ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 4, 1977 Математика

Г. А. МАРТИРОСЯН

ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

Введение

В области $D^+ = \{|z| > 1\}$ рассмотрим эллиптическую систему

$$A_0 u_{xx} + A_1 u_{xy} + A_2 u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где A_0, A_1, A_2 — постоянные, вообще говоря комплексные, квадратные матрицы порядка n; $u(z) = (u_1(z), \cdots, u_n(z))$ — искомая комплексная вектор-функция.

Обозначим через $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ корни характеристического уравнения

$$\det(A_0 + \lambda A_1 + \lambda A_2) = 0,$$

а через $k_1, \cdots, k_m$ — соответствующие кратности, причем

$$\operatorname{Im} \lambda_j > 0 \text{ при } j = 1, \cdots, \nu,$$

$$\operatorname{Im} \lambda_j < 0 \text{ при } j = \nu + 1, \cdots, m.$$

Предположим, что система (1) правильно эллиптическая, т. е.

$$k_1 + \cdots + k_\nu = k_{\nu+1} + \cdots + k_m = n. \tag{2}$$

Будем говорить, что функция $\varphi(z)$, заданная в области $|z| \geqslant 1$ принадлежит классу $H^*(t_1, \cdots, t_e)$($t_1, \cdots, t_e$ — некоторые фиксированные точки на окружности $\Gamma = \{|z| = 1\}$), если $\varphi(z)$ ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки и представляется в виде

$$\varphi(z) = \frac{\varphi^*(z)}{(z - t_1)^\alpha \cdots (z - t_e)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3}$$

где $\varphi^*(z)$ удовлетворяет условию H (Гельдера) (см. [1], стр. 18) в любом кольце $1 \leqslant |z| \leqslant R$.

Далее скажем, что функция $\varphi(z)$, заданная в области $|z| \geqslant 1$, принадлежит классу $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$, если $\varphi(z)$ ограничена в окрестности бесконечно удаленной точки, а частные производные первого порядка $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ принадлежат классу $H^*(t_1, \cdots, t_e)$.

В настоящей работе рассматривается следующая граничная задача: найти в области D^+ дважды непрерывно дифференцируемое решение системы (1), принадлежащее классу $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$ и удовлетворяющее граничному условию

$$\alpha(t)\, u_x(t) + \beta(t)\, u_y(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{4}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$ — квадратные комплексные матрицы порядка n, заданные на Γ и удовлетворяющие условию Липшица на каждой замкнутой дуге $t_k t_{k+1}$ ($k = 1, \cdots, e$; $t_{e+1} = t_1$), а в точках t_k могут иметь разрывы первого рода; $f(t)$ — заданная вектор-функция на Γ, принадлежащая классу H_ε (см. [1], стр. 32 или [2], стр. 92), т. е. $f(t)(t - t_1)^\varepsilon \cdots (t - t_e)^\varepsilon$ удовлетворяет условию H на Γ для любого положительного числа ε.

В ходе решения задачи (1), (4) будем ставить некоторые условия на $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и докажем, что при выполнении этих условий задача (1), (4) нетерова, т. е. однородная задача ($f(t) \equiv 0$), имеет конечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача (1), (4) разрешима тогда и только тогда, когда выполняется конечное число условий ортогональности на $f(t)$.

В § 1 доказываются две леммы и приводится общее решение системы (1) в классе $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$. В работе Н. Е. Товмасяна (см. [3], стр. 5) и в монографии А. В. Бицадзе (см. [4], стр. 111) приведены общие представления решений системы (1). Для нашей цели нам нужно построить общее решение системы (1) в классе $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$ и в специальном виде. Затем в § 2 граничная задача (1), (4) приводится к задаче Гильберта с разрывными коэффициентами (см. [2], стр. 95—127). В § 3 дается эффективное решение граничной задачи (1), (4) в случае, когда $\alpha(t)$, $\beta(t)$ кусочно-постоянные комплексные матрицы с двумя точками разрыва.

§ 1. Общее решение системы (1) в классе $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$

Для построения общего решения системы (1) в классе $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$ докажем следующие две леммы.

Лемма 1. *Если $\varphi(z)$ — аналитическая функция класса $H^*(t_1, \cdots, t_e)$ в области $|z| \leqslant 1$*, то*

$$\lim_{z \to t_0} (1 - |z|)^r \varphi^{(r)}(z) = 0; \quad t_0 \in \Gamma, \quad t_0 \neq t_k \ (k = 1, \cdots, e), \tag{5}$$

где $r = 1, 2, \cdots$.

Лемма 2. *Если $\varphi(z)$ — аналитическая функция класса $H^*(t_1, \cdots, t_e)$ в области $|z| < 1$, то функция $(1 - |z|)^r \varphi^{(r)}(z)$ также принадлежит классу $H^*(t_1, \cdots, t_e)$.*

Эти леммы дают возможность построить общее решение системы (1) в классе $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$, так чтобы произвольные функции, входящие в общее решение, принадлежали классу $H^*(t_1, \cdots, t_e)$, а граничные значения $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ на Γ имели простой вид.

---

* Класс функций $H^*(t_1, \cdots, t_e)$ в области $|z| < 1$ определяется аналогично.

Перейдем к доказательству лемм 1 и 2.

1°. Доказательство леммы 1. Пусть $\varphi(z)$ — аналитическая функция класса $H^*(t_1, \cdots, t_e)$. Если $t_0 \neq t_k$ $(k=1, \cdots, e)$, то в достаточно малой окрестности этой точки $\varphi(z)$ принадлежит классу H.

По интегральной формуле Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \quad |z|<1, \tag{6}$$

где γ — окружность радиуса $(1-|z|)$ и с центром z. Отсюда имеем

$$\varphi^{(r)}(z) = \frac{r!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi(t)-\varphi(z)}{(t-z)^{r+1}}\,dt.$$

Поэтому, так как $\varphi(z) \in H$ и $|t-z| = 1-|z|$ при $t \in \gamma$, будем иметь следующую оценку:

$$|(1-|z|)^r\,\varphi^{(r)}(z)| \leqslant C\,(1-|z|)^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1. \tag{7}$$

Отсюда вытекает равенство (5).

2°. Доказательство леммы 2. Вначале покажем, что если $\varphi(z)$ — аналитическая функция класса H в области $\{|z|\leqslant 1\}$, то $(1-|z|)^r \times \varphi^{(r)}(z) \in H$.

Пусть z_1, z_2 — произвольные точки круга $\{|z|<1\}$ $(r_1=|z_1|<1$, $r_2=|z_2|<1)$. Для определенности предположим, что $r_1>r_2$.

Возможны два случая:

1) $1-r_1 \leqslant 2\,|z_1-z_2|$,

отсюда

$$1-r_2 \leqslant |z_1-z_2| + (1-r_1) \leqslant 3\,|z_1-z_2|.$$

Из этих неравенств, в силу (7) получим оценку

$$|\varphi^{(r)}(z_1)(1-|z_1|)^r - \varphi^{(r)}(z_2)(1-|z_2|)^r| \leqslant C\,|z_1-z_2|^{\alpha}; \tag{8}$$

2) $1-r_1 > 2\,|z_1-z_2|$. (9)

Оценим разность

$$\varphi^{(r)}(z_1)(1-|z_1|)^r - \varphi^{(r)}(z_2)\,(1-|z_2|)^r = J_1+J_2,$$

где

$$J_1 = \varphi^{(r)}(z_2)[(1-r_1)^r-(1-r_2)^r], \quad J_2 = [\varphi^{(r)}(z_1)-\varphi^{(r)}(z_2)]\,(1-r_1)^r.$$

По формуле Лагранжа имеем

$$(1-r_1)^r-(1-r_2)^r = r\,(1-r^*)^{r-1}\,(r_2-r_1),$$

где $r_2<r^*<r_1$.

Отсюда на основании (7) и (9) для J_1 будем иметь

$$|J_1| = |r\varphi^{(r)}(z_2)(1-r^*)^{r-1}(r_2-r_1)| \leqslant r\,(r_1-r_2)|\,\varphi^{(r)}(z_2)(1-r_2)^{r-1}| \leqslant$$

$$\leqslant C\frac{r_1-r_2}{1-r_2}(1-r_2)^{\alpha} = C\left(\frac{r_1-r_2}{1-r_2}\right)^{1-\alpha}(r_1-r_2)^{\alpha} < C\,|z_1-z_2|^{\alpha}.$$

Теперь оценим J_2. В силу (6) имеем

$$\varphi^{(r)}(z_j) = \frac{r!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\zeta)-\varphi(z_2)}{(\zeta-z_j)^{r+1}}\,d\zeta \quad (j=1,\ 2),$$

где γ — окружность с центром z_2 и радиусам $1-r_2$ (из (9) ясно, что z_1 лежит внутри γ).

Поэтому

$$\varphi^{(r)}(z_1)-\varphi^{(r)}(z_2) = \frac{r!}{2\pi i}\int_{\gamma}[\varphi(\zeta)-\varphi(z_2)]\times$$

$$\times\frac{(z_1-z_2)\left[\sum_{k=0}^{r}(\zeta-z_2)^{r-k}(\zeta-z_1)^{k}\right]}{[(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)]^{r+1}}\,d\zeta. \tag{10}$$

В силу неравенств (9), при $\zeta\in\gamma$ имеем

$$|\zeta-z_1| > \frac{1}{2}(1-r_2);\ |\zeta-z_1| < 2(1-r_2). \tag{11}$$

Так как $|\lambda-z_2| = 1-r_2$; $|\varphi(\zeta)-\varphi(z_2)| < C(1-r_2)^{\alpha}$, при $\zeta\in\gamma$, то из соотношений (10), (11) для J_2 получим следующую оценку:

$$|J_2| < C_0(1-r_1)^r(1-r_2)^{\alpha}|z_1-z_2|\frac{(1-r_2)^r(1-r_2)}{(1-r_2)^{2r+2}} =$$

$$= C_0\left(\frac{1-r_1}{1-r_2}\right)^r\left(\frac{|z_1-z_2|}{1-r_2}\right)^{1-\alpha}|z_1-z_2|^{\alpha} < C_1|z_1-z_2|^{\alpha}.$$

Из оценок, полученных для J_1 и J_2, вытекает оценка

$$|J_1+J_2| < C|z_1-z_2|.$$

Отсюда и из (8) имеем

$$(1-|z|)^r\varphi^{(r)}(z)\in H. \tag{12}$$

Пусть теперь $\varphi(z)\in H^*(t_1,\cdots,t_e)$. Ясно, что лемму 2 достаточно доказать для $e=1$.

Утверждение леммы 2 будет доказано, если покажем, что

$$\psi(z) \overset{\text{def}}{=} (z-t_1)^{\alpha+\varepsilon}(1-|z_2|)^r\varphi^{(r)}(z)$$

принадлежит классу H, где ε — произвольное положительное число.

В силу (3) $(e=1)$ для $\psi(z)$ получим сумму, в которой каждое слагаемое имеет вид

$$\text{const}\,(1-|z|)^{r-k}\varphi^{*(r-k)}(z)\left(\frac{1-|z|}{z-t_1}\right)^k(z-t_1)^{\varepsilon},$$

а так как $\varphi^*(z)\in H$, то согласно (12)

$$(1-|z|)^{r-k}\varphi^{*(r-k)}(z)\in H.$$

Таким образом, осталось доказать, что

$$(z-t_1)^{\varepsilon}\left(\frac{1-|z|}{z-t_1}\right)^k \in H$$

или, что то же самое

$$(z-t_1)^{\delta}\,\frac{1-|z|}{z-t_1}\in H,\ \left(\delta=\frac{\varepsilon}{k}\right),$$

которое проверяется непосредственно.

Итак, лемма 2 доказана.

Замечание 1. Утверждения лемм 1 и 2 остаются в силе, если вместо функции $\psi(z)$ взять аналитическую функцию относительно аргумента $z+\bar{\mu}\bar{z}$ или $\bar{z}+\tilde{\mu}z$, где μ, $\tilde{\mu}$ — произвольные комплексные числа ($|\tilde{\mu}|<1$, $|\mu|<1$; $|z|>1$).

3°. Теперь построим общее решение системы (1). Без ограничения общности будем предполагать, что $A_2=-E$, где E — n-мерная единичная матрица.

В обозначениях

$$\frac{\partial u_k}{\partial x}=v_k;\ \frac{\partial u_k}{\partial y}=v_{n+k},\ (k=1,\cdots,n) \tag{13}$$

система (1) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial y}=A\,\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{14}$$

где

$$v=(v_1,\cdots,v_{2n});\ A=\begin{Vmatrix}0\cdot E\\ A_0A_1\end{Vmatrix}. \tag{15}$$

Как известно, существует такая неособая матрица B, что преобразование искомого вектора $v(z)$

$$v=B\omega,\ \omega=(\omega_1,\cdots,\omega_{2n}) \tag{16}$$

приводит систему (16) к каноническому виду

$$\frac{\partial\omega_{e_j+k}}{\partial y}=\lambda_j\,\frac{\partial\omega_{e_j+k}}{\partial x}-\alpha_{j,\,k-1}\,\frac{\partial\omega_{e_j+k-1}}{\partial x}, \tag{17}$$

где $k=k_1,\cdots,k_j$; $e_1=0$; $e_l=k_1+\cdots+k_{l-1}$; $\alpha_{j0}=0$, $\alpha_{jk}=0$ или 1, при $k\geqslant 1$.

Известно, что если решение $u(z)$ системы (1) ограничено в окрестности $z=\infty$, то u_x и u_y исчезают в бесконечности, т. е. стремятся к нулю при $z\to\infty$. Поэтому, согласно обозначению (13) и преобразованию (16), решения системы (17) мы должны искать в классе функций $H^*(t_1,\cdots,t_e)$, исчезающих в бесконечности.

Общее решение уравнений системы (17), соответствующее индексу $k=1$, в области D^+, дается формулой

$$\omega_{e_j+1}(z)=\varphi_{e_j+1}(z+\mu_j\bar{z}),\ j\leqslant\nu, \tag{18}$$

где $\mu_j=\dfrac{i-\lambda_j}{i+\lambda_j}$, причем $|\mu_j|<1$, а $\varphi_{e_j+1}(z+\mu_j\bar{z})$ — произвольная аналитическая функция относительно аргумента $z+\mu_j\bar{z}$, при $|z|>1$, исчезающая в бесконечности, т. е. $\varphi_{e_j+1}(\zeta)$—аналитическая функция в области D_j, являющейся образом D^+ при отображении $\zeta=z+\mu_j\bar{z}$.

В случае $\operatorname{Im}\lambda_j<0$

$$\omega_{e_j+1}(z)=\varphi_{e_j+1}(\mu_j z+\bar{z}),\ j>\nu, \tag{19}$$

где на этот раз $\mu_j=\dfrac{i+\lambda_j}{i-\lambda_j}$ $(j>\nu)$; $|\mu_j|<1$, а $\varphi_{e_j+1}(\zeta)$ — произвольная аналитическая функция в области D_j (D_j—образ D^+ при отображении $\zeta=\mu_j z+\bar{z}$), исчезающая в бесконечности.

Пусть $\tilde{f}(z+\tilde{\mu}\bar{z})$, $\tilde{\varphi}(z+\tilde{\mu}\bar{z})$, $f(\mu z+\bar{z})$, $\varphi(\mu z+\bar{z})$ — некоторые аналитические функции своих аргументов, при $|z|>1$, где

$$\tilde{\mu}=\frac{i-\tilde{\lambda}}{i+\tilde{\lambda}}\ (\operatorname{Im}\tilde{\lambda}>0),\quad \mu=\frac{i+\lambda}{i-\lambda}\ (\operatorname{Im}\lambda<0),$$

λ, $\tilde{\lambda}$ — некоторые комплексные числа). Ясно, что $|\tilde{\mu}|<1$, $|\mu|<1$. Легко убедиться, что в области D^+ общие решения уравнений

$$\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y}-\tilde{\lambda}\frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}=(\bar{z}-\tilde{f}(z+\tilde{\mu}\bar{z}))^r\,\tilde{\varphi}(z+\tilde{\mu}\bar{z}), \tag{20}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}-\lambda\frac{\partial\omega}{\partial x}=(z-f(\mu z+\bar{z}))^r\,\varphi(\mu z+\bar{z}),\ (r=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

даются формулами

$$\tilde{\omega}(z)=\tilde{\psi}(z+\tilde{\mu}\bar{z})-\frac{1}{(r+1)(i+\tilde{\lambda})}(\bar{z}-\tilde{f}(z+\tilde{\mu}\bar{z}))^{r+1}\tilde{\varphi}(z+\tilde{\mu}\bar{z}),$$

$$\omega(z)=\psi(\mu z+\bar{z})+\frac{1}{(r+1)(i-\lambda)}(z-f(\mu z+\bar{z}))^{r+1}\varphi(\mu z+\bar{z}), \tag{21}$$

где $\tilde{\psi}(z+\tilde{\mu}\bar{z})$ и $\psi(\mu z+\bar{z})$ — произвольные аналитические функции своих аргументов при $|z|>1$.

Чтобы получить общее решение системы (17) поступаем следующим образом: подставив $\omega_{e_j+1}(z)$ ((18), (19)) в (17) (при $k=2$) и используя формулу (21) при $r=0$, получим $\omega_{e_j+2}(z)$, подставив которое в (17) (при $k=3$) и используя формулу (21) при $r=1$, получим $\omega_{e_j+3}(z)$ и т. д.

Таким образом, решение системы (17) получается в следующем виде:

$$\omega_{e_j+k}(z)=\varphi_{e_j+k}(z+\mu_j\bar{z})+\sum_{r=1}^{k-1}\gamma_{jkr}\,[(\bar{z}-f_j(z+\mu_j\bar{z}))^r\,\varphi'_{e_j+k-r}\times$$

$$\times(z+\mu_j\bar{z})]_x^{(r-1)},\ j\leqslant\nu,$$

$$\omega_{e_j+k}(z)=\varphi_{e_j+k}(\mu_j z+\bar{z})+\sum_{r=1}^{k-1}\sigma_{jkr}[(z-f_j\ (\mu_j z+\bar{z}))^r\,\varphi'_{e_j+k-r}\times$$

$$\times(\mu_j z+\bar{z})]_x^{(r-1)},\ j>\nu, \tag{22}$$

где

$$\gamma_{jkr}=\alpha_{j,\,k-1},\cdots,\alpha_{j,\,k-r}\frac{2i\,(-1)^r}{r!\,(i+\lambda_j)^{r+1}},\ j\leqslant\nu, \tag{23}$$

$$\sigma_{jkr}=\alpha_{j,\,k-1},\cdots,\alpha_{j,\,k-r}\,\frac{2i}{r!\,(i-\lambda_j)^{r+1}},\ j>\nu,$$

$\varphi_{e_j+k}(\zeta)$ — произвольные аналитические функции в области D_j, а $f_j(\zeta)$ — произвольные фиксированные аналитические функции в области D_j, исчезающие в бесконечности.

В (22) через $\varphi'(\zeta)$ обозначена производная функции $\varphi(\zeta)$ относительно своего аргумента, а символом $[f(z,\bar{z})]_x^{(r)}$—производная порядка r функции $f(z,\bar{z})$ относительно x. В правой части выражения (22), при $k=1$ суммирование происходит от 1 до 0. В этих случаях в (22) и в дальнейшем будем считать, что сумма равна нулю.

Теперь определим функции $f_j(\zeta)$, входящие в формулу (22) так, чтобы функции

$$\bar{z}-f_j(z+\mu_j\bar{z}),\ j\leqslant\nu;\ \ z-f_j\ (\mu_1 z+\bar{z}),\ j>\nu$$

стремились к нулю при $|z|\to 1$.

Рассмотрим аналитические функции

$$\zeta=\psi_j(z)\overset{\text{def}}{=}z+\frac{\mu_j}{z},\ |z|\geqslant 1,\ j\leqslant\nu,$$

$$\zeta=\psi_j(z)\overset{\text{def}}{=}\mu_j z+\frac{1}{z},\ |z|\leqslant 1,\ j>\nu.$$

Ясно, что

$$\psi_j\colon D^+\to D_j,\ j\leqslant\nu,$$

$$\psi_j\colon D^-\to D_j,\ j>\nu;\ D^-=\{|z|<1\},$$

более того, оба отображения являются взаимно однозначными, следовательно, существуют обратные отображения:

$$h_j\colon D_j \to D^+,\ j \leqslant \nu,\ h_j\colon D_j \to D^-,\ j > \nu,$$

а это означает, что

$$h_j\left(z+\frac{\mu_j}{z}\right) \equiv z,\ |z| \geqslant 1,\ j \leqslant \nu,\ h_j\left(\mu_j z+\frac{1}{z}\right) \equiv z,\ |z| \leqslant 1,\ j > \nu.$$

Теперь легко убедиться, что функции

$$f_j(z+\mu_j \bar{z}) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{h_j(z+\mu_j z)},\ j \leqslant \nu,\ |z| > 1,$$

$$f_j(\mu_j z+\bar{z}) \overset{\text{def}}{=} h_j(\mu_j z+\bar{z}),\ j > \nu,\ |z| > 1 \tag{24}$$

удовлетворяют нужным нам требованиям.

В дальнейшем в формуле (22) в качестве функций $f_j(\zeta)$ будем брать функции, определенные равенством (24).

Из определения функций $f_j(\zeta)$ следуют равенства

$$\bar{z}-f_j(z+\mu_j \bar{z}) = (|z|-1)\,\gamma_j(z, \bar{z}),\ j \leqslant \nu;\ z-f_j(\mu_j z+\bar{z}) =$$

$$= (|z|-1)\,\gamma_j(z, \bar{z}),\ j > \nu,$$

где $\gamma_j(z, \bar{z})$ ограничены в окрестности окружности Γ.

Далее, в силу лемм 1, 2 и замечания 1 не трудно убедиться, что в общем решении (22) $\omega_{e_j+k}(z)$ принадлежат классу $H^*(t_1, t_2, \cdots, t_e)$ и исчезают в бесконечности тогда и только тогда, когда $\varphi_{e_j+k}(\zeta)$ принадлежат классу $H^*(t_1, \cdots, t_e)$ и исчезают в бесконечности, причем

$$\omega_{e_j+k}(t) = \varphi_{e_j+k}(t+\mu_j \bar{t}),\ j \leqslant \nu,\ t \in \Gamma,$$

$$\omega_{e_j+k}(t) = \varphi_{e_j+k}(\mu_j t+\bar{t}),\ j > \nu,\ t \in \Gamma. \tag{25}$$

Теперь, исходя из общего решения (22) системы (17), на основании (13), (16) найдем общее решение системы (14) в классе

$$H^*(t_1, \cdots, t_e).$$

Обозначим через $b_k = (b_{1k} \cdots b_{2n,\,k})$ k-ый столбец матрицы B и введем векторы

$$\delta_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix};\quad \theta_k = \begin{pmatrix} b_{n+1,\,k} \\ \vdots \\ b_{2n,\,k} \end{pmatrix},\ k=1, \cdots, 2n. \tag{26}$$

Так как матрица A имеет вид (15), а преобразование $v=B\omega$ приводит систему (14) к системе (17), то векторы δ_k и θ_k связаны соотношениями

$$\theta_{e_{j+1}} = \lambda_j \delta_{e_{j+1}},\ \theta_{e_j+r} = \lambda_j \delta_{e_j+r} + a_{jr}\,\delta_{e_j+r+1},\ r=1, \cdots, k_j-1. \tag{27}$$

В силу (13) и (16), из (22) непосредственно получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{k_j} \delta_{e_j+k} \Big\{ \varphi_{e_j+k}(z+\mu_j \bar{z}) + \sum_{r=1}^{k-1} \gamma_{jkr} [(\bar{z}-f_j(z+\mu_j \bar{z}))^r \times$$

$$\times \varphi'_{e_j+k-r}(z+\mu_j \bar{z})]_x^{(r-1)} \Big\} + \sum_{j=\nu+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} \delta_{e_j+k} \Big\{ \varphi_{e_j+k}(\mu_j z+\bar{z}) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k-1} \sigma_{jkr} [(z-f_j(\mu_j z+\bar{z}))^r \varphi'_{e_j+k-r}(\mu_j z+\bar{z})]_x^{(r-1)} \Big\}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{k_j} \theta_{e_j+k} \Big\{ \varphi_{e_j+k}(z+\mu_j \bar{z}) + \sum_{r=1}^{k-1} \gamma_{jkr} [(\bar{z}-f_j(z+\mu_j \bar{z}))^r \times$$

$$\times \varphi'_{e_j+k-r}(z+\mu_j \bar{z})]_x^{(r-1)} \Big\} + \sum_{j=\nu+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} \theta_{e_j+k} \Big\{ \varphi_{e_j+k}(\mu_j z+\bar{z}) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k-1} \sigma_{jkr} [(z-f_j(\mu_j z+\bar{z}))^r \varphi'_{e_j+k-r}(\mu_j z+\bar{z})]_x^{(r-1)} \Big\}.$$

Далее, решая систему (28) относительно $u(z)$ в классе ограниченных и непрерывных функций, получим общее решение системы (1) в классе $H_1^*(t_1, \cdots, t_e)$.

Так как аналитические функции $\varphi_{e_j+k}(\zeta)$ исчезают в бесконечности, то

$$\varphi_{e_j+k}(\zeta) = \frac{a_{e_j+k}}{\zeta} + \psi_{e_j+k}(\zeta), \quad \zeta \in D_j, \tag{29}$$

где a_{e_j+k} — некоторые комплексные постоянные, а $\psi_{e_j+k}(\zeta)$ — аналитические функции в области D_j, удовлетворяющие условию:

$$|\psi_{e_j+k}(\zeta)| \leqslant \frac{\text{const}}{|\zeta|^2}, \quad \zeta \in D_j. \tag{30}$$

Подставим выражения $\varphi_{n_j+k}(\zeta)$ из (29) в (28) и полученное выражение разобьем на две части следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = V_{10}(z) + V_1(z); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = V_{20}(z) + V_2(z), \tag{31}$$

где

$$V_{10}(z) = \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{k=1}^{k_j} \delta_{e_j+k} \Big\{ \frac{a_{e_j+k}}{z+\mu_j \bar{z}} - \sum_{r=1}^{k-1} \gamma_{jkr} a_{e_j+k-r} \Big[\frac{\bar{z}^r}{(\mu_j \bar{z}+z)^2} \Big]_x^{(r-1)} +$$

$$+ \sum_{j=\nu+1}^{m} \sum_{k=1}^{k_j} \delta_{e_j+k} \Big\{ \frac{a_{e_j+k}}{\mu_j z+\bar{z}} - \sum_{r=1}^{k-1} \sigma_{jkr} a_{e_j+k-r} \Big[\frac{z^r}{(\mu_j z+\bar{z})^2} \Big]_x^{(r-1)} \Big\}, \tag{32}$$

$$V_{20}(z)=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{k_j}\theta_{e_j+k}\left\{\frac{a_{e_j+k}}{z+\mu_j\bar z}-\sum_{r=1}^{k-1}\gamma_{jkr}\,a_{e_j+k-r}\left[\frac{\bar z^r}{(z+\mu_j\bar z)^2}\right]_x^{(r-1)}\right\}+$$

$$+\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}\theta_{e_j+k}\left\{\frac{a_{e_j+k}}{\mu_j z+\bar z}-\sum_{r=1}^{k-1}\sigma_{jkr}\,a_{e_j+k-r}\left[\frac{z^r}{(\mu_j z+\bar z)^2}\right]_x^{(r-1)}\right\},$$

а функции $V_1(z)$ и $V_2(z)$, на основании (24) и (30), удовлетворяют неравенству (30).

Так как $V_{10}(z)$ и $V_{30}(z)$ получаются из (28) при

$$\varphi_{e_j+k}(\zeta)=\frac{a_{e_j+k}}{\zeta}\quad\text{и}\quad f_j(\zeta)=0,$$

то из вывода формул (22) и (28) следует, что $2n$-мерная вектор-функция $V_0(z)=(V_{10}(z),\ V_{20}(z))$ удовлетворяет системе (14). Следовательно

$$\frac{\partial V_{20}}{\partial x}=\frac{\partial V_{10}}{\partial y};\quad\frac{\partial V_2}{\partial x}=\frac{\partial V_1}{\partial y}.\tag{33}$$

Отсюда, так как $V_1(z)$, $V_2(z)$ удовлетворяют неравенству (30), то для системы

$$\frac{\partial\bar u_0}{\partial x}=V_1(z);\ \frac{\partial\tilde u_0}{\partial y}=V_2(z)$$

существует непрерывное ограниченное решение, которое дается формулой

$$\bar u_0(z)=\int_{\infty}^{z}V_1(z)\,dx+V_2(z)\,ay.\tag{34}$$

Следовательно, система (31) в классе ограниченных и непрерывных функций будет иметь решение тогда и только тогда, когда в классе ограниченных и непрерывных функций имеет решение следующая система:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=V_{10}(z),\tag{35}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y}=V_{20}(z).$$

Легко проверить, что общее решение системы (35) в односвязной области $D^+-[1,\ \infty)$ выражается формулой

$$u_0(z)=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{k_j}\delta_{e_j+k}\left\{\left[\frac{i-\lambda_j}{2i}\,a_{e_j+k}+\frac{\alpha_{j,k-1}}{2i}\,a_{e_j+k-1}\right]ln\,(z+\mu_j\bar z)+\right.$$

$$+\alpha_{j,k-1}a_{e_j+k-1}\frac{y}{z+\mu_j\bar{z}}-\sum_{r=2}^{k-1}\gamma_{jkr}a_{e_j+k-r}\left[\frac{\bar{z}^r}{(z+\mu_j\bar{z})^2}\right]_x^{(r-2)}\Bigg\}+$$

$$+\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}\delta_{e_j+k}\left\{\left[\frac{i-\lambda_j}{2i}a_{e_j+k}-\frac{\alpha_{j,k-1}}{2i}a_{e_j+k-1}\right]\ln(\mu_j z+\bar{z})+\right.$$

$$+\alpha_{j,k=1}a_{e_j+k-1}\frac{y}{\mu_j z+\bar{z}}-\sum_{r=2}^{k-1}\sigma_{jkr}a_{e_j+k-r}\left[\frac{z^r}{(\mu_j z+\bar{z})^2}\right]_x^{(r-2)}\Bigg\}+C_0. \qquad (36)$$

Функция $u_0(z)$ в области D^+ будет ограничена и непрерывна тогда и только тогда, когда имеют место следующие равенства:

$$\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{k_j}\delta_{e_j+k}\left[(i+\lambda_j)a_{e_j+k}+\alpha_{j,k-1}a_{e_j+k-1}\right]=0,$$

$$\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}\delta_{e_j+k}\left[(i-\lambda_j)a_{e_j+k}-\alpha_{j,k-1}a_{e_j+k-1}\right]=0. \qquad (37)$$

Таким образом, в силу (28), (31), (34), (36) общее решение системы (1) в классе $H_1^*(t_1,\cdots,t_e)$ будет иметь следующий вид:

$$u(z)=u_0(z)+\int_{\infty}^{z}V_1(z)\,dx+V_2(z)\,dy, \qquad (38)$$

где $u_0(z)$ определяется формулой (36) (постоянные a_j удовлетворяют равенствам (37)), а $V_1(z)$, $V_2(z)$ определяются из формул (28), (31), (32).

§ 2. Приведение граничной задачи (1), (4) к задаче Гильберта с разрывными коэффициентами

Вычисляя $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ на границе Γ и подставляя их в условие (4), получим некоторую граничную задачу в классе $H^*(t_1,\cdots,t_e)$ для аналитических функций $\psi_{e_j+k}(\zeta)$, которую легко свести к задаче Гильберта.

На основании формул (25), (13), (16), (26) из (28), (29) для граничных значений u_x, u_y будем иметь

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_\Gamma=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{x=1}^{k_j}\delta_{e_j+k}\left[\frac{a_{e_j+k}}{t+\mu_j\bar{t}}+\psi_{e_j+k}(t+\mu_j\bar{t})\right]+\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}\delta_{e_j+k}\times$$

$$\times\left[\frac{a_{e_j+k}}{\mu_j t+\bar{t}}+\psi_{e_j+k}(\mu_j t+\bar{t})\right],\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_\Gamma=\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{k_j}\theta_{e_j+k}\left[\frac{a_{e_j+k}}{t+\mu_j\bar{t}}+\right.$$

$$+\psi_{e_j+k}(t+\mu_j\bar{t})\Big]+\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}\theta_{e_j+k}\left[\frac{a_{e_j+k}}{\mu_j t+\bar{t}}+\psi_{e_j+k}(\mu_j t+\bar{t})\right].$$

Подставляя полученные значения в граничное условие (4), получим

$$\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{k_j} b_{e_j+k}(t)\,\psi_{e_j+k}(t+\mu_j\bar{t})+\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j} b_{e_j+k}(t)\,\psi_{e_j+k}(\mu_j t+\bar{t})=g(t), \tag{39}$$

где

$$b_r(t)\overset{\text{def}}{=}\alpha(t)\,\delta_r+\beta(t)\,\theta_r,\ r=1,\cdots,2n,$$

$$g(t)\overset{\text{def}}{=}f(t)-\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{k_j}a_{e_j+k}\frac{b_{e_j+k}(t)}{t+\mu_j\bar{t}}-\sum_{j=\nu+1}^{m}\sum_{k=1}^{k_j}a_{e_j+k}\frac{b_{e_j+k}(t)}{\mu_j t+\bar{t}}. \tag{40}$$

Далее, легко убедиться в том, что функции

$$F_{e_j+k}(z)\overset{\text{def}}{=}\psi_{e_j+k}\left(z+\frac{\mu_j}{z}\right),\ j\leqslant\nu,\ |z|>1,$$

$$F_{e_j+k}(z)\overset{\text{def}}{=}\psi_{e_j+k}\left(\mu_j z+\frac{1}{z}\right),\ j>\nu,\ |z|<1 \tag{41}$$

являются аналитическими функциями соответственно в областях D^+ и D^-.

В силу (2) можно ввести следующие обозначения:

$$\tilde{F}(z)\overset{\text{def}}{=}(F_1(z),\cdots,F_n(z)),\ |z|>1,$$

$$F(z)\overset{\text{def}}{=}(F_{n+1}(z),\cdots,F_{2n}(z)),\ |z|<1, \tag{42}$$

$$\chi(z)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases} z\tilde{F}(z), & |z|>1\\ z^{-2}F(z), & |z|<1,\end{cases}$$

$$\tilde{B}_0(t)=\|b_1(t),\cdots,b_n(t)\|,\ B_0(t)=\|b_{n+1}(t),\cdots,b_{2n}(t)\|.$$

Предположим также, что

$$\det\tilde{B}_0(t)\neq 0;\ \det B_0(t)\neq 0 \text{ при любом } t\in\Gamma. \tag{43}$$

В обозначениях (41), (42) граничная задача (39) примет вид

$$\chi^+(t)=-t^3\tilde{B}_0^{-1}(t)\,B_0(t)\,\chi^-(t)+t\,\tilde{B}_0^{-1}(t)\,g(t). \tag{44}$$

Из условий, которым удовлетворяют матрицы $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и вектор $f(t)$, на основании (43) имеем, что граничная задача (44) есть задача Гильберта с разрывными коэффициентами (см. [2], стр. 35, 119).

Таким образом, решение задачи (1), (4) привели к хорошо изученной задаче Гильберта с разрывными коэффициентами для кусочно-аналитической вектор-функции, исчезающей в бесконечности.

Используя результаты теории задачи Гильберта с разрывными коэффициентами получим, что при выполнении условий (43) задача (1), (4) является нетеровой.

Приведенный метод решения задачи (1), (4) можно применить для решения следующей задачи:

$$\alpha(t)\, u_x(t) + \beta(t)\, u_y(t) + q(t)\, u(t) = f(t),\ t \in \Gamma.$$

§ 3. Частный случай задачи (1), (4)

Предположим, что $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — кусочно-постоянные матрицы с двумя точками разрыва $t_1,\ t_2 \in \Gamma$. Тогда матрицы $\overline{B}_0(t)$ и $B_0(t)$ тоже будут кусочно-постоянными.

Пусть

$$\overline{B}_0(t) = \begin{cases} \overline{B}, & t \in \Gamma_1 \\ \overline{B}_2, & t \in \Gamma_2, \end{cases} \quad B_0(t) = \begin{cases} B_1, & t \in \Gamma_1, \\ B_2, & t \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{45}$$

$$\Phi(z) = \begin{cases} \overline{B}_1 \chi(z), & |z| > 1 \\ -B_1 \chi(z), & |z| < 1, \end{cases} \tag{46}$$

где Γ_1 — часть окружности, заключенная между $t_1,\ t_2$, а Γ_2 — остальная часть.

В § 2 задачу (1), (4) привели к задаче (44). Задача Гильберта (44) в обозначениях (45), (46) примет вид

$$\Phi^+(t) = t^3 \Phi^-(t) + t g(t),\ t \in \Gamma_1,$$

$$\Phi^+(t) = t^3 \overline{B}_1 \overline{B}_2^{-1} B_2 B_1^{-1} \Phi^-(t) + t \overline{B}_1 \overline{B}_2^{-1} g(t),\ t \in \Gamma_2. \tag{47}$$

Так как в силу условий (43) матрица

$$P \overset{\text{def}}{=} \tilde{\overline{B}}_1 \overline{B}_2^{-1} B_2 B_1^{-1}$$

неособая, то существует неособая матрица Q, которая приводит P к жордановой форме, т. е.

$$\overline{P} \overset{\text{def}}{=} Q^{-1} P Q = \left\| \begin{matrix} \sigma_1 & & & & \\ \varepsilon_1 & \sigma_2 & & 0 & \\ & \varepsilon_2 & \sigma_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \varepsilon_{n-1} & \sigma_n \end{matrix} \right\|,\ \sigma_k \neq 0\ (k = 1, \cdots, n), \tag{48}$$

где $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ — собственные значения матрицы P (некоторые σ_k могут совпадать), а $\varepsilon_j\ (j = 1, \cdots, n-1)$ равны либо нулю, либо единице.

Введем функцию

$$T(z) = Q^{-1}\,\Phi(z). \tag{49}$$

Относительно кусочно-аналитической вектор-функции $T(z)$, исчезающей в бесконечности, из (47) получим граничную задачу, которая для компонентов вектор-функций $T(z) = (T_1(z), \cdots, T_n(z))$, в силу (48) имеет вид

$$\begin{cases} T_1^+(t) = t^3\, T_1^-(t) + h_1(t), & t \in \Gamma_1 \\ T_1^+(t) = \sigma_1 t^3\, T_1^-(t) + h_1(t), & t \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{50}$$

$$\begin{cases} T_{k+1}^+(t) = t^3\, T_{k+1}^-(t) + h_{k+1}(t), & t \in \Gamma_1 \\ T_{k+1}^+(t) = \sigma_{k+1}\, T_{k+1}^-(t) + \varepsilon_k t^3\, T_k^-(t) + h_{k+1}(t), & t \in \Gamma_2\ (k = 1, \cdots, n-1), \end{cases} \tag{51}$$

где $h_1(t), \cdots, h_n(t)$ — компоненты вектор-функций

$$h(t) = \begin{cases} t\,Q^{-1}\,\bar{g}(t), & t \in \Gamma_1 \\ t\,Q^{-1}\,\bar{B}_1\,\bar{B}_2^{-1}\,g(t), & t \in \Gamma_2. \end{cases} \tag{52}$$

Граничная задача (50) является задачей сопряжения для кусочно-аналитической функции $T_1(z)$, исчезающей в бесконечности (см. [1], стр. 253—271).

Вычисляя индекс $\varkappa_1$ задачи (50), получим:

$$\varkappa_1 = -3, \text{ если } \sigma_1 > 0$$

и

$$\varkappa_2 = -2 \text{ — в остальных случаях.}$$

Следовательно, решение задачи (50) существует тогда и только тогда, когда соблюдены условия разрешимости

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{t^j\, h_1(t)}{x_1^+(t)}\, dt = 0, \quad j = 0, 1, \cdots, -\varkappa_1 - 1, \tag{53}$$

где $x_1^+(t)$ — граничное значение канонической функции $X_1(z)$ задачи (50) (см. [1], стр. 257, 260).

При соблюдении этих условий решение (единственное) дается формулой (см. [1], стр. 261)

$$T_1(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{h_1(t)\, dt}{X_1^+(t)(t - z)}\,. \tag{54}$$

Подставляя $T_1(z)$ из (54) в (51) при $k = 1$, получим аналогичную задачу сопряжения для кусочно-аналитической функции $T_2(z)$, исчезающей в бесконечности и т. д.

При соблюдении соответствующих условий разрешимости (аналогичных (53)) для вычисления $T_{k+1}(z)$ получим рекуррентную формулу

$$T_{k+1}(z)=\frac{X_{k+1}(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{h_{k+1}(t)+\varepsilon_k t^3\, T_k^-(t)}{X_{k+1}^+(t)(t-z)}\,dt, \tag{55}$$

$$(k=1, \cdots, n-1)$$

где $X_{k+1}(z)$ — каноническая функция соответствующей задачи сопряжения.

Пусть r — ранг матрицы алгебраической системы (37), а n_0 — число действительных положительных чисел среди $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$.

Тогда для индекса $\varkappa_0$ задачи (1), (4) получим

$$\varkappa_0 = n - r - n_0.$$

В заключение выражаю глубокую благодарность моему научному руководителю Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и постоянное внимание при её выполнении.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса
Поступила 24.I. 1976

Հ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Պուանկարեի խնդիրը էլիպտիկ համակարգերի համար հարթության վրա *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ուսումնասիրվում է կոմպլեքս հաստատուն գործակիցներով երկրորդ կարգի էլիպտիկ համակարգ, որի համար դրվում է խզվող եզրային պայմաններով եզրային խնդիր։ Համակարգի լուծման համար ստացված ներկայացման օգնությամբ ուսումնասիրվող խնդիրը բերվում է Հիլբերտի խնդրին։

Իսկ երբ եզրային պայմանի գործակիցները կտոր առ կտոր հաստատուն մատրիցներ են, տրվում է խնդրի լուծման էֆեկտիվ մեթոդ։

H. A. MARTIROSIAN. *Pouancare's problem for the elyptic sistem on the plane* (summary)

A boundary problem for second order ellyptic system with constant complex coefficients is considered.

By means of a spicially developed representation for the solution the problem isr educed to Gilbert's problem with discontinous coefficients.

In the case, in which the coefficients arэ piece wiseconstant matricies, an ellective solution is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, Изд. „Наука", 1968.
2. *Н. П. Векуа.* Системы сингулярных интегральных уравнений, Н., 1970.
3. *Н. Е. Товмасян.* Об одном методе решения краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат. сборник, т. 89 (131), 1972, 599.
4. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Н., 1966.
5. *Н. Е. Товмасян.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифференциальные уравнения, том II, №№ 1, 2, 1966.