ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 4, 1977 Математика

Г. М. МУШЕГЯН

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ РЯДОВ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕСТАНОВОК

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматривается некоторый класс систем измеримых, конечных и определенных на [0, 1] функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, по которым существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

который универсален относительно перестановок в смысле сходимости почти всюду в пространстве измеримых функций.

В этом направлении интересные результаты получены А. М. Олевским [4] и Н. Б. Погосяном [6], для четкой формулировки которых приведем следующее

Определение. Скажем, что ряд $\sum_n f_n(x)$, составленный из измеримых конечных функций, является π-универсальным, если для любой измеримой (не обязательно конечной) функции $g(x)$ существует такая перестановка $\pi = \{n_k\}$ чисел натурального ряда, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{n_k}(x) = g(x)$$

почти всюду.

Теорема (А. М. Олевский). Существуют ортонормальная система $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно ограниченных функций, полиномы которой всюду плотны в пространстве $C[0,1]$, и функция $f \in L_p$ $(1 \leq p < 2)$, ряд Фурье которой π-универсален.

Как известно, вопрос о существовании тригонометрического ряда, почти всюду сходящегося к бесконечности, не решен.

В связи с этим П. Л. Ульяновым построен пример ортогонального ряда, обладающего этим свойством и являющегося рядом Фурье в несобственном смысле от $f \in L$ (см. [7]). Он же поставил вопрос о существовании сходящегося к $+\infty$ ряда по ограниченной системе (см. [5], стр. 28). Пример, реализующий положительный ответ, принадлежит Р. И. Осипову и А. А. Талаляну (см. [9]). Далее Ф. Г. Арутюняном [3] был указан тригонометрический ряд, который после некоторой перестановки слагаемых сходится к $+\infty$. Аналогичный пример для системы Хаара был приведен А. М. Олевским (см. [4]).

По системе Уолша и по базисам пространства $C\,[0,1]$ такой пример построен Р. И. Овсепяном [10].

В работе [13] А. А. Талаляном было установлено существование ряда $\sum a_n \varphi_n(x)$, где $\{\varphi_n(x)\}$ — произвольный базис пространства L_p, который универсален относительно перестановок в смысле сходимости по мере и в смысле суммируемости почти всюду методами Чезаро положительного порядка. Первый пример ортогонального ряда, который при двух различных перестановках почти всюду сходится к различным функциям, был приведен П. Л. Ульяновым (см. [14]).

П. Л. Ульяновым был поставлен вопрос (см. [8]): существует ли π-универсальный ряд по любой полной ортонормированной системе? В том случае, когда полная ортонормированная система ограничена, положительный ответ на этот вопрос дан Н. Б. Погосяном (см. [6]).

В настоящей работе по некоторым системам строятся π-универсальные ряды, существование которых не следует из ранее известных результатов (система Хаара, базисы пространства $C\,[0,1]$ и т. д.). Одновременно приводится новое доказательство некоторых ранее известных теорем (например, для тригонометрической системы и системы Уолша).

При доказательстве используются свойства систем типа (χ), приведенные Ф. Г. Арутюняном в [1].

§ 2. Вспомогательные определения и обозначения

Пусть $\{\psi_k(x)\}$ — некоторая система функций, определенных на $[0,1]$. Рассмотрим полиномы

$$P_k(x)=\sum_{i=n_k}^{m_k} a_i\psi_i(x);\quad k=1,\,2,\cdots,N \text{ и } Q(x)=\sum_{k=1}^{N} b_k P_k(x).$$

Обозначим

$$\underline{\operatorname{ind}}\, P_k(x)=n_k,\quad \overline{\operatorname{ind}}\, P_k(x)=m_k,$$

$$\underline{\operatorname{ind}}\, Q(x,\{\psi_k\})=\min\{n_k,\ 1\leqslant k\leqslant N\},\ \underline{\operatorname{ind}}\, Q(x,\{\psi_k\})=\min\{n_k,\ 1\leqslant k\leqslant N\},$$

$$|\mathrm{U}\,[P_k(x,\{\psi_k\})]|=\sup_{n_k<j<m_k}\left|\sum_{i=n_k}^{j} a_i\,\psi_i(x)\right|,\ |\mathrm{U}\,[Q(x,\{P_k\})]|=$$

$$=\sup_{1<j<N}\left|\sum_{i=1}^{j} b_i\,P_i(x)\right|,$$

$$|\mathrm{U}\,[Q(x,\{\psi_n\})]|=|\mathrm{U}\,[Q(x,\{P_k\})]|+\sup_{1<j<N}|\mathrm{U}\,[P_j(x,\{\psi_k\})]|.$$

Через A обозначим класс систем, измеримых, почти всюду конечных функций $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, определенных на $[0,1]$ таких, что для произвольного интервала $(a, b) \subset [0,1]$ и чисел $\varepsilon > 0$, $0 < \delta < 1$, $N > 0$ существуют множества $E^{(1)}$ и $E^{(2)}$ и полином

$$P(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k \varphi_k(x),$$

обладающие свойствами:

1° $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ являются объединениями конечного числа интервалов $E^{(1)} \cap E^{(2)} = \varnothing$, $E^{(1)} \cup E^{(2)} \subset (a, b)$, $\mu(E^{(l)}) \geqslant 2^{-1}(1-2^{-1}\delta)(b-a)$, $l = 1, 2$;

2° $\mu\{x: x \in E^{(l)}, |P(x) - (-1)^l| < \varepsilon\} \geqslant 2^{-1}(1-\delta)(b-a)$, $l = 1, 2$;

3° $\mu\{x: x \in [0, 1] \setminus (a, b), |P(x)| < \varepsilon\} \leqslant (1 - b + a)\delta$;

4° $m \geqslant N$.

В настоящей работе будет доказана следующая

Теорема 1. *Пусть последовательности* $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$\varepsilon_k > 0,\ \delta_k > 0,\ k = 1, 2, \cdots, \sum_{k=i}^{\infty} \varepsilon_k < 1, \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < 1. \tag{1}$$

Предположим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k P_k(x, \{\varphi_k\}),\ \text{где}\ P_k(x) = \sum_{l=n_k}^{m_k} a_l \varphi_l(x), \tag{2}$$

удовлетворяет следующим условиям:

I. $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — *система из класса* A, *для полиномов* $P_k(x)$ *имеют место условия* 1°, 2°, 3°, *где* $\varepsilon = \varepsilon_k$, $(a, b) = (a_k, b_k)$, $\delta = \delta_k$, $N = \overline{\operatorname{ind}} P_{k-1}(x)$, $E^{(1)} = E_k^{(1)}$, $E^{(2)} = E_k^{(2)}$;

II. $\mu\left\{\bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{k=l}^{\infty} (a_k, b_k)\right\} = 1$;

III. *если* $r < k$ *и* $l = 1$ *или* 2, *то имеет место одно из следующих соотношений:*

$$\text{либо}\ (a_k, b_k) \subset E_r^{(l)},\ \text{либо}\ (a_k, b_k) \cap E_r^{(l)} = \varnothing;$$

IV. $\lim\limits_{k \to \infty} (b_k - a_k) = 0$;

V. $\lim\limits_{k \to \infty} |\cup[\alpha_k P_k(x, \{\varphi_k\})]| = 0$ *почти всюду на* $[0,1]$;

VI. *ряд* (2) *расходится почти всюду на* $[0,1]$.

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=n_k}^{m_k} \alpha_k a_i \varphi_i(x)$$

π-*универсален.*

В формулировке теоремы 1, полагая $P_k(x, \{\varphi_k\}) = \chi_k(x)$, где $\{\chi_k(x)\}$ система Хаара, получим, что произвольный почти всюду на $[0,1]$ расходящийся ряд Хаара

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x),$$

для которого имеет место условие

$$\mu\{x: \lim_{k\to\infty} a_k \chi_k(x) = 0\} = 1,$$

π-универсален.

§ 3. Вспомогательные утверждения

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть* $d>0$, $0<\varepsilon<\dfrac{d}{2}$, $0<\delta<1$, $N>0$ — *некоторые числа, а* (a, b) — *интервал из* $[0,1]$. *Тогда в условиях теоремы* 1, *существуют множество* G *и подсумма ряда* (2)

$$Q(x) = \sum_{l=1}^{m} \alpha_{k_l} P_{k_l}(x),$$

которая после некоторой перестановки π *его слагаемых удовлетворяет условиям:*

а) $d-\varepsilon < Q_\pi(x) < d+\varepsilon$ *при* $x \in G$,

б) $|\cup[Q_\pi(x, \{\varphi_k\})]| < d+\varepsilon$ *при* $x \in G$,

в) $\mu\{x: x\in[0,1]\setminus(a, b), |\cup[Q(x, \{\varphi_k\})]| > \varepsilon\} > (1-b-a)(1-\delta)$,

г) $G \subset (a, b)$, $\mu(G) > (b-a)(1-\delta)$,

д) $N < \underline{\text{ind}}\{Q(x, \{\varphi_k\})$.

Обозначим

$$\tilde{P}_k(x) = \begin{cases} (-1)^l & \text{при } x\in E_k^{(l)}, l=1, 2, \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} E_k^{(1)} \cup E_k^{(2)}. \end{cases} \tag{3}$$

Из условий теоремы 1 следует, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tilde{P}_k(x) \tag{4}$$

расходится почти всюду на $[0,1]$.

Справедливо следующее

Предложение 1. *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \tilde{P}_k(x)$$

расходится почти всюду на E, то существует множество E_1, $E_1 \subset E$, $\mu(E_1) = \mu(E)$, на котором имеют место следующие два условия:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tilde{P}_k(x) = +\infty \text{ и } \underline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tilde{P}_k(x) = -\infty. \tag{5}$$

Доказательство предложения 1 легко получить, используя определения класса A и условий I—IV теоремы 1. Для этого достаточно рассуждения, примененные для функций Хаара в работе [5] провести для системы $\{\tilde{P}_k(x)\}$, что делается почти дословно.

Предложение 2. *Для произвольного открытого множества C и чисел $d>0$, $0<\gamma<\frac{d}{2}$, $0<\eta<1$, $N'>0$ существуют множества F_1, F_2 и полином*

$$T(x)=\sum_{k=N'+1}^{m} b_k \tilde{P}_k(x), \text{ где } b_k=\begin{cases} \text{либо } \alpha_k \\ \text{либо } 0 \end{cases} \tag{6}$$

такие, что

1) *F_1 и F_2 являются открытыми множествами, имеющими конечное число составляющих интервалов,*

2) $|U[T(x, \{\tilde{P}_k\})]| < d+\gamma$ *при* $x \in [0,1]$,

3) $d \leqslant T(x) < d+\gamma$ *при* $x \in F_1 \subset C$; $-d-\gamma < T(x) < -d$ *при* $x \in F_2 \subset C$,

4) $|U[T(x, \{\tilde{P}_k\})]| = 0$ *при* $x \in \bar{C}$,

5) $\mu(F_1) \geqslant \frac{1-\eta}{2}\mu(C)$, $\mu(F_2) > \frac{1-\eta}{2}\mu(C)$.

Доказательство. Выберем числа $M>N'$, R так, чтобы

$$R>1, \left(\frac{3d\eta}{R}+\frac{\gamma}{R}+\frac{2\gamma\eta}{R^2}\right)\left(d+\frac{\gamma}{R}\right)^{-1}<\eta, \sum_{k=M}^{\infty} \delta_k < \frac{\eta}{R}\mu(C). \tag{7}$$

Пусть $\{S_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда (4),

$$E_k^{(1)}(\alpha) = \{x: \alpha_k \tilde{P}_k(x) > 0\}, \quad E_k^{(2)}(\alpha) = \{x: \alpha_k \tilde{P}_k(x) < 0\},$$

$$E_k(\alpha) = E_k^{(1)}(\alpha) \cup E_k^{(2)}(\alpha).$$

Рассмотрим следующий ряд:

$$\sum_{k=M}^{\infty} b_k \tilde{P}_k(x), \tag{8}$$

где

$$b_k = \begin{cases} \alpha_k \text{ при } k \in \{k\colon E_k(\alpha) \subset C,\ |\alpha_k| < \frac{\gamma}{R},\ |S_n(x)| < d \text{ при всех } x \in E_k(\alpha), \\ \quad \text{и } 1 \leqslant n < k-1\}, \\ 0 \text{— в остальных случаях.} \end{cases} \tag{9}$$

Из предложения 1 следует, что ряд (8) сходится почти всюду на $[0,1]$, и при этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \widetilde{P}_k(x) = 0 \text{ при } x \overline{\in} C;\ d < \left| \sum_{k=M}^{\infty} b_k \widetilde{P}_k(x) \right| < d + \frac{\gamma}{R}$$

почти всюду на C.

Следовательно, существует число $M' > M$ такое, что

$$\mu\left\{x\colon d \leqslant \left| \sum_{k=M}^{M'} b_k \widetilde{P}_k(x) \right| < d + \frac{\gamma}{R}\right\} > \mu(C)\left(1 - \frac{\eta}{R}\right), \tag{10}$$

$$\left| \sum_{k=M}^{M'} b_k \widetilde{P}_k(x) \right| \leqslant \begin{cases} d \text{ при } x \in C \setminus (F^{(1)} \cup F^{(2)}) \\ 0 \text{ при } x \overline{\in} C, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$F^{(1)} = \left\{x\colon d \leqslant \sum_{k=M}^{M'} b_k \widetilde{P}_k(x) < d + \frac{\gamma}{R}\right\},$$

$$F^{(2)} = \left\{x\colon -d - \frac{\gamma}{R} < \sum_{k=M}^{M'} b_k \widetilde{P}_k(x) \leqslant -d\right\}.$$

Из определения функций $\widetilde{P}_k(x)$ имеем, что $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ являются объединением конечного числа интервалов. Из (10) вытекает, что имеет место хотя бы одно из следующих неравенств:

$$\mu(F^{(1)}) \geqslant \frac{1}{2}\mu(C)\left(1 - \frac{\eta}{R}\right),\quad \mu(F^{(2)}) \geqslant \frac{1}{2}\mu(C)\left(1 - \frac{\eta}{R}\right). \tag{12}$$

Пусть для определенности имеет место первое неравенство в (12). Покажем, что $\mu(F^{(2)}) > \frac{1-\eta}{2}\mu(C)$. Из 1° и (9) имеем

$$\left|\int_0^1 b_k \widetilde{P}_k(x)\,dx\right| < \frac{\gamma}{R}\left|\mu(E_k^{(1)}) - \mu(E_k^{(2)})\right| < \frac{\gamma}{R}\delta_k. \tag{13}$$

Положим

$$T(x) = \sum_{k=M}^{M'} b_k \widetilde{P}_k(x),\ \mu(F^{(2)}) = \frac{1-\nu}{2}\mu(C). \tag{14}$$

Из (13) и (7) имеем

$$\int_0^1 T(x)\,dx = \int_{F^{(1)}} T(x)\,dx + \int_{F^{(2)}} T(x)\,dx + \int_{C\setminus(F^{(1)}\cup F^{(2)})} T(x)\,dx < \frac{\gamma\eta}{R^2}\mu(C).$$

Учитывая (10), (11), (14), получим

$$\frac{d}{2}\left(1-\frac{\eta}{R}\right)\mu(C)-\left(d+\frac{\gamma}{R}\right)\frac{1}{2}\mu(C)(1-\nu)-d\mu(C)\frac{\eta}{R}<\frac{\gamma\eta}{R^2}\mu(C).$$

Отсюда и из (7) следует

$$\nu<\frac{\dfrac{3\eta d}{R}+\dfrac{\gamma}{R}+\dfrac{2\gamma\eta}{R^2}}{d+\dfrac{\gamma}{R}}<\eta \text{ и } \mu(F^{(2)})>\frac{1-\eta}{2}\mu(C).$$

Полагая, что в (12) справедливо второе неравенство, аналогично получили бы $\mu(F^{(1)})>2^{-1}\mu(C)(1-\eta)$. Следовательно, предложение 2 доказано.

Отметим, что способ построения полинома

$$\sum_{k=M}^{M'} b_k \breve{P}_k(x)$$

не нов, он был применен в работах [1] и [11].

Пусть полином $T_1(x)$ удовлетворяет условиям предложения 2, где $C_1=(a, b)$, $d=d$, $\gamma=\gamma_1=\varepsilon\cdot 2^{-3}$, $\eta=\delta\cdot 2^{-3}$. $F^{(1)}=F_1^{(1)}$, $F^{(2)}=F_1^{(2)}$, а число N' выбрано так, что

$$\alpha^\circ)\ N\leqslant N',\ \sum_{N'}^{\infty}\mu\{x\colon x\in(0,1),\ |P_k(x)-\breve{P}_k(x)|\geqslant\varepsilon_k\}<\sum_{N'}^{\infty}\delta_k<\frac{\delta}{2^2}(b-a),$$

$$\sum_{k=N'}^{\infty}\varepsilon_k<\varepsilon\cdot 4^{-1},$$

$$\beta^\circ)\ \mu\left[\bigcup_{N'}^{\infty}\left\{x\colon x\in[0,1],\ |\cup[a_k P_k(x,\{\varphi_k\})]|>\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right]>\frac{\delta}{2^2}(b-a).$$

Предположим, что уже определены полиномы $\{T_r(x)\}_1^{l-1}$, множества $\{C_r, F_r^{(1)}, F_r^{(2)}\}_{r=1}^{l-1}$, которые удовлетворяют требованиям предложения 2, где для $T_r(x)$, $d=d$, $\gamma=\gamma_r=\varepsilon 2^{-(r+2)}$, $\eta=\eta_r=\delta 2^{-(r+2)}$ $N=\overline{\text{ind}}\ T_{r-1}(x)$, $F^{(1)}=F_r^{(1)}$, $F^{(2)}=F_r^{(2)}$, а множества C_r определяются из следующих условий:

α) если $r_0>1$, существует число r', $r'<r_0$ и l' ($l'\leqslant 1$ или 2) такие, что

$$C_{r_0}=F_{r'}^{(l')} \text{ и } \sum_{k=1}^{r} T_k(x)<d-\varepsilon\frac{2^r-1}{2^{r+2}} \text{ при любых } r \text{ и } x,\ r<r_0,\ x\in F_{r'}^{(l')},$$

β) при любых фиксированных r, r_0, l, $1 \leqslant r < r_0 < i$, $l = 1$ или 2 имеет место одно из следующих соотношений:

$$\text{либо } C_{r_0} \subset F_r^{(l)}, \text{ либо } C_{r_0} \cap F_r^{(l)} = \varnothing,$$

γ) если $C_{r_0} = F_{r'}^{(l')}$, то $r' = \min \left\{ r \colon r < r_0, F_r^{(2)} \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^{r_0-1} C_j \right) = \varnothing \right\}$ и

$$l' = \begin{cases} 1, \text{ при } \sum_{k=1}^{r} T_k(x) < d - \varepsilon \dfrac{2^r - 1}{2^{r+2}} \text{ на } F_r^{(1)}, \text{ для любого } r,\ 1 \leqslant r < r_0, \\ 2 \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Из условия α) и из того, что $\varepsilon < \dfrac{d}{2}$ имеем

$$\sum_{r=1}^{r} T_k(x) < \frac{d}{2}, \text{ при } r,\ 1 \leqslant r < i - 1\ x \in C_{i-1},$$

учитывая условие 3) предложения 2, получим, что

$$\sum_{k=1}^{i-1} T_k(x) < \frac{d}{2}, \text{ при } x \in F_{i-1}^{(2)}, \tag{15}$$

откуда следует существование числа r_i, где

$$r_i = \min \left\{ r \colon r \leqslant i - 1,\ F_r^{(2)} \cap \left(\bigcup_{j=r+1}^{i-1} C_j \right) = \varnothing \right\}.$$

Положим

$$C_i = \begin{cases} F_{r_i}^{(1)}, \text{ при } \sum_{k=1}^{r_i} T_k(x) < \dfrac{d}{2} \text{ на } F_{r_i}^{(1)} \\ F_{r_i}^{(2)}, \text{ при } \sum_{k=1}^{r_i} T_k(x) > d - \varepsilon \text{ на } F_{r_i}^{(1)}. \end{cases} \tag{16}$$

Применяя предложение 2, где $d = d$, $\gamma = \varepsilon \cdot 2^{-(i+2)}$, $\eta = \delta \cdot 2^{-(i+2)}$, $N = \overline{\operatorname{ind}}\, T_{i-1}(x)$, $C = C_i$, определим полином $T_i(x)$.

Продолжая этот процесс, получим последовательности

$$\{T_k(x)\}_{k=1}^{\infty},\ \{C_k,\ F_k^{(1)},\ F_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}.$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(x) \tag{17}$$

сходится почти всюду на [0,1].

Сходимость ряда (17) на множестве

$$\left\{ (a, b) \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} C_i \right\} \cup \{[0,1] \setminus (a, b)\}$$

следует из условия 4) предложения 2, а на множестве

$$\bigcup_{l=1}^{\infty}\{C_l \setminus (F_l^{(1)} \cup F_l^{(2)})\}$$

из условия 3) предложения 2 и из α).

Предположим, что на множестве E, $E \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} (F_l^{(1)} \cup F_l^{(2)})$ ряд (17) расходится. Ясно, что $E \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} C_l$.

Отсюда, учитывая α), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{r} T_k(x) < d - \varepsilon \frac{2^r - 1}{2^{r+2}}, \text{ при } x \in E,\ r = 1, 2, \cdots. \tag{18}$$

Пусть

$$T_k(x) = \sum_{l=n_k}^{m_k} b_l \tilde{P}_l(x).$$

Из условия 2) предложения 2 и из (18) при $x \in E$ получим

$$\overline{\lim_{\substack{r\to\infty \\ n_r \leqslant l \leqslant m_r}}} \left| \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=n_r}^{l} b_i \tilde{P}_i(x) \right| \leqslant \overline{\lim_{r\to\infty}} \left\{ \sum_{k=1}^{r} T_k(x) + \right.$$

$$\left. + \max_{n_r \leqslant l \leqslant m_r} \left| \sum_{i=n_r}^{l} b_i \tilde{P}_i(x) \right| \right\} < 3d. \tag{19}$$

Так как $\left\{\sum_{k=1}^{r} T_k(x)\right\}_{r=1}^{\infty}$ — некоторая расходящаяся подпоследовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=n_k}^{m_k} b_i \tilde{P}_i(x), \tag{20}$$

то ряд (20) расходится на E. Из предложения 1 и из (19) следует, что $\mu(E) = 0$, и ряд (17) почти всюду на $[0,1]$ сходится. Отсюда, учитывая, что $d - \frac{\varepsilon}{4} < |T_k(x)| < d + \frac{\varepsilon}{4}$ на $F_k^{(1)} \cup F_k^{(2)}$, получим $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k}^{\infty} (F_l^{(1)} \cup F_l^{(2)}\right) = 0$. Из определения чисел η_r и из условия 5) предложения 2 имеем

$$\sum_{l=1}^{\infty} \mu \{C_l \setminus (F_l^{(1)} \cup F_l^{(2)})\} \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mu(C_l)\,\delta}{2^{l+2}} < \frac{b-a}{2^2}\,\delta. \tag{21}$$

Из условия γ) следует, что если при некотором r и l

$$\sum_{l=1}^{r} T_l(x) < d - \varepsilon,$$

при $x \in F_r^{(l)}$, то существует j, $j > r$, для которого $C_j = F_r^{(l)}$. Отсюда, учитывая, что $C_1 = (a, b)$, легко убедиться в справедливости следующего соотношения:

$$(a, b) \setminus \bigcup_{l=k}^{\infty} (F_l^{(1)} \cup F_l^{(2)}) \subset \left\{x\colon d - \frac{\varepsilon}{4} < \sum_{l=1}^{k-1} T_l(x) < d + \frac{\varepsilon}{4}\right\} \cup$$

$$\cup \bigcup_{l=1}^{\infty} \{C_l \setminus (F_l^{(1)} \cup F_l^{(2)})\}.$$

Отсюда

$$\lim_{k\to\infty} \mu \left\{x\colon d - \varepsilon < \sum_{l=1}^{k-1} T_l(x) < d + \varepsilon\right\} \leqslant (b-a) - \frac{b-a}{4}\delta - \lim_{k\to\infty} \mu \times$$

$$\times \left\{\bigcup_{l=k}^{\infty} (F_l^{(1)} \cup F_l^{(2)})\right\} = \left(1 - \frac{\delta}{4}\right)(b-a).$$

Следовательно, можно указать число M такое, что

$$\mu\left\{x\colon d - \frac{\varepsilon}{4} < \sum_{l=1}^{M} T_l(x) < d + \frac{\varepsilon}{4}\right\} \geqslant \left(1 - \frac{\delta}{2}\right)(b-a).$$

Рассмотрим следующий полином:

$$\widetilde{R}(x) = \sum_{k=1}^{M} \widetilde{T}_k(x), \quad \text{где} \quad \widetilde{T}_k(x) = \begin{cases} (-1)^{l+1} \cdot d, & \text{при } x \in F_k^{(l)},\ l = 1 \text{ или } 2 \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} F_k^{(1)} \cup F_k^{(2)}. \end{cases} \tag{22}$$

Учитывая, что $\varepsilon < \frac{d}{2}$, получим

$$\widetilde{R}(x) = d, \quad \text{при} \quad x \in E = \left\{x\colon d - \frac{\varepsilon}{4} < \sum_{l=1}^{M} T_l(x) < d + \frac{\varepsilon}{4}\right\}. \tag{23}$$

Легко убедиться, что существует единственная последовательность натуральных чисел

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_s \leqslant M \text{ такая, что } E = \bigcup_{i=1}^{s} F_{n_i}^{(1)}. \tag{24}$$

Ясно, что для полинома $\widetilde{R}(x)$ в условиях α), β), γ) неравенство

$$\sum_{k=1}^{r} T_k(x) < d - \varepsilon \frac{2^r - 1}{2^{r+2}} \quad \text{примет вид} \quad \sum_{k=1}^{r} \widetilde{T}_k(x) \leqslant 0.$$

Через $Rl(x)$, $1 \leqslant l \leqslant M$, обозначим частные суммы полинома (22) и докажем следующее

Предложение 3. *Пусть $F_{n_l}^{(1)}$ — множество из объединения* (24),

$$1 < n_l \leqslant s, \; k' \leqslant \max \{k: \bar{T}_k(x) = -d, \text{ при } x \in F^{(1)}_{n_l}\}.$$

Тогда существует число n_j, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $n_j < n_l$, $F^{(1)}_{n_j} \subset F^{(1)}_k$,

2) *если при некотором* j_1, $1 < j_1 \leqslant s$ *имеет место* $F^{(1)}_{n_{j_1}} \subset F^{(2)}_k$ *и* $n_{j_1} \neq n_l$, *то* $n_{j_1} > n_l$,

3) $\bar{T}_{k^{(l)}_\alpha}(x) = d$ *на* $F^{(1)}_{n_l}$; $T_{k^{(j)}_\beta}(x) = d$ *на* $F^{(1)}_{n_j}$; $r_l = r_j + 2$, *где*

$$\{k^l_\alpha\}^{r_l}_{\alpha=1} = \{k: k' < k \leqslant n_l \; |\tilde{T}_k(x)| = d, \text{ при } x \in F^{(1)}_{n_l}\},$$

$$\{k^{(j)}_\beta\}^{r_j}_{\beta=1} = \{k: k' \leqslant k \leqslant n_l, \; |\bar{T}_k(x)| = d, \text{ при } x \in F^{(1)}_{n_j}\}.$$

Доказательство. Так как $\bar{T}_1(x) = -d$ при $x \in F^{(1)}_{n_l}$, то существование числа k' очевидно. Из условия α) имеем $\bar{R}_{k'-1}(x) \leqslant 0$, при $x \in F^{(1)}_k \cup F^{(2)}_{k'}$, откуда легко убедиться, что множество $\{k^{(l)}_\alpha\}$ непусто. Из определения числа k' следует, что

$$\tilde{T}_{k^{(l)}_\alpha}(x) = d \text{ при } x \in F^{(1)}_{n_l}, \; 1 \leqslant \alpha \leqslant r_l. \tag{25}$$

Отсюда

$$\tilde{R}_{k^{(l)}_{r_l}}(x) = \bar{R}_{k'-1}(x) + \tilde{T}_{k'}(x) + \sum_{\alpha=1}^{r_l} \tilde{T}_{k^{(l)}_\alpha}(x) = d \quad \text{при} \quad x \in F^{(1)}_{n_l}$$

и

$$\bar{R}_{k'-1}(x) = -(r_l - 1)\, d + d = -r_l d + 2d \leqslant 0 \text{ при } x \in F^{(1)}_{n_l} \text{ и } r_l \geqslant 2. \tag{26}$$

Ясно, что

$$\bar{R}_{k'-1}(x) = -(r_l - 3)\, d \text{ при } x \in F^{(1)}_{k'}; \; \bar{R}_{k'}(x) = (-r_l + 1)\, d, \text{ при } x \in F^{(2)}_{k'}. \tag{27}$$

В том случае, когда $r_l = 2$, положим $n_j = k'$ и условия 1) и 3) доказаны. Пусть $r_l > 2$. Примем $k^{(j)}_1 = k' < k^{(l)}_1$. Предположим уже определены числа $k^{(j)}_1 < \cdots < k^{(j)}_l$, $l < r_l - 2$, причем $k^{(j)}_l < k^{(l)}_l$. Через $k^{(j)}_{l+1}$ обозначим число, удовлетворяющее условию $C^{(j)}_{k_{l+1}} = F^{(1)}_{k_l}$. Существование числа $k^{(j)}_{l+1}$ следует из (27). Из условия γ) следует, что $k^{(j)}_{l+1} < k^{(l)}_{l+1} \leqslant r_l - 2$. Пусть определены числа $k^{(j)}_l$, $l = 1, 2, \cdots, r_l - 2$. Ясно, что

$$F_{k_1^{(j)}}^{(1)} \supset F_{k_2^{(j)}}^{(1)} \supset \cdots \supset F_{k_{r_l-2}^{(j)}}^{(1)} \text{ и из (27) } \widetilde{R}_{k_{r_l-2}^{(j)}}(x) = d \text{ при } x \in F_{k_{r_l-2}^{(j)}}^{(1)}.$$

Полагая $n_j = k_{r_l-2}^{(j)}$, легко убедиться, что условия 1) и 3) предложения 3 выполнены.

Предположим, что $F_{n_{j_1}}^{(1)} \subset F_{k'}^{(2)}$ и $F_{n_{j_1}}^{(1)} \cap F_{n_l}^{(1)} = \varnothing$. Обозначим

$$\{k_m^{(j_1)}\}_{m=1}^{\sigma} = \{k\colon k' < k, |\widetilde{T}_k(x)| = d, \text{ при } x \in F_{n_{j_1}}^{(1)}\};\ k_1^{(j)} < k_2^{(j_1)} < \cdots < k_\sigma^{(j_1)}.$$

Так как $k_1^{(j_1)} = k_1^{(l)}$, $F_{n_l}^{(1)} \cap F_{n_{j_1}}$, то учитывая, что из определения числа k' имеем $T_k(x) = d$ при $x \in F_{n_l}^{(1)}$ и $k \in \{k\colon k' < k, \widetilde{T}_k(x) \neq 0, \text{ на } F_{n_l}^{(1)}\}$, легко убедиться в существовании числа l_0, $l_0 \leqslant r_l$, для которого имеет место условие

$$k_{l_0}^{(l)} = k_{l_0}^{(j_1)},\ \widetilde{T}_{k_{l_0}^{(l)}}(x) = -\widetilde{T}_{k_{l_0}^{(l)}}(t) \text{ при } x \in F_{n_l}^{(l)},\quad t \in F_{n_{j_1}}^{(1)}.$$

Отсюда

$$k_m^{(l)} = k_m^{(j_1)} \text{ при } m < l_0, \text{ и } \widetilde{R}_{k_{l_0}^{(l)}}(x) = R_{k_{l_0}^{(j_1)}}(x) + 2d, \text{ при } x \in F_{n_l}^{(1)},\ t \in F_{n_{j_1}}^{(1)}. \tag{29}$$

Если $l_0 = r_l$, то из условия γ) из (29) получим, что $r_l < \sigma$ и

$$k_{l_0+1}^{(l)} < k_{l_0+1}^{(j_1)}, \cdots, k_{r_l}^{(l)} < k_{r_l}^{(j_1)} \text{ и } n_{j_1} > n_l.$$

Предложение 3 доказано.

Предположим, что построена некоторая подсумма полинома (24), которая после некоторой перестановки слагаемых имеет вид

$$\widetilde{Q}_{l-1}(x) = \sum_{\nu=1}^{t_{i-1}} \widetilde{T}_{n_\nu}(x), \text{ где } 1 \leqslant n_\nu < M,\ 1 \leqslant i \leqslant s \tag{30}$$

и удовлетворяет следующим условиям:

1′) $|\cup[\widetilde{Q}_{l-1}(x, \{T_{n_\nu}\})]| = d_{l-1}$ при $x \in \bigcup_{j=1}^{l-1} F_{n_j}^{(1)}$,

2′) $\widetilde{Q}_{i-1}(x) = b$ при $x \in \bigcup_{j=1}^{l-1} F_{n_j}^{(1)} = E_{i-1}$,

3′) если $\widetilde{T}_{k_0}(x) = 0$ на E_{l-1}, то $k_0 \overline{\in} \{n_\nu\}_{\nu=1}^{t_{i-1}}$,

4′) если $\widetilde{T}_{k_0}(x) \not\equiv 0$ на E_{i-1}, то существует число ν' такое, что $k = n_{\nu'}$, $1 \leqslant \nu' \leqslant t_{i-1}$,

5′) $\widetilde{T}_{n_\nu}(x) = 0$ при $x \overline{\in} (a, b)$.

Заметим, что при $i = 1$, $\widetilde{Q}_1(x) = \widetilde{T}_1(x)$, $F_{n_l}^{(1)} = F_1^{(1)}$ и все условия 1′) —

5′) выполнены.

Рассмотрим множество $F^{(1)}_{n_i}$. Пусть k', n_j, $k_1^{(i)}<k_2^{(i)}<\cdots<k_{r_i}^{(i)}$ и $k_1^{(j)}<k_2^{(j)}<\cdots<k_{r_j}^{(j)}$ — числа, фигурирующие в формулировке предложения 3. Пусть

$$\widetilde{T}_{n_\nu}(x)=\begin{cases}\overline{T}_{k^{(i)}_{r_j}}(x)+\overline{T}_{n_\nu}(x)+\overline{T}_{k^{(i)}_{r_j-1}}(x), & \text{при } n_\nu=k' \\ \overline{T}_{n_\nu}(x)+\widetilde{T}_{k^{(i)}_l}(x), & \text{при } n_\nu=k_l^{(i)} \\ \overline{T}_{n_\nu}(x) \text{ — в остальных случаях.} & \end{cases} \tag{31}$$

Из условий предложения 3 следует, что

$$\widetilde{T}_{n_\nu}(x)=\overline{T}_{n_\nu}(t), \text{ при } x\in F^{(1)}_{n_i}\cup F^{(1)}_{n_j},\ t\in F^{(1)}_{n_l},\ 1\leqslant\nu\leqslant m_{i-1}. \tag{32}$$

Составим новый полином

$$\widetilde{Q}_{i-1}(x)=\sum_{\nu=1}^{t_{i-1}}\widetilde{T}_{n_\nu}(x). \tag{33}$$

Из (32) следует, что полином (33) удовлетворяет условиям 1′)—5′), где система $\{\overline{T}_{n_\nu}(x)\}$ заменена системой $\{\widetilde{T}_{n_\nu}(x)\}$. Учитывая, что все частичные суммы полинома $\widetilde{T}_{n_\nu}(x)$ на $F^{(1)}_{n_i}$ принимают значения нуль или $\overline{T}_{n_\nu}(y)$, $y\in F^{(1)}_{n_j}$, то в (33) вместо $\widetilde{T}_{n_\nu}(x)$, подставляя его выражение (31), раскрывая скобки, не нарушая порядок следования и перенумеровав, получим полином

$$\widetilde{Q}_i(x)=\sum_{\nu=1}^{t_i}\widetilde{T}_{n_\nu}(x). \tag{34}$$

Из предложения 3 легко следует, что полином (34) удовлетворяет всем условиям 1′)—5′), где $i-1$ заменено на i.

Продолжая этот процесс, получим полином

$$\widetilde{Q}_s(x)=\sum_{\nu=1}^{t_s}\overline{T}_{n_\nu}(x),$$

который удовлетворяет условиям 1′)—5′), где $i-1$ заменено числом s. Рассмотрим полином

$$Q_s(x)=\sum_{\nu=1}^{t_s}T_{n_\nu}(x). \tag{35}$$

Из (22) и из условий предложения 2, используя определения чисел n', r_i, будем иметь

1'') $|\cup[Q_s(x, \{T_{n_\nu}(x)\})]| \leqslant d + \frac{\varepsilon}{2}$, при $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{s} F_{n_j}^{(1)} = E_s$,

2'') $d \leqslant Q_s(x) < d + \frac{\varepsilon}{2}$, при $x \in E_s$,

3'') $|\cup[Q_s(x, \{T_{n_\nu}(x)\})]| = 0$, при $x \bar{\in} (a, b)$,

4'') $n_\nu > N'$.

Полагая в условиях предложения 2

$$T_{n_\nu}(x) = \sum_{k=N_\nu}^{N'_\nu} b_k \bar{P}_k(x)$$

и подставляя в (35), получим

$$Q_s(x) = \sum_{\nu=1}^{t_s} \sum_{k=N_\nu}^{N'_\nu} b_k \bar{P}_k(x). \tag{36}$$

В полиноме (36), заменяя $\tilde{P}_k(x)$ на $P_k(x)$ и учитывая условия предложения 1, а также $\alpha°$), $\beta°$) и из внутренней суммы в (36) отбрасывая те слагаемые, для которых $b_k \neq \alpha_k$, получим полином

$$Q_\pi(x, \{\varphi_k\}) = \sum_{\nu=1}^{t_s} \sum_{k=N_\nu}^{N'_\nu}{}' \sum_{l=n_k}^{m_k} \alpha_k a_l \varphi_l(x)^*,$$

который удовлетворяет требованиям леммы 1, где

$$G = E_s \setminus \left(\left[\bigcup_{N'}^{\infty} \{x: |P_k(x) - \bar{P}_k(x)| \geqslant \varepsilon_k\} \right] \cup \right.$$

$$\left. \cup \left[\bigcup_{N'}^{\infty} \left\{ x: x \in [0,1], |\cup[\alpha_k P_k(x, \{\varphi_k\})]| > \frac{\varepsilon}{4} \right\} \right] \right).$$

§ 4. Доказательство теоремы

Вначале укажем такой подряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \alpha_k P_k(x, \{\varphi_l(x)\})^{**} \tag{37}$$

ряда (2), который после некоторой перестановки слагаемых принимает вид

---

* знак (′) на средней сумме означает, что k не принимает те значения, для которых $b_k \neq \alpha_k$, в этом случае $b_k = 0$ (см. (6)).

** знак (′) означает, что k не обязан принимать все целочисленные значения.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{2^n} \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \, t_n \, Q_{r,i}^{(n)}(x, \{\varphi_i\}) \tag{38}$$

и удовлетворяет условиям

I°. $\mu\{x: t_n |Q_{r,i}^{(n)}(x) - \chi(\Delta_n^r)| \geqslant \sigma_n\} < \sigma_n; \; n = 1, 2, \cdots; \; r = 1, \cdots, 2^n,$ $i = 1, 2,$

где $(\Delta_n^r)_{r=1}^{2^n}$ есть интервалы Хаара n-ого разбиения, а $\chi(\Delta_n^r)$ — характеристическая функция множества Δ_n^r.

II°. $1 > \sigma_n > 0, \; \sum_{1}^{\infty} 2^n \sigma_n < +\infty, \; t_n > 0, \; t_n \downarrow 0, \; \sum_{1}^{n} t_n = +\infty,$

III°. $\mu\{x: x \in \Delta_n^r, \; |U[t_n Q_{r,i}^{(n)}(x, \{\varphi_k\})]| \geqslant t_n + \sigma_n\} < \sigma_n,$

IV°. $\mu\{x: x \overline{\in} \Delta_n^r, \; |U[t_n Q_{r,i}^{(n)}(x, \{\varphi_k\})]| \geqslant \sigma_n\} < \sigma_n,$

V°. множество сегментов

$$\{[\underline{\operatorname{ind}}\, Q_{r,i}^{(n)}(x, \{\varphi_k\}), \; \overline{\operatorname{ind}}\, Q_{r,i}^{(n)}(x, \{\varphi_k\})]\}, \; n = 1, 2, \cdots; \; r = 1, 2, \cdots, 2^n;$$
$$i = 1, 2$$

попарно не пересекаются, то есть

$$[\underline{\operatorname{ind}}\, Q_{r_1, i_1}^{(n_1)}(x, \{\varphi_k\}), \; \overline{\operatorname{ind}}\, Q_{r_1, i_1}^{(n_1)}(x, \{\varphi_k\})] \cap$$
$$\cap [\underline{\operatorname{ind}}\, Q_{r_2, i_2}^{(n_2)}(x, \{\varphi_k\}), \; \overline{\operatorname{ind}}\, Q_{r_2, i_2}^{(n_2)}(x, \{\varphi_k\})] = \varnothing,$$

если нарушается хотя бы одно из следующих равенств: $n_1 = n_2$, $r_1 = r_2$, $i_1 = i_2$.

Предположим, что уже построены полиномы

$$\{Q_{r,i}^{(n)}(x, \{\varphi_k\}), \; n = 1, 2, \cdots, m; \; r = 1, 2, \cdots, 2^n, \; i = 1, 2.$$

Полагая $d = t_n$, $\varepsilon = \sigma_n$, $\delta = \sigma_n$, $(a, b) = \Delta_n^r$ и применяя лемму 1, построим полиномы $Q_{r,1}^{(m+1)}(x, \{\varphi_k\})$ и $Q_{r,2}^{(m+1)}(x\, \{\varphi_k\})$, которые удовлетворяют условиям а) — д), причем это можно делать так, чтобы имели место неравенства

$$\max\{\overline{\operatorname{ind}}\, Q_{r,i}^{(n)}(x, \{\varphi_k\}): n = 1, 2, \cdots, m; \; 1 \leqslant r \leqslant 2^n, \; i = 1, 2\} <$$
$$< \underline{\operatorname{ind}}\, Q_{r,1}^{(m+1)}(x, \{\varphi_k\}) < \overline{\operatorname{ind}}\, Q_{r,1}^{(m+1)}(x, \{\varphi_k\}) < \underline{\operatorname{ind}}\, Q_{r,2}^{(m+1)}(x, \{\varphi_k\}) <$$
$$< \overline{\operatorname{ind}}\, Q_{r,2}^{(m+1)}(x, \{\varphi_k\}) < \underline{\operatorname{ind}}\, Q_{r+1,1}^{(m+1)}(x, \{\varphi_k\}) < \overline{\operatorname{ind}}\, Q_{r+1,1}^{(m+1)}(x, \{\varphi_k\}) <$$
$$< \underline{\operatorname{ind}}\, Q_{r+1,2}^{(m+1)}(x, \{\varphi_k\}), \; r = 1, 2, \cdots, 2^{m+1}.$$

Продолжая этот процесс, построим подряд (38). Ряд (2) разобьем на два ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \alpha_k \sum_{l=n_k}^{m_k} a_l \varphi_l(x) + \sum_{k=1}^{\infty}{}'' \alpha_k \sum_{l=n_k}^{m_k} a_l \varphi_l(x) \tag{39}$$

так, чтобы первый ряд после некоторой перестановки совпал с рядом (38). Из условия V следует, что

$$\lim_{\substack{k\to\infty\\ n_k<l<m_k}} \alpha_k a_l \varphi_l(x) = 0 \text{ почти всюду на } [0,1].$$

Отсюда легко убедиться, что для заданной измеримой функции $g(x)$ (необязательно конечной)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2^n}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i t_n Q_{r,i}^{(n)}(x,\{\varphi_l\}) \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty}{}'' \sum_{i=n_k}^{m_k} \alpha_k a_l \varphi_l(x)$$

можно перемешать и указать порядок следования слегаемых так, чтобы полученный ряд сходился к $g(x)$. В полученном ряде вместо $Q_{r,i}^{(n)}(x,\{\varphi_l\})$, подставляя свое выражение по системе $\{\varphi_l(x)\}$ и учитывая условия III и IV, получим, что существует такая перестановка слагаемых ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=n_k}^{m_k} \alpha_k a_l \varphi_l(x),$$

при которой он сходится к $g(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Условие IV теоремы можно заменить требованием

$$i) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 P_k^2(x) = +\infty \text{ почти всюду на } [0,1] \text{ и } \int_0^1 \widetilde{P}_k(x)\,dx = 0.$$

Действительно, из условий теоремы и из (3) следует сходимость рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \left[P_k^2(x) - \widetilde{P}_k^2(x)\right] \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k [P_k(x) - \widetilde{P}_k(x)]| \text{ почти всюду на } [0,1].$$

Остается убедиться в почти всюду расходимости ряда $\sum \alpha_k \widetilde{P}_k(x)$, что можно получить из расходимости ряда $\sum \alpha_k^2 P_k^2(x)$ на подмножестве полной меры отрезка $[0,1]$. Достаточно провести доказательство так, как это сделано в работах [2] и [12] в случае, когда $\{\widetilde{P}_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ есть система Хаара.

Докажем, что по любой системе функций из класса, рассмотренного в работе Ф. Г. Арутюняна [1], существует ряд, удовлетворяющий условиям нашей теоремы.

Обозначим через r множество двоично рациональных точек отрезка $[0,1]$.

Определение 4.1. Полином

$$T(t)=\sum_{k=p+1}^{p+q} a_k \chi_k(t) \tag{40}$$

по системе Хаара назовем свободным, если $a_i a_j \chi_i(t) \chi_j(t)=0$ для всех $t\in[0,\ 1]\setminus r$, $p+1\leqslant i\neq j\leqslant p+q$.

Определение 4.2. Пусть J — произвольный интервал из [0,1]. Условимся писать $T\in J\{\chi_k\}$ (T определяется по формуле (40)), если $T(t)$ свободный полином и $a_k\chi_k(t)=0$ для всех $t\in\bar{J}$, $p+1\leqslant k\leqslant p+q$ (через $\bar{J}$ обозначено замыкание интервала J).

Пусть N — натуральное число, T определяется по формуле (40), J — произвольный интервал из [0,1], ω — положительное число, $0<\omega<1$,

$$T_1(t)=\sum_{p_1+1}^{p_1+q_1} \beta_k \chi_k(t).$$

Определение 4.3. Скажем, что $T_1\in Z_N(J,\omega)$ или соответственно $T_1\in Z(T, J, \omega)$, если выполнены условия

а) $T_1\in J(\chi_k)$,

б) $\underline{\operatorname{ind}}[T_1\{\chi_k\}]>N$ или соответственно $\underline{\operatorname{ind}}[T_1, \{\chi_k\}]>\overline{\operatorname{ind}}[T, \{\chi_k\}]$,

в) $|\overline{T_1(t)}|\leqslant 1$ для всех $t\in[0,1]$,

г) $\mu(\{t: |T_1(t)|=1\})\geqslant\omega\mu(J)$.

Пусть, далее, $0<\delta<1$ — n-натуральное число. Обозначим через $\Delta^{(1)}_{n,\delta}$ и $\Delta^{(2)}_{n,\delta}$ интервалы, центры которых совпадают соответственно с центрами интервалов

$$\Delta^{(1)}_n=\{x: \chi_n(x)>0\}^{(0)},\quad \Delta^{(2)}_n=\{x: \chi_n(x)<0\}^{(0)*}$$

и для которых, кроме того, выполняется соотношение

$$\frac{\mu(\Delta^{(1)}_{n,\delta})}{\mu(\Delta^{(1)}_n)}=\frac{\mu(\Delta^{(2)}_{n,\delta})}{\mu(\Delta^{(2)}_n)}=1-\delta.$$

Если $0<\delta<1$, то положим

$$\chi^{(\delta)}_n(t)=\chi_n(t) \text{ при } t\in\{[0,1]\setminus(\bar{\Delta}^{(1)}_n\cup\bar{\Delta}^{(2)}_n)\cup\Delta^{(1)}_{n,\delta}\cup\Delta^{(2)}_{n,\delta}$$

и интерполируем линейно и непрерывно на отрезках, лежащих вне указанного множества.

В случае $\delta=0$ положим $\chi^{(0)}_n(t)=\chi_n(t)$ для всех $t\in[0,1]$.

Пусть свободный полином T определяется по формуле (40). Положим

---

* Знак (0) означает внутренность множества.

$$T^{\delta}(t) = \sum_{k=p+1}^{p+q} a_k \chi_k^{(\delta)}(t).$$

Определение 4.4. Система измеримых функций $\{\varphi_k\}$, определенных на $[0,1]$, называется системой типа (χ), если существуют положительные числа M и ω, $0<\omega\leqslant 1$, такие, что для любых чисел $\varepsilon>0$, $0<\delta<1$ интервала $J\subset[0,1]$, натуральных чисел n и N существуют полиномы $T(t)$, $P(t)$ соответственно по системам $\{\chi_k\}$ и $\{\varphi_k\}$, число δ', $0\leqslant\delta'\leqslant\delta$, которые удовлетворяют условиям:

а) $T\in Z_n(J, \omega)$,

б) $\underline{\mathrm{ind}}\,[P, \{\varphi_k\}]>N$,

в) $|P(t)-T^{(\delta')}(t)|<\varepsilon$, $t\in[0,1]$,

г) $|\mathrm{U}[P(t, \{\varphi_k\})]|\leqslant M$, $t\in[0,1]$.

Отметим, что как было показано в работе [1] системами типа $\{\chi\}$, в частности, являются: тригонометрическая система, базисы пространства $C\,[0,1]$, система Уолша.

Справедливо следующее

Предложение 4. *Если $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$—система типа (χ), то для произвольных чисел $\varepsilon>0$, $1>\delta>0$, N и интервала (a, b) существуют множества $E^{(1)}$, и $E^{(2)}$ и полином $P(x, \{\varphi_k\})$, обладающие свойствами*

1″) $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ *являются объединениями конечного числа интервалов*

$$E^{(1)}\cap E^{(2)}=\varnothing,\; E^{(1)}\cup E^{(2)}\subset(a, b),\; \mu(E^{(l)})>(1-\delta)\,\frac{b-a}{2},\; l=1, 2,$$

2″) $|P(x, \{\varphi_k\})-(-1)^l|<\varepsilon$, *при* $x\in E^{(l)}$, $l=1, 2$,

3″) $|P(x)<\varepsilon$, *при* $x\in[0,1]\setminus[a, b]$,

4″) $|P(x)|\leqslant 1+\varepsilon$, $|\mathrm{U}[P(x, \{\varphi_k\})]|<M+3$, *при* $x\in[0,1]$,

5″) $\underline{\mathrm{ind}}\; P(x, \{\varphi_k\})\geqslant N$.

Доказательство. Согласно определению 4.4 существуют полиномы $T_1(x, \{\chi_k\})$, $T_1^{(\delta_1)}(x, \{\chi_k\})$, $P_1(x, \{\varphi_k\})$, удовлетворяющие всем условиям а)—г), где ε и δ соответственно заменены на $\frac{\varepsilon}{2}$ и $\frac{\delta}{2\cdot 12}$.

Пусть уже определены полиномы

$$\{T_i(x, \{\chi_k\}),\; T_i^{(\delta_i)}(x, \{\chi_k\}),\; P_i(x, \{\varphi_k\})\}_{i=1}^{m},$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\text{I}')\; T_i(x)=0,\ \text{при}\ x\in\left\{x;\, x\in(a, b),\, \left|\sum_{j=1}^{i-1}T_j(x)\right|\neq 1\right\}\cup\bigcup_{j=1}^{i-1}\{x\colon T_j(x)\neq$$

$$\neq T_j^{(\delta_j)}(x)\},$$

$$\text{II}')\quad \left|\sum_{i=1}^{m} T_i(x)\right| \leqslant 1, \left|\sum_{i=1}^{m} T_i^{(\delta_l)}(x)\right| \leqslant 1, \text{ при } x\in(a, b),$$

$$\text{III}')\quad \left|\sum_{i=1}^{m} T_i(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{m} T^{(\delta_l)}(x)=0 \text{ при } x\overline{\in}(a, b),$$

IV′) полиномы $T_i(x, \{\chi_k\})$, $T_i^{(\delta_l)}(x, \{\chi_k^{(\delta)}\})$, $P_i(x, \{\varphi_k\})$ удовлетворяют условиям а) — г) определения 4.4, где ε, δ заменены числами $\frac{\varepsilon}{2^{l+1}}$, $\frac{\delta}{12\cdot 2^{l+1}}$, а вместо J взято открытое множество G_{l-1}, являющееся объединением конечного числа интервалов и удовлетворяющее условиям

$$G_{l-1}\subset(a, b)\diagdown\left(\left\{x: \left|\sum_{j=1}^{l-1} T_j(x)\right| = 1\right\}\cup\bigcup_{j=1}^{l-1}\{x: T_j(x)\neq T_j^{(\delta_j)}(x)\}\right)=E_{l-1},$$

$$\mu(G_{l-1})=\mu(E_{l-1}),\ \mu(G_{l-1})\leqslant(b-a)\left(1-\frac{\omega}{2}\right)^{l-1}$$

и на каждом составляющем интервале множества G_{l-1}, полином $\sum_{j=1}^{l-1} T_j(x)$ принимает постоянное значение.

Заметим, что в случае $m=1$ условия I′—IV′ выполнены. Через G_m обозначим открытое множество, состоящее из объединения конечного числа интервалов, удовлетворяющее условиям

$$G_m\subset(a, b)\diagdown\left(\left\{x: \left|\sum_{j=1}^{m} T_j(x)\right| = 1\right\}\cup\bigcup_{i=1}^{m}\{x: T_j(x)\neq T_j^{(\delta_j)}(x)\}\right)=E_m,$$

$$\mu(G_m)=\mu(E_m),\ \mu(G_m)\leqslant(b-a)\left(1-\frac{\omega}{2}\right)^{m},$$

и на каждом составляющем интервале которого функция принимает постоянное значение. Пусть $\{\lambda_i^m\}_{i=1}^{s_m}$ — последовательность составляющих интервалов множества G_m. Согласно определению 4.4, для интервалов λ_i^m, $i=1, 2,\cdots, s_m$ можно определить полиномы

$$T_{m,i}(x, \{\chi_k\}),\ T_{m,i}^{(\delta_l)}(x, \{\chi_k\}),\ P_{m,i}(x, \{\chi_k\}),$$

которые удовлетворяют всем условиям а)—г), где ε, δ, J соответственно заменены через

$$\frac{\varepsilon}{s_m\cdot 2^{m+2}},\ \frac{\delta}{12\cdot 2^{m+2}},\ J=\lambda_i^m, \text{ а числа } n \text{ и } N$$

выбраны так, чтобы имели место условия:

$$\overline{\text{ind}}\ T_m(x, \{\chi_k\}) < \underline{\text{ind}}\ T_{m,i}(x, \{\chi_k\}) < \overline{\text{ind}}\ T_{m,i}(x, \{\chi_k\}) <$$
$$< \underline{\text{ind}}\ T_{m,\,i+1}(x, \{\chi_k\}),$$
$$\overline{\text{ind}}\ P_m(x, \{\varphi_k\}) < \underline{\text{ind}}\ P_{m,i}(x, \{\varphi_k\}) <$$
$$< \overline{\text{ind}}\ P_{m,i}\ (x, \{\varphi_k\}) < \underline{\text{ind}}_{\varphi_k}\ P_{m,i+1}(x, \{\varphi_k\}),$$
$$i = 1,\ 2, \cdots, s_m - 1.$$

В каждом интервале λ_i^m выберем произвольную точку x_i и рассмотрим полиномы

$$T_{m+1}(x) = \sum_{i=1}^{s_k}\left[1 - \left|\sum_{j=1}^{m} T_j\ (x_i)\right|\right] T_{m,i}(x),$$
$$T_{m+1}^{(\delta_m+1)}(x) = \sum_{i=1}^{s_m}\left(1 - \left|\sum_{j=1}^{m} T_j\ (x_i)\right|\right) T_{m,i}^{(\delta_m+1)}(x), \tag{43}$$
$$P_{m+1}(x) = \sum_{i=1}^{s_m}\left(1 - \left|\sum_{j=1}^{m} T_j\ (x_i)\right|\right) P_{m,i}(x).$$

Так как $T_{m,i}(x)$ есть свободный полином Хаара на $\lambda_i^{(m)}$, то из условия г) определения 4.3 имеем

$$\mu\{x\colon\ T_{m,i}(x) = 1\} \geqslant \mu(\lambda_i^m)\frac{\omega}{2},\quad \mu\{x\colon\ T_{m,i}(x) = -1\} \geqslant \mu(\lambda_i^{(m)})\frac{\omega}{2}\cdot$$

Отсюда и из определения полинома $T_{m+1}(x)$ легко убедиться в справедливости условия

$$\mu\left\{x\colon \left|\sum_{i=1}^{m+1} T_i(x)\right| = 1,\ x \in G_m\right\} \geqslant \mu(G_m)\frac{\omega}{2},$$

откуда

$$\mu\left\{x\colon \left|\sum_{i=1}^{m+1} T_i(x)\right| \neq 1,\ x \in G_m\right\} \leqslant \mu(G_m)\left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \leqslant (b-a)\left(1 - \frac{\omega}{2}\right)^{m+1}.$$

Так как множества

$$\left\{x\colon \left|\sum_{i=1}^{m+1} T_i(x)\right| = 1\right\} \text{ и } \sum_{j=1}^{m+1}\{x\colon\ T_j\ (x) \neq T_j^{(\delta_j)}(x)\}$$

представлены в виде объединения конечного числа отрезков (открытых, полуоткрытых, замкнутых), то отсюда следует существование открытого множества G_{m+1}, состоящего из конечного числа интервалов, так что

$$G_{m+1} \subset (a, b) \setminus \left(\left\{x\colon \left|\sum_{i=1}^{m+1} T_i\ (x)\right| = 1\right\} \cup \bigcup_{i=1}^{m+1}\{x\colon\ T_j\ (x) \neq T_j^{(\delta_j)}(x)\}\right) = E_m,$$

$$\mu(G_{m+1})=\mu(E_m),\ \mu(G_{m+1})\leqslant(b-a)\left(1-\frac{\omega}{2}\right)^{m+1},$$

и на каждом составляющем интервале множества G_{m+1} функция $\sum_{j=1}^{m+1} T_j(x)$ принимает постоянное значение. Условия (I′—IV′) проверяются непосредственно.

Выберем число m настолько большим, чтобы

$$(b-a)\left(1-\frac{\omega}{2}\right)^m<(b-a)\frac{\delta}{24}.$$

Из (42)

$$\left\{x:\left|\sum_{j=1}^{m}T_j(x)\right|=1\right\}\supset[(a,\ b)\setminus E_m]\setminus\bigcup_{j=1}^{m}\{x:\ T_j(x)\neq T_j^{(\delta_j)}(x)\}.$$

Учитывая, что $T_j(x)$ — свободный полином на $(a,\ b)$ и $\delta_j=\dfrac{\delta}{12\cdot 2^{j+1}}$, будем иметь

$$\mu\,\{x:\ T_j(x)\neq T_j^{(\delta_j)}(x)\}\leqslant\frac{\delta(b-a)}{12\cdot 2^{j+1}}.$$

Стало быть

$$\mu\left\{x:\left|\sum_{j=1}^{m}T_j(x)\right|=1\right\}\geqslant(b-a)\left(1-\frac{\delta}{24}\right)-\frac{\delta(b-a)}{12}=(b-a)\left(1-\frac{\delta}{8}\right).\tag{44}$$

Ясно, что имеет место хотя бы одно из следующих неравенств:

$$\mu\left\{x:\sum_{j=1}^{m}T_j(x)=1\right\}\geqslant\frac{b-a}{2}\left(1-\frac{\delta}{8}\right),\ \mu\left\{x:\sum_{j=1}^{m}T_j(x)=-1\right\}\geqslant$$
$$\geqslant\frac{b-a}{2}\left(1-\frac{\delta}{8}\right).\tag{45}$$

Пусть имеет место первое из них.

Множества, стоящие под знаками μ в (45), обозначим соответственно через E_1 и E_2. Так как $T_j(x)$ — свободный полином Хаара на $(a,\ b)$, то

$$\int_a^b\sum_{j=1}^{m}T_j(x)\,dx=0,\ \int_a^b\sum_{j=1}^{m}T_j(x)\,dx=\int_{E_1}\sum_{j=1}^{m}T_j(x)\,dx+\int_{E_2}\sum_{j=1}^{m}T_j(x)\,dx+$$
$$+\int_{(a,\ b)\setminus(E_1\cup E_2)}\sum_{1}^{m}T_j(x)\,dx=0,\ \mu(E_1)-\mu(E_2)-$$
$$-\mu\left[(a,\ b)\setminus\left\{x:\left|\sum_{j=1}^{m}T_j(x)\right|=1\right\}\right]\leqslant 0.$$

Отсюда и из (44), (45) имеем

$$\mu(E_2) \geqslant \frac{b-a}{2}\left(1-\frac{\delta}{8}\right)-(b-a)\frac{\delta}{8}=\frac{b-a}{2}\left(1-\frac{3\delta}{8}\right). \qquad (46)$$

Так как при $l=1$ или 2

$$\left\{x: \sum_{j=1}^{m} T_j^{(\delta_j)}(x)=(-1)^{l+1}\right\} \supset \left\{x: \sum_{j=1}^{m} T_j(x)=(-1)^{l+1}\right\} \setminus \bigcup_{i=1}^{m}\{x: T_j(x) \neq$$

$$\neq T_j^{(\delta_j)}(x)\},$$

то учитывая (45) и (46), получим

$$\mu\left\{x: \sum_{j=1}^{m} T_j^{(\delta_j)}(x)=(-1)^{l+1}\right\} \geqslant \frac{b-a}{2}\left(1-\frac{3\delta}{8}\right)-\frac{b-a}{12} \geqslant \frac{b-a}{2}\left(1-\frac{\delta}{2}\right).$$

Внутренность множества $\left\{x: \sum\limits_{1}^{m} T_j^{(\delta_j)}(x)=(-1)^{l+1}\right\}$ обозначим через $E^{(l)}$.

Учитывая, что $|T_j^{(\delta_j)}(x)-P_j(x)|<\frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$ при $x \in [0,1]$, легко убедиться, что условия 1''), 2''), 3''), 5'') выполнены. Остается проверить вторую часть условия 4''), так как первая часть очевидна.

Поскольку

$$P(x, \{\varphi_k\})=\sum_{i=1}^{m} P_i(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_i}\left(1-\left|\sum_{k=1}^{i} T_k(x_j)\right|\right)P_{i,j}(x),$$

то для произвольного $x \in [0,1]$ имеем

$$|U[P(x, \{\varphi_k\})]| \leqslant \sup_{1 \leqslant l \leqslant m}\left|\sum_{i=1}^{l} P_i(x)\right|+\sup_{1 \leqslant l \leqslant m}\left|\sum_{j=1}^{s_l}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\left|\sum_{k=1}^{l} T_k(x_j)\right|\right)|P_{l,j}(x)|\right|+\sup_{1 \leqslant l \leqslant m}\ \sup_{1 \leqslant j \leqslant s_l}\times$$

$$\times\left|1-\left|\sum_{k=1}^{l} T_k(x_j)\right|\right|\cdot\|U[P_{l,j}(x)]\|<(1+\varepsilon)+(1+\varepsilon)+M \leqslant M+3$$

и предложение 4 доказано.

Убедимся, что по системе $\{\varphi_k(x)\}$ типа (χ) существует π-универсальный ряд. Пусть последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\delta_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k<1,\ \sum_{k=1}^{\infty}\delta_k<1,\ \varepsilon_k \downarrow 0,\ \delta_k \downarrow 0. \qquad (46')$$

Предположим, что построены полиномы $\{P_n^i(x),\ n=1,\cdots,m;\ i=1,\cdots,\sigma_n\}$, которые удовлетворяют условиям предложения 4, где

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_n}{\sigma_n},\ \delta = \delta_n,\ (a,\ b) = (a_n^{(i)},\ b_n^{(i)}),\ [(a_1^{(1)},\ b_1^{(1)}) = (0,1),\ \sigma_1 = 1],$$

а число N выбрано так, чтобы

$$\overline{\text{ind}}\ P_{j_1}^{(i_1)}(x) \leqslant \underline{\text{ind}}\ P_{j_2}^{(i_2)}(x) \quad \text{при } j_2 > j_1, \text{ а в случае,}$$

$$\text{когда } j_2 = j_1,\ i_2 > i_1.$$

При этом имеют место следующие дополнительные условия:

i) $\bigcup\limits_{i=1}^{\sigma_j} [a_j^{(i)},\ b_j^{(i)}] = [0,1],\ (a_j^{(i)},\ b_j^{(i)}) \cap (a_j^{(k)},\ b_j^{(k)}) = \varnothing$, при $i \neq k,\ j = 1, \cdots, m$,

ii) для любых чисел $j_1,\ j_2,\ i_1,\ i_2,\ 1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant m_1;\ \ 1 \leqslant i_1 \leqslant \sigma_{i-1}\ 1 \leqslant$ $\leqslant i_2 \leqslant \sigma_{i_2}$ имеет место одно из следующих соотношений:

$$\text{либо } (a_{j_2}^{(i_2)},\ b_{j_2}^{(i_2)}) \subset E_{j_1,\ i_1}^{(l)},\ \text{ либо } (a_{j_2}^{(i_2)},\ b_{j_2}^{(i_2)}) \cap E_{j_1,\ i_1}^{(l)} = \varnothing,$$

где через $E_{j,\ i}^{(l)}$ $l = 1$ или 2 обозначено множество E^l, соответствующее полиному $P_j^{(i)}(x)$ в предложении 4,

iii) $\mu\,(a_j^{(i)},\ b_j^{(i)}) \leqslant \dfrac{1}{2^{j-1}},\ 1 \leqslant j \leqslant m.$

Учитывая, что множества $E_{j,\ i}^{(l)}$ имеют конечное число составляющих интервалов, легко убедиться, что существует последовательность интервалов $\{(a_{m+1}^{(i)},\ b_{m+1}^{(i)}),\ i = 1,\ 2, \cdots, \sigma_{m+1}\}$, удовлетворяющая всем трем предыдущим условиям, где число m заменено на $m+1$.

Полагая

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{m+1}}{\sigma_{m+1}},\ \delta = \delta_{m+1},\ (a,\ b) = (a_{m+1}^{(i)},\ b_{m+1}^{(i)}),\ i = 1,\ 2, \cdots, \sigma_{m+1},$$

согласно предложению 4 последовательно определим полиномы

$$P_{m+1}^{(1)}(x,\ \{\varphi_k\}),\ P_{m+1}^{(2)}(x,\ \{\varphi_k\}),\ \cdots,\ P_{m+1}^{\sigma_{m+1}}(x,\ \{\varphi_k\}),$$

так, чтобы имело место условие

$$\overline{\text{ind}}\ P_m^{(\sigma_m)}(x,\ \{\varphi_k\}) < \underline{\text{ind}}\ P_{m+1}^{(i)}(x,\ \{\varphi_k\}) < \overline{\text{ind}}\ P_{m+1}^{(i)}(x,\ \{\varphi_k\}) <$$
$$< \underline{\text{ind}}\ P_{m+1}^{(i+1)}(x,\ \{\varphi_k\}) \text{ при любом } i,\ i = 1,\ 2, \cdots, \sigma_{m+1} - 1.$$

Предположим, что уже построена последовательность

$$\{P_n^{(i)}(x,\ \{\varphi_k\}),\ i = 1,\ 2, \cdots, \sigma_n\}_{n=1}^{\infty}. \tag{47}$$

Имеем

$$1 - \varepsilon < \left| \sum_{i=1}^{\sigma_n} P_n^i(x) \right| < 1 + \varepsilon \text{ на } E_n = \bigcup_{i=1}^{\sigma_n} (E_{n,\ i}^{(1)} \cup E_{n,\ i}^{(2)}) \text{ и } \mu\,(E_n) > 1 - \delta_n. \tag{48}$$

Пусть последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 = +\infty$,
тогда из (48) следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu_n} \alpha_n^2 \left[P_n^i (x, \{\varphi_k\})\right]^2 = +\infty \text{ почти всюду на } [0,1]. \tag{49}$$

Легко убедиться, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\nu_n} \alpha_n P_n^i (x, \{\varphi_n\}) \tag{50}$$

удовлетворяет условиям I — V теоремы. Подставляя в (50) вместо $P_n^i (x, \{\varphi_k\})$ его выражение из (49), согласно замечанию будем иметь, что полученный ряд π-универсален.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 13.II.1977

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ. Տեղափոխությունների նկատմամբ շարքերի ունիվերսալության մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում բերվում է ֆունկցիոնալ հաջորդականությունների մի դաս (C[0,1]-ի բոլոր բազիսները պարունակող), որոնցով գոյություն ունեն տեղափոխությունների նկատմամբ ունիվերսալ շարքեր։

G. M. MOUSHEHGIAN. *On the series, universal with respect to transpositions*
(summary)

The paper describes a class of functional sequences, which includes all basae from C (0,1] and in which serias universal with respect to transpositions existe.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Г. Арутюнян.* Представление измеримых функций почти всюду сходящимися рядами, Мат. сборник, 90 (132), 4, 1973, 483—500.
2. *Ф. Г. Арутюнян.* О рядах по системе Хаара, ДАН Арм.ССР, 42, № 3, 1966, 134—140.
3. *Ф. Г. Арутюнян.* Система представления, ДАН Арм.ССР, VII, № 2, 1973, 65—71.
4. *А. М. Олевский.* О некоторых особенностях рядов Фурье в пространстве L_p ($p < 2$), Мат. сборник, 77 (119): 2, 1968, 251—259.
5. *А. А. Талалян* и *Ф. Г. Арутюнян.* О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$, Мат. сборник, 66 (108), 1965, 240—247.
6. *Н. Б. Погосян.* Представление измеримых функций ортогональными рядами, Мат. сборник, 98 (140), № 1 (9), 1975, 102—112.
7. *П. Л. Ульянов.* О безусловной сходимости и суммируемости, Изв. АН СССР, серия матем., 22, 1958, 811—840.

8. *Р. Кук*. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., Физматгиз, 1960, 453.
9. *Р. И. Осипов, А. А. Талалян*. О сходимости ортогональных рядов к $+\infty$, Матем. заметки, 2, № 5, 1967, 483—494.
10. *Р. И. Овсепян*. О представлении функций ортогональными рядами, ДАН Арм. ССР, VII, № 1, 1973, 3—8.
11. *М. Б. Петровская*. О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 1964, 773—798.
12. *R. F. Gundy*. Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, Trans. Amer. Soc., 124, № 2, 1966, 128—248.
13. *А. А. Талалян*. Представление измеримых функций рядами, УМН, XV, вып. 5, 1960, 77—141.
14. *П. Л. Ульянов*. О безусловной сходимости и суммируемости, Изв. АН СССР, сер. матем., 22, № 6, 1958, 811—840.