ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 5, 1977 Математика

С. Г. САМКО

К ОПИСАНИЮ ОБРАЗА $I^{\alpha}(L_p)$ ПОТЕНЦИАЛОВ РИССА

Пусть

$$(I^{\alpha}\varphi)(x)=\frac{1}{\gamma_n(\alpha)}\int\limits_{R^n}\frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{n-\alpha}},\ 0<\alpha<n,$$

$$\gamma_n(\alpha)=\pi^{\frac{n}{2}}\,2^{\alpha}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}\tag{1}$$

есть риссов потенциал с плотностью $\varphi\in L_p(R^n)$, $1<p<\frac{n}{\alpha}$.

В [1]—[2] было дано описание образа $I^{\alpha}(L_p)=\{f\colon f=I^{\alpha}\varphi,\ \varphi\in L_p\}$ в одномерном ($n=1$) случае (см. также [3], где это описание распространено на пространства Орлича). Целью настоящей заметки является усиление достаточной части этого описания с одновременным обобщением на многомерный ($n\geqslant 1$) случай. Пусть

$$(D^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{d_{n,l}(\alpha)}\int\limits_{R^n}\frac{(\Delta_t^l f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\,dt\tag{2}$$

есть оператор риссова дифференцирования (см. [4]), где $(\Delta_t^l f)(x)$ есть конечная разность функции $f(x)$ порядка $l>\alpha$* с векторным шагом $t\in R^n$, нормировочная постоянная $d_{n,l}(\alpha)$ выбрана так, что в образах Фурье $\widehat{D^{\alpha}f}(x)=|x|^{\alpha}\hat{f}(x)$ и интеграл в (2) понимается как условно сходящийся в $L_p(R^n)$: $D^{\alpha}f=\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\(L_p)}}D_{\varepsilon}^{\alpha}f$, где $D_{\varepsilon}^{\alpha}f$ — соответствующий усеченный интеграл:

$$(D_{\varepsilon}^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{d_{n,l}(\alpha)}\int\limits_{|t|>\varepsilon}\frac{(\Delta_t^l f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\,dt.$$

---

* Если в (2) используется нецентрированная разность $(\Delta_t^l f)(x)=\sum\limits_{k=0}^{l}(-1)^k C_l^k\times$ $\times f(x-kt)$, то условие $l>\alpha$ можно ослабить до $l>2\left[\frac{\alpha}{2}\right]$ с обязательным выбором $l=\alpha$ при $\alpha=1, 3, 5,\cdots$.

Покажем, что в описании $I^\alpha(L_p) = \{f\colon f \in L_q,\ D^\alpha f \in L_p\}$, $q = \dfrac{np}{n - \alpha p}$ в достаточной части можно вместо сходимости усеченной „производной“ $D^\alpha_\varepsilon f$ требовать лишь ограниченности $D^\alpha_\varepsilon f$ в L_p для какой-нибудь последовательности $\varepsilon_k \to 0$, $k = 1, 2, \cdots$.

Теорема. *Для того чтобы $f(x) \in I^\alpha(L_p)$, $1 < p < \dfrac{n}{\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in L_q(R^n)$, $q = np\,(n - \alpha p)^{-1}$, и чтобы существовала последовательность $\varepsilon_k \to 0$, $k = 1, 2, \cdots$, такая, что $\|D^\alpha_{\varepsilon_k} f\|_p \leqslant c$, где c не зависит от ε_k.*

Доказательство. Необходимость. Условие $f \in L_q$ следует из теоремы С. Л. Соболева [5]. Далее для $f = I^\alpha \varphi$, $\varphi \in L_p$, справедливо представление

$$(D^\alpha_\varepsilon f)(x) = \int\limits_{R^n} K_{l,\alpha}(|y|)\, \varphi(x - \varepsilon y)\, dy, \tag{3}$$

где

$$K_{l,\alpha}(|y|) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)\,|y|^n} \int\limits_{|\xi| < |y|} k_{l,\alpha}(\xi)\, d\xi \in L_1(R^n),$$

$$k_{l,\alpha}(x) = (\Delta^l_{\vec{j}}\, k_\alpha)(x),\quad k_\alpha(x) = \gamma_n^{-1}(\alpha)\,|x|^{-\alpha},\quad \vec{j} = (1, 0, \cdots, 0),$$

которое получается перестановкой порядка интегрирования в композиции $D^\alpha_\varepsilon I^\alpha \varphi$ и заменами переменных. Так как

$$\int\limits_{R^n} K_{l,\alpha}(|y|)\, dy = 1 \tag{4}$$

следствие выбора нормировочных постоянных), то из (3) следует, что $D^\alpha_\varepsilon f \underset{\varepsilon \to 0}{\overset{L_p}{\to}} \varphi$. Тем самым в необходимой части доказано больше, чем ограниченность $\|D^\alpha_\varepsilon f\|_p$. Основную трудность составит доказательство достаточности.

Итак, пусть $f \in L_q$ и

$$\|D^\alpha_{\varepsilon_k} f\|_p \leqslant c < \infty,\quad \varepsilon_k \to 0, \tag{5}$$

где c не зависит от ε_k. Пусть $\Delta_{m,\alpha}(x, h) = (\Delta^m_h k_\alpha)(x)$, $m > \alpha$. Можно показать, что $\Delta_{m,\alpha}(x, h) \in L_1(R^n)$ для любого $h \in R^n$ при $m > \alpha$. Считая, что $m > \alpha$, обозначим

$$A\varphi = \int\limits_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x - t, h)\, \varphi(t)\, dt,\quad \varphi_\varepsilon = D^\alpha_\varepsilon f.$$

Имеем

$$A\varphi_\varepsilon = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)}\left\{\int\limits_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x-t,\,h)\,f(t)\,dt \int\limits_{|t-y|>\varepsilon} \frac{dy}{|t-y|^{n+\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{l}(-1)^\nu C_e^\nu \nu^\alpha \int\limits_{R^n} \Delta_{m,\alpha}(x-t,\,h)\,dt \int\limits_{|t-y|>\nu\varepsilon} \frac{f(y)\,dy}{|t-y|^{n+\alpha}}\right\}.$$

Так как $\Delta_{m,\alpha}(x,\,h)\in L_1$, то здесь допустима перестановка порядка интегрирования, так что

$$A\varphi_\varepsilon = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)}\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^\nu C_e^\nu \int\limits_{R^n} f(y)\,dy \int\limits_{|\tau|>\varepsilon} \frac{\Delta_{m,\alpha}(x-y-\nu\tau,\,h)}{|\tau|^{n+\alpha}}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\gamma_n(\alpha)\,d_{n,l}(\alpha)}\int\limits_{R^n}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k f(x-kh-y)\,dy \sum_{\nu=0}^{l}(-1)^\nu C_l^\nu \times$$

$$\times \int\limits_{|\tau|>\varepsilon} \frac{|y-\nu\tau|^{\alpha-n}\,d\tau}{|\tau|^{n+\alpha}},$$

откуда после замены $y=\varepsilon\bar{y}$, $\tau=\varepsilon\,|y|\,\mathrm{rot}_y \dfrac{t}{|t|^2}$, где $\mathrm{rot}_y\,x$ — вращение в R^n, такое, что $\mathrm{rot}_y\,\vec{j}=y\,|y|^{-1}$, получим

$$A\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\gamma_n(\alpha)\,d_{n,l}(\alpha)}\int\limits_{R^n}\frac{(\Delta_h^m f)(x-\varepsilon y)}{|y|^n}\,dy \int\limits_{|t|<|y|}\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^\nu C_l^\nu \left||t|\,\vec{j}-\right.$$

$$\left.-\nu\frac{t}{|t|}\right|^{\alpha-n} dt,$$

что с учетом тождества $\left||t|\,\vec{j}-\nu\dfrac{t}{|t|}\right| = |t-\nu\vec{j}\,|$ приводит к равенству

$$A\varphi_\varepsilon = \int\limits_{R^n} K_{l,\alpha}(|y|)\,(\Delta_h^m f)\,(x-\varepsilon y)\,dy.$$

Правая часть сходится в $L_q(R^n)$ к $(\Delta_h^m f)\,(x)$ в силу (4). Тогда

$$(\Delta_h^m f)(x) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ (L_q)}} A\varphi_\varepsilon$$

и тем более

$$(\Delta_h^m f)(x) = w\text{-}\lim_{\substack{\varepsilon_k\to 0\\ (L_q)}} A\varphi_{\varepsilon_k}, \tag{6}$$

где $w\text{-}\lim\limits_{(L_q)}$ означает слабый предел в $L_q(R^n)$. Покажем, что φ_{ε_k} слабо сходится в $L_p(R^n)$. В силу (5) достаточно (теорема Банаха-Штейнгауза) проверить слабую сходимость φ_{ε_k} в L_p на функционалах $g \in L_{p'}$, образующих плотное множество в $L_{p'}$, например, для финитных $g \in C_0^\infty$. Для таких функций имеем $(0 < \varepsilon_r < \varepsilon_k < 1)$:

$$|(g, \varphi_{\varepsilon_r} - \varphi_{\varepsilon_k})| = |((D^\alpha_{\varepsilon_r} - D^\alpha_{\varepsilon_k})\, g, f)| \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_q \cdot \|(D^\alpha_{\varepsilon_r} - D^\alpha_{\varepsilon_k}) g\|_{q'} \leqslant c\, \|f\|_q \cdot \Big\| \int\limits_{\varepsilon_r < |t| < \varepsilon_k} |(\Delta_t^l g)(x)| \cdot |t|^{-n-\alpha}\, dt \Big\|_{q'} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \|f\|_q \cdot \Big\{ \int\limits_{|x| < l + \sup\limits_{\xi \in \operatorname{supp} g} |\xi|} dx \Big(\int\limits_{\varepsilon_r < |t| < \varepsilon_k} |t|^{-n-\alpha+l}\, dt \Big)^{q'} \Big\}^{\frac{1}{q'}} \to 0$$

при $\varepsilon_k \to 0$, что доказывает фундаментальность последовательности $(g, \varphi_{\varepsilon_k})$ и, следовательно, слабую сходимость φ_{ε_k} в L_p. Так как оператор A ограничен согласно теореме Соболева из L_p в L_q, то из (6) имеем

$$(\Delta_h^m f)(x) \equiv A\, \varphi, \quad \varphi = w\text{-}\lim_{(L_p)} \varphi_{\varepsilon_k} \in L_p. \tag{7}$$

Очевидно, $(A\,\varphi)(x) \equiv (\Delta_h^m I^\alpha \varphi)(x)$. Поэтому (7) означает тождественное совпадение конечных разностей функций $f(x)$ и $I^\alpha \varphi$: $\Delta_h^m f \equiv \Delta_h^m I^\alpha \varphi$. Тогда f и $I^\alpha \varphi$ могут отличаться друг от друга разве лишь многочленом, а так как $f \in L_q$, $I^\alpha \varphi \in L_q$, то они совпадают:

$$f = I^\alpha \varphi, \tag{8}$$

что и требовалось (при этом из (8) следует согласно необходимой части, что φ является не только слабым, но и сильным пределом в L_p усечений $\varphi_\varepsilon = D^\alpha_\varepsilon f$). Теорема доказана.

Заметим, что в одномерном ($n = 1$) случае близкое утверждение содержится в [6]. Заметим также, что в одномерном случае для потенциала „феллеровского типа"

$$M^\alpha \varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \operatorname{sign}(x - t)}{|x - t|^{1-\alpha}}\, \varphi(t)\, dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, образ $M^\alpha(L_p)$, $1 < p < \frac{1}{\alpha}$, не зависит от c_1, c_2 и совпадает [2] с образом $I^\alpha(L_p)$ операторов лиувиллева дробного интегрирования I^α (или потенциала Рисса). Поэтому

$$M^\alpha(L_p) \Big\{ f : f \in L_q, \ \Big\| \int\limits_{\varepsilon_k}^{\infty} \frac{f(x) - f(x - t)}{t^{1+\alpha}}\, dt \Big\|_p \leqslant c < \infty \Big\},$$

где $q = \dfrac{p}{1 - \alpha p}$ и c не зависит от $\varepsilon_k \to 0$.

Ростовский на-Дону
государственный университет

Поступила 25.IV.1975

Ս. Գ. ՍԱՄԿՈ. Ռիսի պոտենցիալների $I^\alpha(L_p)$ պատկերների նկարագրության վերաբերյալ *(ամփոփում)*

Հոդվածում տրվում է $I^\alpha_\varphi = \int\limits_{R^n} \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{n-\alpha}}$ *Ռիսի պոտենցիալների* $I^\alpha(L_p)$-*ի արժեքների բազմության նկարագրությունը հիպերսինգուլյար ինտեգրալների տերմիններով՝* $f \in I^\alpha(L_p)$ *այն և միայն այն դեպքում, երբ*

$$f \in L_q(R^n), \qquad q = \frac{np}{n-\alpha p} \text{ և } \|D^\alpha_\varepsilon f\|_p \leqslant c,$$

որտեղ c-ն կախված չէ ε-ից,

$$D^\alpha_\varepsilon f = \int\limits_{|t|>\varepsilon} \frac{(\Delta^l_t f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\, dt,$$

$(\Delta^l_t f)(x) - f(x)$ *ֆունկցիայի կենտրոնավորված կամ ոչ կենտրոնավորված տարբերություն է.*

Ավելի վաղ նման նկարագրություն տրված է եղել հեղինակի կողմից $L_p(R^n)$-*ում* $D^\alpha_\varepsilon f$-*ի զուգամիտության տերմիններով։*

S. G. SAMKO. *On the characterization of the range* $I_\alpha(L_p)$ *of fractional integrals (Riesz potentials)* (summary)

The characterization of the range $I^\alpha(L_p)$, $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, of Riesz potentials $I^\alpha\varphi = \int\limits_{R^n} \frac{\varphi(t)\,dt}{|x-t|^{n-\alpha}}$ in terms of hepersingular integrals (Riesz differentiation) is proposed:

$$f \in I^\alpha(L_p) \quad \text{iff} \quad f \in L_q(R^n), \qquad q = \frac{np}{n-\alpha p},$$

and

$$\|D^\alpha_\varepsilon f\|_p \leqslant c,$$

where c does not depend on ε,

$$D^\alpha_\varepsilon f = \int\limits_{|t|>\varepsilon} \frac{(\Delta^l_t f)(x)}{|t|^{n+\alpha}}\, dt, \quad (\Delta^l_t f)(x)$$

being a finite difference of $f(x)$. Earlier the analogous description was given by the author in terms of the convergence of $D^\alpha_\varepsilon f$ in $L_p(R^n)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Г. Самко.* Об операторах типа потенциала, ДАН СССР, 1971, 196, № 2, 299—301.
2. *С. Г. Самко.* О пространстве $I^\alpha(L_p)$ дробных интегралов и об операторах типа потенциала, Изв. АН Арм. ССР, сер. „Математика", VIII, № 5, 1973, 359—383.

3. *С. Г. Самко, А. Ф. Чувенков.* О потенциалах Рисса в пространствах Орлича, В сб. „Матем. анализ и его приложения“, 7, Изд-во РГУ, 1975.

4. *П. И. Лизоркин.* Описание пространств $L_p^r(R^n)$ в терминах разностных сингулярных интегралов, Матем. сб., 81, № 1, 1970, 79—91.

5. *С. Л. Соболев.* Об одной теореме функционального анализа, Матем. сб., 4, № 3, 1938, 471—497.

6. *P. Heywood.* On the range of some fractional integrals, J. London Math. Soc. (2), 8, 1974, 607—614.