — такая подалгебра алгебры A, что $e \in B$ и $\dim_K A/B = 1$. В этой работе мы опишем все подобные подалгебры.

Аналогичное описание для случая коммутативной банаховой алгебры (над полем C комплексных чисел) было получено впервые З. Савоном и А. Варжехой в работе [1]. Результат состоит в следующем. Если B образует подалгебру коразмерности 1 в коммутативной банаховой алгебре A, то линейный функционал ψ, ядром которого служит B, либо имеет вид $\psi = c(\theta - \varphi)$, где c — константа, а θ и φ — суть гомоморфизмы алгебры A в поле C, либо ψ есть точечное дифференцирование, т. е. существует такой комплексный гомоморфизм θ алгебры A, что $\psi(a_1 a_2) = \psi(a_1)\theta(a_2) + \psi(a_2)\theta(a_1)$ для любых a_1, $a_2 \in A$.

В дальнейшем Е. А. Гориным [2] было показано, что результат Савона и Варжехи является по существу алгебраическим и сохраняется, например, для любых коммутативных алгебр с единицей над алгебраически замкнутым полем. В работе [3] А. Вилански рассмотрел случай некоммутативных алгебр. Здесь, в частности, сформулированы условия, при выполнении которых приведенное выше описание подалгебр коразмерности 1 остается справедливым и в некоммутативном случае.

Мы покажем, что каждой подалгебре $B \subset A$ коразмерности 1 можно сопоставить некоторое специальное представление алгебры A в алгебру $M(2, K)$ всех матриц второго порядка над полем K. Явный вид функционала ψ, для которого $B = \ker \psi$, будет зависеть от степени приводимости этого представления.

Положим $I = \{b \in B : ab \in B$ для любого $a \in A\}$. Очевидно, I образует двусторонний идеал в алгебре B и левый идеал в алгебре A. Заметим, что $\dim B/I = 1$. Действительно, если $b \overline{\in} I$, то найдется такое $a \in A$, что $ab \overline{\in} B$, т. е. $ab = b_1 + \lambda a$, $\lambda \in K$. Но тогда $b - \lambda e \in I$, другими словами $B = I \oplus K$.

Обозначим через τ естественный эпиморфизм алгебры A на двумерное пространство A/I. Каждому элементу $a \in A$ поставим в соответствие линейный оператор T_a, действующий на пространстве A/I по следующему правилу: $T_a \tau(a') = \tau(aa')$, $a' \in A$. Отображение $\pi: a \to T_a$ и осуществляет требуемое двумерное представление алгебры A. При этом образ $\pi(A)$ алгебры A содержит нетривиальную подалгебру коразмерности 1, а именно $\pi(B)$, и если ψ' — такой линейный функционал на $\pi(A)$, что $\ker\psi' = \pi(B)$, то $\psi'(\pi(a)) = \psi(a)$ с точностью до нормировки.

Рассмотрим теперь следующие возможности:

1) представление π неприводимо. Тогда по теореме Бернсайда (см. [4], стр. 495) $\pi(A) = M(2, K)$, и, следовательно, $\pi(B)$ совпадает либо с алгеброй M_1 всех нижних треугольных матриц, либо с алгеброй всех верхних треугольных матриц. Пусть для определенности $\pi(B) = M_1$. Если

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

то $\psi(a) = \beta$. Положим $\alpha = \theta(a)$ и $\delta = \varphi(a)$. Для любых $a_1, a_2 \in A$ имеем $\psi(a_1a_2) = \psi(a_1)\varphi(a_2) + \psi(a_2)\theta(a_1)$. При этом линейные функционалы θ и φ, как легко видеть, удовлетворяют соотношениям $\theta(a_1a_2) = \theta(a_1)\theta(a_2) + \theta(a_1a_0')\theta(a_0a_2)$ и $\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2) + \varphi(a_1a_0)\varphi(a_0'a_2)$, где a_0 и a_0' — соответственно, прообразы матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

2) представление π приводимо, но не вполне приводимо. Мы можем предположить, что $\pi(A) \subset M_1$. Тогда

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

и поэтому отображения $\theta: a \to \alpha$ и $\varphi: a \to \delta$ являются гомоморфизмами алгебры A в поле K.

Пусть сперва $\pi(A) = M_1$. Как уже отмечалось, алгебра $\pi(B)$ содержит единичную матрицу и образует подалгебру коразмерности 1 в $\pi(A)$. Отсюда следует, что $\pi(B)$ либо есть алгебра M_2, состоящая из матриц вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

либо алгебра $M_2^{(k)}$, содержащая все такие матрицы

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

что $\gamma = k(\alpha - \delta)$, $k \in K$.

Если $\pi(B) = M_2$, то $\ker\psi = \ker(\theta - \varphi)$, т. е. найдется такое $\lambda \in K$, что $\psi = \lambda(\theta - \varphi)$.

Допустим, что $\pi(B) = M_2^{(k)}$. Внутренний автоморфизм алгебры M_1, порожденный матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & -1 \end{pmatrix},$$

переводит $M_2^{(k)}$ в алгебру M_3 всех диагональных матриц. Следовательно, можно предположить, что $\pi(B) = M_3$. В этом случае функционал ψ является (θ, φ)-дифференцированием, т. е.

$$\psi(a_1 a_2) = \psi(a_1)\theta(a_2) + \psi(a_2)\varphi(a_1).$$

Пусть теперь $\pi(A) \neq M_1$. Тогда, поскольку алгебра $M_2^{(k)}$ вполне приводима, $\pi(A)$ может совпадать только с алгеброй M_2, а $\pi(B)$ — с алгеброй M_4, состоящей из матриц, кратных единичной. В этом случае $\theta = \varphi$, и ψ является точечным дифференцированием, соответствующим гомоморфизму θ;

3) представление π вполне приводимо. Тогда

$$\pi(A) = M_3, \quad \pi(B) = M_4 \quad \text{и} \quad \psi = \lambda(\theta - \varphi).$$

Подведем итоги.

Теорема. *Пусть* $\dim A/B = 1$, ψ — *K-линейный функционал на A, для которого $B = \ker\psi$, и π — описанное выше представление. Тогда*

1) если представление π неприводимо, то найдутся такие K-линейные функционалы θ и φ, что для любых $a_1, a_2 \in A$ будем иметь $\psi(a_1 a_2) = \psi(a_1)\varphi(a_2) + \psi(a_2)\theta(a_1)$.

При этом в A существуют такие фиксированные ненулевые элементы a_0 и a_0', что

$$\theta(a_1 a_2) = \theta(a_1)\theta(a_2) + \theta(a_1 a_0')\theta(a_0 a_2)$$

и

$$\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2) + \varphi(a_1 a_0)\varphi(a_0' a_2).$$

2) если представление π приводимо, но не вполне приводимо, то либо $\psi = \lambda(\theta - \varphi)$, где θ и φ — гомоморфизмы, либо ψ есть (θ, φ)-дифференцирование, либо ψ-точечное дифференцирование;

3) если представление π вполне приводимо, то $\psi = \lambda(\theta - \varphi)$, где θ и φ — гомоморфизмы.

Из полученных результатов легко следует описание подалгебр коразмерности 1 для коммутативного случая. Действительно, из всех перечисленных подалгебр алгебры $M(2, K)$ коммутативными являются подалгебры M_2, M_3 и M_4. Поэтому, если алгебра A коммутативна, то $\pi(B) = M_4$, а $\pi(A)$ совпадает либо с M_2 (тогда ψ есть точечное дифференцирование), либо с M_3 ($\psi = \lambda(\theta - \varphi)$) (ср. [2]).

Следующие замечания относятся к тому случаю, когда B образует подалгебру конечной (не обязательно равной 1) коразмерности в алгебре A.

Замечание. Пусть $\dim A/B = n$. Вновь рассмотрим идеал $I = \{b \in B : ab \in B$ для всех $a \in A\}$. Если обозначить через σ естественный эпиморфизм A на A/B, то каждому $b \in B$ можно сопоставить линейный оператор R_b на пространстве A/B: $R_b\sigma(a) = \sigma(ab)$. Фактор-пространство B/I изоморфно пространству операторов $\{R_b\}$, поскольку $R_b = 0$ тогда и только тогда, когда $b \in I$. Следовательно, $l = \dim B/I \leqslant n^2$, и $\dim A/I = l + n$. Точно также, как и выше, устанавливается, что подалгебре B отвечает представление A в алгебру $M(l+n, K)$.

В коммутативном случае совокупность операторов $\{R_b\}$ образует алгебру. Известно, что размерность любой коммутативной подалгебры $M(n, K)$ не превосходит числа

$$r(n) = \begin{cases} m^2 + 1, & \text{если } n = 2m, \\ m(m-1), & \text{если } n = 2m-1 \end{cases}$$

(см. [5]).

Следовательно, $l = \dim B/I \leqslant r(n)$. Это означает, что в коммутативном случае подалгебре коразмерности n отвечает представление, размерность которого не превосходит $r(n) + n$.

Замечание. В работе [2] доказано следующее утверждение усть A — коммутативная алгебра над алгебраически замкнутым полем K, B — подалгебра в A и $\dim A/B = n$. Тогда существует неуплотняемая цепочка подалгебр

$$B = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_n = A$$

длины n, причем $\dim A_{i+1}/A_i = 1$, $i = 0, 1, \cdots, n-1$.

В случае некоммутативной алгебры подобной цепочки может не существовать. Например, в алгебре $M(4, K)$ имеется подалгебра коразмерности 3, но не существует подалгебр коразмерности 2 или коразмерности 1.

Автор благодарит Е. А. Горина за постановку задачи и ценные советы.

Институт математики
АН Армянской ССР
Поступила 1.V.1976

Բ. Թ. ԲԱՏԻԿՅԱՆ. 1 կոչափողականություն ունեցող ենթահանրահաշիվների մասին (ոչ տեղափոխական դեպք) *(ամփոփում)*

Նկարագրվում են միավորով օժտված զուգորդական հանրահաշվի բոլոր 1 կոչափողականություն ունեցող ենթահանրահաշիվները։

B. T. BATIKIAN. *Subalgebras of condimension 1 (nocommutative case)* (summary)

All subalgebras of codimension 1 of associative algebras with identity are described.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Z. Sawon, A. Warsecha.* On the general form of subalgebras of codimension 1 of B-algebras with 1, Studia Math., 29, 1968, 249—260.
2. *Е. А. Горин.* Подалгебры конечной коразмерности, Мат. заметки, 6, № 3, 1969, 321—328.
3. *A. Wilansky.* Subspaces, subalgebras and ideals of codimension one in complex algebras, J. Lond. Math. Soc. (2), 9, 1974, 87—92.
4. *С. Ленг.* Алгебра, Изд. „Мир", М., 1968.
5. *N. Jacobson.* Schur's theorems on commutative matrices, Bull. Amer. Math. Soc. 50, 1944, 431—436.