ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 4, 1977 Математика

С. Н. МАНУКЯН

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПОНЯТИЙ ВНЕШНЕЙ И ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКИ ОТНОСИТЕЛЬНО КОНСТРУКТИВНОЙ ЗАМКНУТОЙ КРИВОЙ

Рассматриваемые понятия конструктивного анализа определяются таким же образом, как в [1]—[5].

Цель дальнейших рассмотрений заключается в доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Существует несамопересекающаяся замкнутая конструктивная кривая S, не имеющая угловой функции относительно некоторой точки $x \ni y$, удаленной от S.*

Таким образом, можно построить конструктивную замкнутую самонепересекающуюся кривую, для которой некоторая точка, удаленная от нее, не является ни внешней, ни внутренней относительно этой кривой.

Для доказательства теоремы нам потребуются некоторые дополнительные утверждения.

Пусть Φ—точное невырожденное дизъюнктное бесконечное сегментное покрытие сегмента $a\Delta b$. Говорим, что сегменты Φ_i и Φ_j покрытия Φ являются **связными**, если существует конечная последовательность сегментов $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \cdots, \Phi_{i_s}$, такая, что

1. $(\Phi_{i_1} = \Phi_i \,\&\, \Phi_{i_s} = \Phi_j) \vee (\Phi^{i_1} = \Phi_j \,\&\, \Phi_{i_s} = \Phi_i)$;

2. для всякого t, где $1 \leqslant t < s$,

$$\text{Эп}\,(\Phi_{i_t}) = \text{Эл}\,(\Phi_{i_{t+1}}).$$

Лемма. *Каково бы ни было бесконечное сегментное точное невырожденное дизъюнктное покрытие Φ сегмента $a\Delta b$, невозможен алгорифм θ такой, что для всяких натуральных чисел i, j !$\theta\,(i * j)$, и $\theta\,(i * j) = \Lambda$, если Φ_i и Φ_j связные, $\theta\,(i * j) \neq \Lambda$, если Φ_i и Φ_j не связные.*

Доказательство. Пусть Φ — покрытие сегмента $a\Delta b$, обладающее перечисленными свойствами; для простоты положим $a \in \Phi_0$.

Пусть существует алгорифм θ со свойствами, указанными в формулировке леммы. Тогда при помощи алгорифма θ можно построить алгорифм ω, такой что при любом натуральном n имеют место следующие условия:

1) ω перерабатывает n в рациональную точку вида $a + m \times \times (b - a) \cdot 2^{-n}$, где m — некоторое натуральное число, $m \leqslant 2^n$;

2) Каждый из сегментов Φ_r и Φ_s, объединению которых принадлежит $\omega(n)$, связен с Φ_0.

3) Каждый из сегментов Φ_r и Φ_s, объединению которых принадлежит $\omega(n)+(b-a)\cdot 2^{-n}$ не связен с Φ_0.

В самом деле, для построения алгорифма ω с требуемыми свойствами достаточно положить

$$\omega(n) = a + 2^{-n}\cdot(b-a)\cdot(\mu k_{k<2^n}[\theta(K(a+$$

$$+(b-a)\cdot k\cdot 2^{-n}) * 0) \neq \Lambda] - 1),$$

где через K обозначен один из характеристических алгорифмов покрытия Φ.

Легко видеть, что при всяком n будет $\omega(n+1)=\omega(n)$ или $\omega(n+1)=\omega(n)+(b-a)\cdot 2^{-(n+1)}$. Отсюда следует, что всегда $0 \leqslant \omega(n+p)-\omega(n) < 2^{-n}\cdot(b-a)$, а потому последовательность ω конструктивно сходится. Построим FR-число x такое, что $\omega(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Тогда, как легко проверить, для всякого FR-числа $y \in a\Delta b$ оказывается: если $y < x$, то каждый из сегментов Φ_l и Φ_j, объединению которых принадлежит y, связен с Φ_0, если же $y > x$, то каждый из сегментов Φ_l и Φ_j, объединению которых принадлежит y, не связен с Φ_0. (Действительно, если $y < x$, то $\omega(n) > y$ при некотором n, и сегменты Φ_l и Φ_j связаны с Φ_0; если же $y > x$, то $\omega(n)+2^{-n}\cdot(b-a) < y$ при некотором n, тогда Φ_l и Φ_j не могут быть связаными с Φ_0). Рассмотрим теперь сегменты Φ_r и Φ_j, объединению которых принадлежит x. Построим сегменты Φ_{r_1} и Φ_{s_1}, соседние, соответственно, с Φ_r и Φ_s и отличные от Φ_r и Φ_s (такие сегменты можно построить в силу утверждения из [1], стр. 463). Положим

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min(|\Phi_r|, |\Phi_s|, |\Phi_{r_1}|, |\Phi_{s_1}|).$$

Рассматривая в роли y число $x-\varepsilon$, легко показать, что каждый из сегментов Φ_r и Φ_s связен с Φ_0. Рассматривая в роли y число $x+\varepsilon$, легко показать, что каждый из сегментов Φ_r и Φ_s не связен с Φ_0. Полученное противоречие завершает доказательство.

Доказательство теоремы. Согласно [1] построим сегментное дизъюнктное невырожденное точное бесконечное покрытие Φ сегмента $0\Delta 1$, обладающее свойствами $0 \in \Phi_0$, $1 \in \Phi_1$. Построим алгорифмы ξ и η такие, что (1) $\xi(0)=0$; (2) для всякого i, если $i \neq 0$, то Эп $(\Phi_{\xi(i)})=$ Эл (Φ_i); (3) $\eta(1)=1$; (4) для всякого i, если $i \neq 1$, то Эл $(\Phi_{\eta(i)})=$ Эп (Φ_i) (возможность построения таких алгорифмов следует из [1], стр. 463).

Пользуясь теоремой из [6], построим несамопересекающиеся и не пересекающиеся друг с другом конструктивные простые дуги F' и F'', заданные на сегменте $0\Delta 1$, содержащиеся в замкнутом квадрате $0\Delta 1 \times 0\Delta 1$ и такие, что F' соединяет точку $0\square 0$ с точкой $1\square 1$, а F'' соединяет точку $0\square 1$ с точкой $1\square 0$.

Через U' и V' (соответственно U'' и V'') обозначим левую и правую компоненты кривой F' (соответственно F'').

Построим алгорифм A, такой что

$$Ai = \frac{1}{3} \cdot \min\left(|\Phi_i|, |\Phi_{\eta(i)}|\right) \text{ при любом натуральном } i.$$

Построим конструктивные последовательности функций φ', ψ', φ'', ψ'' такие, что при любом $i > 1$ функции φ'_i, ψ'_i заданы на сегменте

$$\text{Эл}\,(\Phi_i)\,\Delta\,\frac{\text{Эл}\,(\Phi_i) + \text{Эп}\,(\Phi_i)}{2}$$

и удовлетворяют при всяком t, принадлежащем этому сегменту, следующим условиям:

$$\varphi'_i(t) = A_i \cdot U'\left(\frac{2\,(t - \text{Эл}\,(\Phi_i))}{|\Phi_i|}\right) - A_i \cdot V'\left(\frac{2\,(t - \text{Эл}\,(\Phi_i))}{|\Phi_i|}\right) + $$
$$+ \text{Эп}\,(\Phi_i);$$

$$\psi'_i(t) = A_i \cdot U'\left(\frac{2(t - \text{Эл}\,(\Phi_i))}{|\Phi_i|}\right) + A_i \cdot V'\left(\frac{2\,(t - \text{Эл}\,(\Phi_i))}{|\Phi_i|}\right) - A_i;$$

функции φ''_i, ψ''_i при $i > 1$ заданы на том же сегменте и удовлетворяют таким же условиям, с заменой U' на U'' и V' на V''.

Построим K' и K''—конструктивные последовательности кривых—таким образом, что при любом $i > 1$ кривые K'_i и K''_i определены на сегменте $\text{Эл}\,(\Phi_i)\,\Delta\,\dfrac{\text{Эл}\,(\Phi_i) + \text{Эп}\,(\Phi_i)}{2}$ равенствами

$$K'_i\,(t) = \varphi'_i\,(t) \,\sigma\, \psi'_i\,(t),$$
$$K''_i\,(t) = \varphi''_i\,(t) \,\sigma\, \psi''_i\,(t).$$

Нетрудно убедиться в том, что K'_i и K''_i при каждом $i > 1$ суть несамопересекающиеся и не пересекающие друг друга кривые, такие что K'_i соединяет точку $\text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma\, (-A_i)$ с точкой $\text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma\, A_i$, K''_i соединяет точку $(\text{Эп}\,(\Phi_i) - A_i) \,\sigma\, 0$ с точкой $(\text{Эп}\,(\Phi_i) + A_i) \,\sigma\, 0$, причем обе кривые K'_i и K''_i не выходят за пределы замкнутого квадрата с вершинами

$$(\text{Эп}\,(\Phi_i) - A_i) \,\sigma 0,\ \text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma A_i,\ (\text{Эп}\,(\Phi_i) + A_i) \,\sigma 0,\ \text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma\, (-A_i)$$

(в этом замечании термин „замкнутый квадрат" употреблен не в том смысле, в каком этот термин был определен в [3], однако он истолковывается очевидным образом).

Теперь построим последовательности кривых L', L'', R', R'' таким образом, что при любом $i > 1$

$$L'_i = \Lambda O_{\frac{\text{Эл}\,(\Phi_i) + \text{Эп}\,(\Phi_i)}{2} \Delta\, \text{Эп}\,(\Phi_i)} \,(\text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma A_i \,\Delta\, \text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma$$
$$\sigma\, (2 - \text{Эп}\,(\Phi_i)) \,*\, \text{Эп}\,(\Phi_i) \,\sigma\, (2 - \text{Эп}\,(\Phi_i))\,\Delta\,(4 - \text{Эп}\,(\Phi_i))\,\sigma$$

$$\sigma\,(2-\text{Эп}\,(\Phi_i))\ *\ (4-\text{Эп}\,(\Phi_i)\,\sigma\,(2-\text{Эп}\,(\Phi_i))\,\Delta\,(4-\text{Эп}\,(\Phi_i))\,\sigma$$

$$\sigma\,(\text{Эп}\,(\Phi_i)-2)\ *\ (4-\text{Эп}\,(\Phi_i))\,\sigma\,(\text{Эп}\,(\Phi_i)-2)\,\Delta\,(\text{Эп}\,(\Phi_i)\,\sigma$$

$$\sigma\,(\text{Эп}\,(\Phi_i)-2)\ *\ \text{Эп}\,(\Phi_{\eta(i)})\,\sigma\,(\text{Эп}\,(\Phi_i)-2)\,\Delta\,\text{Эп}\,(\Phi_{\eta(i)})\,\sigma$$

$$\sigma\,(-A_{\eta(i)});$$

$$L_i'' = \Lambda\text{O}_{\frac{\text{Эл}\,(\Phi_i)+\text{Эп}\,(\Phi_i)}{2}\,\Delta\,\text{Эп}\,(\Phi_i)}((\text{Эп}\,(\Phi_i)+A_i)\,\sigma\,0\Delta$$

$$\Delta\,(\text{Эп}\,(\Phi_{\eta(i)})-A_{\eta(i)})\,\sigma 0);$$

далее при любом $i>1$ кривая R_i' (соответететвенно R_i'') получается посредством склеивания кривых K_i' и L_i' (соответственно, K_i'' и L_i''), и, наконец

$$R_0' = \Lambda\text{O}_{\Phi_0}\,(0\sigma 0\Delta 0\sigma\,(-A_{\eta(0)})\ *\ 0\sigma\,(-A_{\eta(0)})\,\Delta$$

$$\Delta\,\text{Эп}\,(\Phi_{\eta(0)})\,\sigma\,(-A_{\eta(0)})),$$

$$R_0'' = \Lambda\text{O}_{\Phi_0}\,(0\sigma 0\Delta\,(\text{Эп}\,(\Phi_{\eta(0)})-A_{\eta(0)})\,\sigma 0),$$

$$R_1' = \Lambda\text{O}_{\Phi_1}\,(1\sigma\,(-A_1)\,\Delta\,1\,\sigma\,0),$$

$$R_1'' = \Lambda\text{O}_{\Phi_1}\,((1-A_1)\,\sigma\,0\,\Delta 1\sigma 0).$$

Очевидно, что для каждой из последовательностей R' и R'' удовлетворены условия „Теоремы о склеивании" (см., например, [1], стр. 479), а потому можно построить кривые H' и H'', заданные на $0\Delta 1$ и такие, что для всякого i имеют место равенства $H'(t)=R_i'(t)$, $H''(t)=R_i''(t)$ при каждом $t\in\Phi_i$. Легко проверить, что H' и H'' суть простые дуги, не пересекающиеся друг с другом, не содержащие точек открытого квадрата $1\nabla 3\sigma(-1)\nabla 1$ и такие, что $H'(0)=H''(0)=0\sigma 0$, $H'(1)=H''(1)=1\sigma 0$.

Построим, наконец, кривую S на сегменте $0\Delta 1$, такую что при любом $x\in 0\Delta 1$

$$S(x)=H'(2x)\ \text{при}\ 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},$$

$$S(x)=H''(2-2x)\ \text{при}\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.$$

Ясно, что S — несамопересекающаяся замкнутая кривая, определенная на $0\Delta 1$.

Докажем, что S не имеет угловой функции относительно точки $2\sigma 0$ (то, что точка $2\sigma 0$ удалена от S, следует из построения S). Этим будет, очевидно, завершено доказательство теоремы.

Допустим, что S имеет угловую функцию φ относительно $2\sigma 0$. Из определения кривой H' и кривых K_i' при $i>1$ следует, что для любого $i>1$ при

$$x \in \frac{1}{2} \cdot \text{Эл}\,(\Phi_i) \Delta \frac{1}{4} \cdot (\text{Эл}\,(\Phi_i) + \text{Эп}\,(\Phi_i))$$

значения $\varphi(x)$ находятся в промежутке вида

$$\left(2\pi q + \frac{3\pi}{4}\right) \nabla \left(2\pi q + \frac{5\pi}{4}\right)$$

при некотором целом q; с другой стороны, на сегменте

$$\frac{1}{4} \cdot (\text{Эл}\,(\Phi_i) + \text{Эп}\,(\Phi_i)) \Delta \frac{1}{2} \text{Эп}\,(\Phi_i))$$

кривая S представляет собой линейный образ цепочки отрезков

$$\text{Эп}\,(\Phi_i) \sigma A_i \Delta \text{Эп}\,(\Phi_i) \varsigma (2 - \text{Эп}\,(\Phi_i)) * \text{Эп}\,(\Phi_i) \varsigma$$
$$\varsigma (2 - \text{Эп}\,(\Phi_i)) \Delta (4 - \text{Эп}\,(\Phi_i)) \varsigma (2 - \text{Эп}\,(\Phi_i)) * (4 -$$
$$- \text{Эп}\,(\Phi_i)) \varsigma (2 - \text{Эп}\,(\Phi_i)) \Delta (4 - \text{Эп}\,(\Phi_i)) \varsigma (\text{Эп}\,(\Phi_i) -$$
$$- 2)) * (4 - \text{Эп}\,(\Phi_i)) \varsigma (\text{Эп}\,(\Phi_i) - 2) \Delta (\text{Эп}\,(\Phi_{\eta(i)}) \varsigma$$
$$\varsigma (\text{Эп}\,(\Phi_i) - 2)) * (\text{Эп}\,(\Phi_{\eta(i)}) \varsigma (\text{Эп}\,(\Phi_i) - 2)) \Delta$$
$$\Delta \text{Эп}\,(\Phi_{\eta(i)}) \varsigma (-A_{\eta(i)}).$$

Отсюда вытекает, что для всякого $i > 1$ осуществимо целое q, такое что имеют место соотношения

$$2\pi q + \frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2} \text{Эл}\,(\Phi_i)\right) \leqslant 2\pi q + \frac{5\pi}{4},$$

$$2\pi (q - 1) + \frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2} \text{Эп}\,(\Phi_i)\right) \leqslant 2\pi (q - 1) + \frac{5\pi}{4}.$$

Но тогда для всякой системы натуральных чисел $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$, больших 1 и удовлетворяющих условию $\text{Эп}\,(\Phi_{i_j}) = \text{Эл}\,(\Phi_{i_{j+1}})$ при $1 \leqslant j < k$, осуществимо целое число q, такое что

$$2\pi (q - j) + \frac{3\pi}{4} \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2} \cdot \text{Эл}\,(\Phi_{i_j})\right) \leqslant 2\pi (q - j) + \frac{5\pi}{4}$$

при всех j от 1 до k. Следовательно, для всякой системы сегментов $\Phi_{i_1}, \Phi_{i_2}, \cdots, \Phi_{i_k}$, удовлетворяющей указанным условиям, имеем

$$2\pi (k - 1) - \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi\left(\frac{1}{2} \cdot \text{Эл}\,(\Phi_{i_1})\right) -$$
$$- \varphi\left(\frac{1}{2} \text{Эл}\,(\Phi_{i_k})\right) \leqslant 2\pi (k - 1) + \frac{\pi}{2}.$$

Пользуясь только что установленными соотношениями, мы можем теперь построить алгорифм θ, применимый ко всякому слову вида $i * j$, где i и j — натуральные числа и такой, что при любых натуральных i и j $\theta(i * j) = \Lambda$, если Φ_i и Φ_j связны, и $\theta(i * j) \neq \Lambda$ — в противном случае. Для этого достаточно построить алгорифм ξ^*, такой что при любых натуральных i и j

$$\xi^*(i * 0) = i,$$
$$\xi^*(i * (j+1)) = \xi(\xi^*(i * j)),$$

после чего алгорифм θ определяется следующими соотношениями:

$$\theta(i * i) = \Lambda;\ \theta(i * j) = \theta(\xi(i) * j) = \theta(\eta(i) * j) =$$
$$= \theta(i * \xi(i)) = \theta(i * \eta(i)),$$

если $i > 1$, $j > 1$ и осуществимо натуральное число

$$k \leqslant \left[D^+\left(\left(\left| \frac{\varphi\left(\frac{1}{2}\ \text{Эл}(\Phi_i)\right) - \varphi\left(\frac{1}{2}\ \text{Эл}(\Phi_j)\right)}{2\pi} \right| + 2 \right) * 0 \right) \right],$$

такое что

$$\text{Эл}(\Phi_{\xi^*(i * k)}) = \text{Эл}(\Phi_j) \bigvee \text{Эл}(\Phi_{\xi^*(j * k)}) =$$
$$= \text{Эл}(\Phi_i),\ \text{то}\ \theta(i * j) = \Lambda,$$

если $i > 1$, $j > 1$, и невозможно натуральное число k с указанными свойствами, то $\theta(i * j) = 1$. Легко проверить, что построенный таким образом алгорифм θ удовлетворяет перечисленным выше условиям. Однако такой алгорифм невозможен в силу леммы.

Доказательство теоремы окончено.

Аналогичным образом можно показать, что всякая точка, принадлежащая открытому квадрату $1 \nabla 3\tau\ (-1) \nabla 1$, обладает таким же свойством, какое мы установили в отношении точки $2 \circ 0$. С другой стороны, можно показать, что существуют точки, внешние относительно кривой S, а также и точки, внутренние относительно нее.

Формулировка основной теоремы настоящей статьи была опубликована в [7].

Вычислительный центр
АН Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Поступила 9.XI.1975

Ս. Ն. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ. Կոնստրուկտիվ փակ կորի նկատմամբ արտաքին և ներքին կետի գաղափարների մի հատկության մասին (*ամփոփում*)

Ապացուցվում է, որ գոյություն ունի ինքն իր հետ չհատվող կոնստրուկտիվ փակ կոր, որի համար նրանից հեռացված ինչ-որ կետ ոչ արտաքին է և ոչ ներքին։

S. N. MANUKIAN. *On a property of the notion of interior and exsterior point with respect to constructive closed curve* (summary)

It is proved, that there exists a constructive closed curve without selfintersections with respect to which some distant point is neither interior nor exterior.

ЛИТЕРТУРА

1. *И. Д. Заславский, Г. С. Цейтин.* О сингулярных покрытиях и связанных с ними свойстнах конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 458–502.
2. *И. Д. Заславский.* Некоторые свойства конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций, Труды МИАН им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 385–457.
3. *И. Д. Заславский, С. Н. Манукян.* О разбиениях плоскости конструктивными кривыми, Труды ВЦ АН Арм.ССР и ЕГУ „Математические вопросы кибернетики", т. V, 1968, 26–138.
4. *Б. А. Кушнер.* Лекции по конструктивному математическому анализу, М., Изд. „Наука", 1973.
5. *С. Н. Манукян.* О конструктивных всюду плотных простых дугах, Известия АН Арм.ССР, сер. „Математика", VIII, № 4, 1973, 291—305.
6. *С. Н. Манукян.* О некоторых топологических особенностях конструктивных простых дуг, „Исследования по теории алгорифмов и математической логике", ВЦ АН СССР, том 2, 1976, М., 122–129.
7. *С. Н. Манукян.* Некоторые конструктивные кривые со специфическими геометрическими свойствами, Четвертая всесоюзная кофференция по математической логике, тезисы докладов и сообщений, 84, Кишинев, 1976.