ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 4, 1977 Математика

Г. М. АЙРАПЕТЯН

КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И БАЗИСНОСТЬ НЕКОТОРЫХ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ В КЛАССАХ H_p ХАРДИ

В работах М. М. Джрбашяна, посвященных вопросам представления ядра Коши и решению интерполяционных задач в классе H_2 Харди ([1], [2]), были построены биортогональные системы, порожденные произвольной последовательностью комплексных чисел $\{\alpha_j\}_1^\infty$, подчиненной условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} (1-|\alpha_j|^2) < \infty. \tag{1}$$

С системой рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, где

$$r_k(z) = \frac{(s_k-1)!\, z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}} \quad (k=1,\ 2,\cdots) \tag{2}$$

и $s_k \geqslant 1$ кратность появления числа α_k в совокупности $\{\alpha_j\}_1^k$, при условии (1) ассоциируется система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ аналитических и ограниченных в круге $|z|<1$ функций, биортогональная с нею на единичной окружности.

Путем определенной модификации системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ в работе [2] была построена другая система $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, также биортогональная с системой $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$. При помощи этой новой системы М. М. Джрбашяну удалось установить результаты о существовании и явном представлении посредством системы $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ решений интерполяционной задачи вида

$$f(z)\in H_2,\ f^{(s_j-1)}(\alpha_j)=w_j\ (j=1,\ 2,\cdots) \tag{3}$$

для узлов α_j ограниченной кратности $s=\sup s_k<\infty$ и при соблюдении условия обобщенной отделимости

$$\inf_{k\geqslant 1} \prod_{\alpha_j\neq\alpha_k} \left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right| = \delta > 0. \tag{4}$$

Каждая из биортогональных систем $\{r_k(z)\}$ и $\{\Omega_k(z)\}$ не замкнута в метрике пространств Харди H_p $(1\leqslant p<\infty)$. В связи с этим М. М. Джрбашяном в работе [2] был поставлен вопрос об исследовании базисности этих систем в подпространстве $\lambda_p\{\alpha_k\}\subset H_p$ $(1<p<\infty)$ их замкнутой линейной оболочки.

В работе автора [3] была установлена базисность этих систем в подпространствах $\lambda_p\{\alpha_k\}$ $(1<p<\infty)$ в том частном случае, когда все числа последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$ отличны друг от друга и удовлетворяют условию (4) отделимости Л. Карлесона [4]. В другой работе автора [5] доказывается, что условие (4) вместе с условием

$$\sup_{k\geq 1} s_k = s < \infty \tag{5}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ образовали безусловный базис в $\lambda_2\{\alpha_k\}$. Там же было доказано, что решение интерполяционной задачи (3) можно представить посредством системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ в виде

$$f(z) = \sum_1^\infty w_j\,\Omega_j(z). \tag{6}$$

Отметим, что базисность систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ в $\lambda_2\{\alpha_k\}$ при $s_k=1$ $(k=1, 2,\cdots)$ была установлена раньше в работах [6] и [7]. В связи с этим отметим также работы [8] и [9].

В настоящей статье исследуются вопросы базисности систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ в подпространствах $\lambda_p\{\alpha_k\}$, а также интерполяционная задача в пространствах H_p $(0<p<\infty)$.

Метод исследования этих задач аналогичен методу, который применял автор в работе [3]. Мы существенно опираемся на результаты и оценки статей М. М. Джрбашяна [1] и [2] в классе H_2, а также на одну оценку Ф. А. Шамояна [10] в классе H_p $(0<p<\infty)$.

В § 1 статьи даются формулировки ряда лемм и теорем, на которые мы существенно опираемся в дальнейшем. Здесь приводятся также определения функций $\Omega_k(z)$ $(k=1, 2,\cdots)$ и $\Omega_k^{(n)}(z)$ $(k=1, 2,\cdots)$, $(n=1, 2,\cdots)$, которые необходимы, когда мы рассматриваем интерполяцию в классе H_p $(0<p\leqslant 1)$.

В § 2 исследуется интерполяционная задача

$$f(z)\in H_p,\ f^{(s_j-1)}(\alpha_j) = w_j\ (j=1, 2,\cdots) \tag{7}$$

при $0<p<\infty$. В теореме 1 доказывается, что если последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям (4) и (5) (коротко это будем обозначать $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_s$), то для любой последовательности $\{w_j\}_1^\infty$, удовлетворяющей условию

$$\sum_{j=1}^\infty |w_j|^p\,(1-|\alpha_j|^2)^{p(s_j-1)+1} < \infty, \tag{8}$$

функция

$$f(z) = \sum_1^\infty w_j\,\Omega_j(z) \tag{9}$$

при $1<p<\infty$ принадлежит классу H_p и является решением интерполяционной задачи (7). В теореме 2 этого параграфа доказывается, что если $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_s$, то функция

$$f(z)=\sum_1^\infty w_j\, \Omega_j^{(n)}(z)$$

при $2/(n+1)\leqslant p\leqslant 1$ принадлежит классу H_p и является решением интерполяционной задачи (7).

Отметим, что если $\sup\{s_k\}=s<\infty$, то условие $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_s$ также необходимо для того, чтобы интерполяционная задача (7) имела решение для произвольной последовательности $\{w_k\}_1^\infty$, удовлетворяющей условию (8). Указанная необходимость условия $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_s$ в случае $s_k=1$ $(k=1, 2,\cdots)$ установлена в работах [11], [12], и общий случай может быть легко получен на основании этих результатов цитированных работ.

В § 3 доказывается, что условие $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_s$ необходимо и достаточно для того, чтобы системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ образовали базис в подпространствах $\lambda_p\{\alpha_k\}$ $(1<p<\infty)$.

§ 1. Предварительные сведения и леммы

1. 1. (а). Пусть $\{\alpha_j\}_1^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_j|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, среди которых могут быть и числа произвольной кратности.

Обозначим через $s_k\geqslant 1$ и $p_k(n)$ кратность появления числа α_k соответственно на отрезках $\{\alpha_j\}_1^\infty$ и $\{\alpha_j\}_1^n$. Впредь будем предполагать, что наша последовательность удовлетворяет условию Бляшке

$$\sum_1^\infty(1-|\alpha_k|^2)<+\infty. \tag{1.1}$$

Из этого условия очевидно следует, что при любом целом k $(1<k<\infty)$ $s_k\leqslant p_k=p_k(\infty)<\infty$.

В этом предположении нашу последовательность $\{\alpha_j\}_1^\infty$ отнесем к классу Δ_s, если

$$\sup s_k=s<+\infty \tag{1.2}$$

и при некотором δ $(0<\delta<1)$ соблюдается условие Л. Карлесона

$$\inf_{k>1}\prod_{\alpha_j\neq\alpha_k}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|=\delta. \tag{1.3}$$

(б). С последовательностью $\{\alpha_j\}_1^\infty$ ассоциируем ее функцию Бляшке

$$B(z)=\prod_{j=1}^\infty\frac{\alpha_j-z}{1-\bar{\alpha}_jz}\,\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}, \tag{1.4}$$

а также функции

$$B_n(z)=\prod_{j=1}^n\frac{\alpha_j-z}{1-\bar{\alpha}_j z}\,\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}\quad(n=1, 2,\cdots).$$

Следуя работе [1], введем в рассмотрение системы функций

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\ z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad (k=1,2,\cdots), \tag{1.5}$$

$$\Omega_k(z)=\frac{B(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)^{p_k-s_k+1-\nu}}\quad (k=1,2,\cdots), \tag{1.6}$$

а также

$$\Omega_{n,k}(z)=\frac{B_n(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k(n)-s_k}\frac{a_{n,\nu}(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)^{p_k(n)-s_k+1-\nu}}\quad (k=1,2,\cdots,n), \tag{1.7}$$

где

$$a_\nu(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{\frac{(z-\alpha_k)^{p_k}}{B(z)}\right\}_{z=\alpha_k}\quad (\nu=0,1,2,\cdots), \tag{1.8}$$

$$a_{n,\nu}(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{\frac{(z-\alpha_k)^{p_k(n)}}{B_n(z)}\right\}_{z=\alpha_k}\quad (\nu=0,1,2,\cdots). \tag{1.9}$$

Нам необходимо рассматривать также систему функций

$$\Omega_k^{(n)}(z)=\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\bar{\alpha}_k z}\right)^n\ \Omega_k(z)\ (n=1,2,\cdots),\ (k=1,2,\cdots). \tag{1.10}$$

Отметим, что при $n=0$ $\Omega_k^{(0)}(z)=\Omega_k(z)$, $(k=1,2,\cdots)$.

1.2. (а). Доказательства следующих лемм не отличаются от доказательств лемм 1.2, 1.3, 1.6 работы [2].

Лемма А. *Системы функций* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *и* $\{\Omega_k^n(z)\}_1^\infty$ *биортогональны на окружности* $|t|=1$ *в смысле*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1} r_0(t)\ \overline{\Omega_k^{(n)}}(t)\ |dt|=\delta_{k,\nu},\ (n=0,1,\cdots). \tag{1.11}$$

Лемма Б. *Пусть* $\{w_k\}_1^m$ $(1\leqslant m<\infty)$ — *произвольная последовательность комплексных чисел. Тогда регулярная и ограниченная в круге* $|z|<1$ *функция*

$$S_m(z)=\sum_{k=1}^m w_k\ \Omega_k^{(n)}(z)$$

удовлетворяет следующим интерполяционным условиям:

$$S_m^{(s_\nu-1)}(\alpha_\nu)=w_\nu\ \ (1\leqslant\nu\leqslant m),\ (n=0,1,2,\cdots).$$

Лемма В. *Если* $\{\alpha_j\}_1^\infty\in\Delta_s$, *то для коэффициентов* (1.8) *справедливы неравенства*

$$|a_\nu(\alpha_k)|\leqslant a(\delta,s)(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu},$$

где $a(\delta,s)$ — *некоторая постоянная, не зависящая от* k.

Следующая лемма доказана в работе [1] .

Лемма Г. *Для произвольных значений переменных z и ζ и для любого n $(1 \leqslant n < \infty)$ справедливо тождество*

$$\frac{1}{1-\bar{\zeta} z}=\sum_{k=1}^{n} \Omega_{n,k}(z)\, \overline{r_k(\zeta)}+\frac{\overline{B_n(\zeta)}\, B_n(z)}{1-\bar{\zeta} z}. \tag{1.12}$$

Приведем теперь неравенство из работы [10] в его эквивалентной формулировке.

Теорема А. *Для любой функции $f(z) \in H_p$ $(0 < p < \infty)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|^p (1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1} \leqslant C \|f\|_p^p, \tag{1.13}$$

где C не зависит от f и $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_s$.

(б). Обозначим через $H_p(D^{(+)})$ класс голоморфных в $D^{(+)}=\{z;\ |z|<1\}$ функций, принадлежащих известному классу H_p Харди, а через $H_p(D^{(-)})$ — класс голоморфных в $D^{(-)}=\{z;\ |z|>1\}$ функций, представимых в виде

$$F(z)=\tilde{F}\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in D^{(-)},$$

где $\tilde{F}(z) \in H_p(D^{(+)})$.

Для каждой функции $f(z) \in H_p(D^{(+)})(1 \leqslant p < \infty)$ рассмотрим последовательность функций

$$R_n(f;\ z)=\frac{B_n(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z}, \quad z \in D^{(+)}, \tag{1.14}$$

а также функцию

$$R(f;\ z)=\frac{B(z)}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{B(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-z}, \quad z \in D^{(+)}. \tag{1.15}$$

Справедлива следующая (см. [3])

Лемма Д. *Пусть $f(z) \in H_p(D^{(+)})$ $(1 < p < \infty)$ — произвольная функция. Тогда*

1° $R_n(f;\ z) \in H_p(D^{(+)})$, $(n=1, 2, \cdots)$, $R(f;\ z) \in H_p(D^{(+)})$,

2° $\lim\limits_{n \to \infty} \|R_n(f;\ z)-R(f;\ z)\|_p=0$.

(в). Введем в рассмотрение следующий класс функций (см. [13], [14]).

Обозначим через $\lambda_p\{\alpha_k\}$ класс функций, определенных вне точек окружности $|z|=1$ и удовлетворяющих условиям

1. $f(z) \in H_p(D^{(+)})$, $z \in D^{(+)}$,

2. $f(z) = B(z)\tilde{f}(z)$, $\tilde{f}(\infty) = 0$, $\tilde{f}(z) \in H_p(D^{(-)})$, $z \in D^{(-)}$.

3. Угловые граничные значения функций $f(z)$ изнутри и извне окружности $|z| = 1$ почти всюду совпадают.

Следующие леммы доказаны в работах [14] и [3].

Лемма E. *Для того чтобы функция $f(z) \in H_p(D^{(+)})(1 < p < \infty)$ принадлежала классу $\lambda_p\{\alpha_k\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)}{B(t)} \frac{dt}{t-z} \equiv 0, \quad z \in D^{(+)}.$$

Лемма K. *Любая функция $f(z) \in H_p(D^{(+)})$ $(1 < p < \infty)$ представима в виде*

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где

$$f_1(z) \in \lambda_p\{\alpha_k\}, \quad f_2(z) = B(z) f_2^*(z),$$

$$f_2^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{f(t)}{B(t)} \frac{dt}{t-z} \in H_p(D^{(+)}).$$

§ 2. Интерполяция с кратными узлами в классах H_p $(0 < p < \infty)$

2.1. (a). Пусть $\{w_k\}_1^\infty$ — некоторая последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_1^\infty |w_k|^p (1 - |\alpha_k|^2)^{p(s_k - 1) + 1} < \infty. \tag{2.1}$$

Если $1 < p < \infty$, то справедлива следующая

Теорема 1. *Если $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_s$, то функция*

$$f(z) = \sum_1^\infty w_k \Omega_k(z) \tag{2.2}$$

принадлежит классу $H_p(D^{(+)})$ и для нее выполняются интерполяционные условия

$$f^{(s_k - 1)}(\alpha_k) = w_k \quad (k = 1, 2, \cdots). \tag{2.3}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$S_n(z) = \sum_1^n w_k \Omega_k(z). \tag{2.4}$$

Пользуясь теоремой Хана-Банаха, можем утверждать, что

$$\|S_m(z)-S_n(z)\|_p=\sup_{\substack{g\in L_q\\ \|g\|\leq 1}}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=1}\left[\overline{S_m(t)}-\overline{S_n(t)}\right]g(t)\,|dt|\right|,\tag{2.5}$$

где $q=p/(p-1)$. Но по (2.4) имеем

$$\|S_m-S_n\|_p=\sup_{\substack{g\in L_q\\ \|g\|\leq 1}}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}g(\zeta)\sum_{n+1}^{m}\overline{w_k}\,\overline{\Omega_k(\zeta)}|d\zeta|\right|=$$

$$=\sup\left|\sum_{k=n+1}^{m}\overline{w_k}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}g(\zeta)\overline{\Omega_k(\zeta)}\,|d\zeta|\right|=$$

$$=\sup\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{\overline{w_k}}{(s_k-1)}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{\overline{a_\nu(\alpha_k)}}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{g(\zeta)}{B(\zeta)}\frac{|d\zeta|}{(\overline{\zeta}-\overline{\alpha_k})^{p_k-s_k+1-\nu}}\right|=$$

$$=\sup\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{w_k}{(s_k-\nu)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{\overline{a_\nu(\alpha_k)}}{(p_k-s_k-\nu)!}\,g_*^{(p_k-s_k-\nu)}(\overline{\alpha_k})\right|,$$

где

$$g_*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^{-1}g(1/\zeta)}{B(1/\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z}\in H_q\,D^{(+)}).\tag{2.6}$$

Учитывая теперь лемму B и теорему Рисса [15], будем иметь

$$|S_n-S_m|\leqslant a(\delta,s)\sup_{\substack{g_*\in H_q\\ \|g_*\|<A_q}}\left|\sum_{k=n+1}^{m}\overline{w}_k\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu}\frac{1}{(p_k-s_k-\nu)!}\times\right.$$

$$\left.\times\, g_*^{(p_k-s_k-\nu)}(\overline{\alpha}_k)\right|\leqslant a(\delta,s)\sup\sum_{k=n+1}^{m}|\overline{w}_k|(1-|\alpha_k|^2)^{s_k-1+1/p}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\times$$

$$\times(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-s_k-\nu+1/q}\,|g_*^{(p_k-s_k-\nu)}(\alpha_k)|\leqslant a(\delta,s)\left\{\sum_{k=n+1}^{m}\times\right.$$

$$\left.\times|\overline{w}_k|^p(1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1}\right\}^{1/p}\sup\left\{\sum_{k=n+1}^{m}\left|\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-s_k-\nu+1/q}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,\|g_*^{(p_k-s_k-\nu)}(\overline{\alpha}_k)|\right|^q\right\}^{1/q}.$$

Но замечая, что

$$\left|\sum_{k=0}^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu-s_k+1/q}|g_*^{(p_k-s_k-\nu)}(\overline{\alpha}_k)\right|^q\leqslant s^{q/p}\sum_{k=0}^{p_k-s_k}\times$$

$$\times(1-|\alpha_k|^2)^{q(p_k-s_k-\nu)+1}|g_*^{(p_k-s_k-\nu)}(\overline{\alpha}_k)|^q\leqslant$$

$$\leqslant s^{q/p}\sum_{\nu=1}^{s}(1-|\alpha_k|^2)^{q(j-1)+1}\;|g_{*}^{(j-1)}(\alpha_k)|^q,$$

из теоремы А получаем

$$\|S_n-S_m\|\leqslant \alpha(\delta, s)\, s^{1/p}\left\{\sum_{k=n+1}^{m}|\bar{w}_k|^p(1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1}\right\}^{1/p}\times$$

$$\times\sup\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=n+1}^{m}(1-|\alpha_k|^2)^{q(j-1)+1}|g_{*}^{(j-1)}(\bar{\alpha}_k)|^q\leqslant A_q\, C_s^{1+1/p}\,\alpha(\delta, s)\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=n+1}^{m}|w_k|^p(1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1}\right\}^{1/p}$$

и, тем самым первое, утверждение теоремы доказано.

Теперь (2.3) немедленно следует из леммы Б.

Теорема 2. *Если* $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta_s$ *и при фиксированном* p, $2/n+1\leqslant \leqslant p\leqslant 1$, *последовательность* $\{w_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (2.1), *то ряд*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}w_k\,\Omega_k^{(n)}(z) \tag{2.7}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри круга $|z|<1$ *и определяет функцию* $f(z)\in H_p(D^{(+)})$, *которая удовлетворяет следующим интерполяционным данным*:

$$f^{(s_j-1)}(\alpha_j)=w_j\;(j=1, 2,\cdots). \tag{2.8}$$

Доказательство. Пусть F—некоторое замкнутое множество из $|z|<1$. Обозначая

$$k_0=\max_{\alpha_k\in F}\{k\},$$

будем иметь $k_0<\infty$, и поэтому

$$\inf_{\substack{k>k_0+1\\ z\in F}}|z-\alpha_k|^n=\rho^s>0\;(n=1, 2,\cdots, s),$$

где ρ есть расстояние между множествами F и $\bar{E}=\overline{\{\alpha_k\}}_{k_0+1}^\infty$. Но тогда из леммы В и (2.10) следует, что

$$|w_k\,\Omega_k^{(n)}(z)|=\left|w_k\frac{B(z)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\bar{\alpha}_k z}\right)^n\frac{a_\nu(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)^{p_k-s_k+1-\nu}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{Aa(\delta, s)}{\rho^s}|w_k|\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu+n}<$$

$$< \frac{A \cdot s \cdot a(\delta, s)}{\rho^{k_*}} |w_k| (1-|\alpha_k|^2)^{s_k+n},$$

где $A = \max |B(z)/(1-|z|)|$, $z \in F$.

Но если $2/n+1 \leqslant p \leqslant 1$, то применяя неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k\right)^p \leqslant \sum_{k=1}^{m} a_k^p \quad (a_k \geqslant 0), \tag{2.9}$$

получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |w_k| (1-|\alpha_k|^2)^{s_k+n}\right) <$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^p (1-|\alpha_k|^2)^{ps_k+pn} < \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^p (1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1},$$

тем самым равномерная и абсолютная сходимость ряда доказана.

Обозначим через $M_p(r, f)$ величину

$$M_p(r, f) = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \tag{2.10}$$

и докажем, что

$$\sup_{0<r<1} M_p(r, f) < \infty.$$

Учитывая (2.9), для каждой функции $\Omega_k^{(n)}(z)$ $(k=1, 2, \cdots)$ будем иметь

$$M_p(r, \Omega_k^{(n)}) \leqslant \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)|^p (1-|\alpha_k|^2)^{p \cdot n} \int_{|z|=1} \frac{|dz|}{(1-z\bar{\alpha}_k)^{p(p_k-s_k+n+1-\nu)}} \leqslant$$

$$\leqslant a^p(\delta, s) \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} (1-|\alpha_k|^2)^{p(p_k-\nu+n)} (1-|\alpha_k|^2)^{-p(p_k-s_k+n+1-\nu)+1} =$$

$$= a^p(\delta, s) \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} (1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)} = s a^p(\delta, s) (1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1}$$

и, тем самым, для любого $0 \leqslant r < 1$ имеем

$$M_p(r, f) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^p M_p(r, \Omega_k^{(n)}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |w_k|^p (1-|\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1},$$

так что функция $f(z)$ из (2.7) принадлежит классу H_p. Утверждение (2.8) следует из леммы Б.

§ 3. О базисности систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$

3.1. (а). Лемма 3.1. *Системы функций* $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *и* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *принадлежат классу* $\lambda_p\{\alpha_k\}$.

Действительно, применяя лемму Е, имеем

$$\int\limits_{|t|=1}\frac{r_k(z)}{B(t)}\frac{dt}{t-z}=(s_k-1)!\int\limits_{|t|=1}\frac{t^{s_k-1}}{(1-t\bar{\alpha}_k)^{s_k}}\frac{1}{B(t)}\frac{dt}{t-z}=0,$$

так как

$$\frac{t^{s_k-1}}{(1-t\bar{\alpha}_k)^{s_k}}\cdot\frac{1}{B(t)(t-z)}=o\left(|t|^{-2}\right)\text{ при } t\to\infty.$$

Аналогично доказывается, что $\Omega_k(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$.

Лемма 3.2. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (1.2). *Тогда для каждого* k $(k=1, 2,\cdots)$

$$C_1(1-|\alpha_k|^2)^{1/p-s_k}\leqslant\|r_k\|_p\leqslant C_2(1-|\alpha_k|^2)^{1/p-s_k}, \qquad (3.1)$$

где $0<C_1<C_2<\infty$ — *постоянные, не зависящие от* k.

Доказательство. Для каждой функции $r_k(z)$ $(k=1, 2,\cdots)$ при $s_k>1$ имеем

$$\|r_k\|_p=\frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{|d\zeta|}{|1-\zeta\bar{\alpha}_k|^{ps_k-2}}\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{2^{ps_k-2}}{(1-\zeta\bar{\alpha}_k|^2(1-|\alpha_k|^2)^{ps_k-2}}\right\}^{1/p}\leqslant C_2(1-|\alpha_k|^2)^{1/p-s_k},$$

где $C_2=s!\,2^{ps-2}$. Но при $s_k=1$

$$\|r_k(z)\|=\sup_{\substack{g\in L_q\\ \|g\|\leqslant 1}}\left|\int\frac{g(\zeta)}{\zeta-\alpha_k}d\zeta\right|\leqslant C\|g\|(1-|\alpha_k|^2)^{1/p-1}\leqslant C(1-|\alpha_k|^2)^{1/p-1},$$

где C не зависит от k. Тем самым, второе неравенство леммы доказано Обозначая теперь $\varphi_k=\arg\bar{\alpha}_k$, оценим величину $\|r_k\|_p$ снизу. Имеем

$$\|r_k\|_p\geqslant\frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{(\vartheta-\varphi_k)<1-|\alpha_k|^2}\frac{d\vartheta}{\left[(1-|\alpha_k|^2)^2+4\sin^2\dfrac{\vartheta-\varphi_k}{2}\right]^{\frac{ps_k}{2}}}\right\}^{1/p}\geqslant$$

$$\geqslant 5^{-s_k}\frac{(s_k-1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\vartheta-\varphi_k|<1-|\alpha_k|^2}\frac{d\vartheta}{(1-|\alpha_k|^2)^{ps_k}}\right\}^{1/p}>C_1(1-|\alpha_k|^2)^{1/p-s_k}.$$

(б). Лемма 3.3. *Если кратность узлов* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ *не ограничена, то есть*

$$\sup_{k>1} s_k = \infty,$$

то системы функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$ *и* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *не являются базисом в* $\lambda_p\{\alpha_k\} \cdot (1 < p \leqslant \infty)$.

Доказательство. Обозначая опять $\varphi_k = \arg \bar{\alpha}_k$, будем иметь

$$\|r_k\|_p = \frac{(s_k - 1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{|d\zeta|}{|1-\zeta\bar{\alpha}_k|^{ps_k}}\right\}^{1/p} =$$

$$= \frac{(s_k - 1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{|1-|\alpha_k|\, e^{i(\vartheta-\varphi_k)}|^{ps_k}}\right\}^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(s_k - 1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\vartheta-\varphi_k|<1-|\alpha_k|} \frac{d\vartheta}{\left[(1-|\alpha_k|^2)^2 + 4|\alpha_k| \sin^2\frac{\vartheta-\varphi_k}{2}\right]^{ps_k}}\right\}^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(s_k - 1)!}{2\pi}\left\{\int\limits_{|\vartheta-\varphi_k|<1-|\alpha_k|} \frac{d\vartheta}{[(1-|\alpha_k|^2)^{ps_k}\cdot 2^{\frac{ps_k}{2}}}\right\}^{1/p} = \frac{(s_k-1)!}{2^{\frac{s_k}{2}}(1-|\alpha_k|^2)^{s_k-1/p}}, \tag{3.2}$$

теперь предполагая, что $\{r_k(z)\}_1^\infty$ является базисом в $\lambda_p\{\alpha_k\}$, по теореме Банаха [16] должны иметь

$$\|r_k\|_p \cdot \|\Omega_k\| < C, \tag{3.3}$$

где C не зависит от k и

$$\|\Omega_k\| = \sup_{\substack{f\in\lambda_p\{\alpha_k\}\\ \|f\|<1}} \left|\frac{1}{2\pi}\int f(\zeta)\,\overline{\Omega_k(\zeta)}\,|d\zeta|\right|.$$

Учитывая теорему Рисса [15] и лемму K, получим

$$\|\Omega_k\|_q = \sup_{\substack{f\in L_p\\ \|f\|<1}} \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\,\overline{\Omega_k(\zeta)}\,|d\zeta|\right| =$$

$$= \sup_{\substack{f\in H_p\\ \|f\|<A_p}} \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\,\overline{\Omega_k(\zeta)}\,|d\zeta|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{f\in\lambda_p\{\alpha_k\}\\ \|f\|<A_p(1+A_p)}} \left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} f(\zeta)\,\overline{\Omega_k(\zeta)}\,|d\zeta|\right|,$$

где A_p не зависит от k и $1/p+1/q=1$. Так что из (3.3) следует

$$\|r_k\|_p\, \|\Omega_k\|_q < C. \tag{3.4}$$

Но учитывая, что при $s_k = p_k$

$$\Omega_k(z) = \frac{(1-|\alpha_k|^2)^{p_k}}{(p_k-1)!}\, \frac{1}{\prod\limits_{\alpha_j\neq\alpha_k} \frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\frac{|\alpha_j|}{\alpha_j}}\, \frac{B(z)}{z-\alpha_k}, \tag{3.5}$$

как и в лемме 3.2 будем иметь (здесь $|\alpha_k|>1/2$)

$$\|\Omega_k\|_q > \frac{(p_k-1)!}{5}(1-|\alpha_k|)^{-1/p+p_k} > \frac{(p_k-1)!}{5}\left(\frac{3}{2}\right)^{p_k}(1-|\alpha_k|)^{-1/p+p_k}. \quad (3.6)$$

Теперь из (3.2) и (3.6) для упомянутых k получим

$$\|r_k\|_p\,\|\Omega_k\|_q \geqslant C_0\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{p_k}{2}},$$

что противоречит (3.4).

Лемма 3.4. *Если* $f(z)\in\lambda_p\{\alpha_k\}$ *и* $f^{(s_k-1)}(\alpha_k)=0$ $(k=1, 2,\cdots)$, *то* $f(z)\equiv 0$.

Доказательство. Для любой функции $f(z)\in H_p$ имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{1-\bar\zeta z}\,|d\zeta|.$$

Применяя лемму Г, получим

$$f(z)=\frac{B_n(z)}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f(\zeta)}{B_n(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

остается применить леммы Д и Е.

3.2(а). Для любой функции $f(z)\in H_p(D^{(+)})$ введем в рассмотрение ряд

$$\sum_1^\infty c_k(f)\,r_k(z), \quad (3.7)$$

где

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1}f(\zeta)\,\overline{\Omega_k(\zeta)}\,|d\zeta| \ (k=1, 2,\cdots). \quad (3.8)$$

Из леммы В легко получить, что

$$|c_k(f)|\leqslant a(\delta, s)\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-\nu}\,|g_*^{(p_k-\nu-s_k)}(\bar\alpha_k)| \ (k=1, 2,\cdots), \quad (3.9)$$

где $g_*(z)$ определяется по формуле (2.7).

Лемма 3.5. *Если* $f\in\lambda_p\{\alpha_k\}$ *и* $c_k(f)=0$ $(k=1, 2,\cdots)$, *то* $f(z)\equiv 0$.

Доказательство. Согласно определению класса $\lambda_p\{\alpha_k\}$ на окружности $|t|=1$ имеем

$$f(t)=\frac{B(t)}{t}\tilde f\left(\frac{1}{t}\right), \text{ где } \tilde f(z)\in H_p(D^{(+)}).$$

Применяя лемму Е, получаем

$$\int\limits_{|t|=1} \frac{\overline{f(t)}}{\overline{B}(t)} \frac{dt}{t-z} = \int\limits_{|t|=1} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t} \frac{dt}{t-z} \equiv 0, \ z \in D^{(+)},$$

где

$$\overline{B}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{\alpha}_k - z}{1 - \alpha_k z} \frac{|\alpha_k|}{\overline{\alpha}_k},$$

так что $\tilde{f}(z) \in \lambda_p \{\overline{\alpha}_k\}$. Теперъ согласно условию леммы имеем

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} f \overline{\Omega}_k |dt| =$$

$$= \frac{1}{(s_k-1)!} \sum_{\nu=0}^{p_k - s_k} \frac{a_\nu(\alpha_k)}{(p_k - s_k - \nu)!} \tilde{f}^{(p_k - s_k - \nu)}(\overline{\alpha}_k) = 0 \ (k=1, 2, \cdots). \tag{3.10}$$

Учитывая, что $a_0(\alpha_k) \neq 0$ $(k=1, 2, \cdots)$, из (3.10) заключаем, что $\tilde{f}^{s_k - 1}(\overline{\alpha}_k) = 0$ $(k=1, 2, \cdots)$. Так что в силу леммы 3.4 будем иметь

$\tilde{f}(z) \equiv 0$ и, тем самым, лемма доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ образовала базис в $\lambda_p \{\alpha_k\}$ $(1 < p < \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_s$.*

Доказательство. Для каждой функции $f(z) \in \lambda_p \{\alpha_k\}$ рассмотрим последовательность функций

$$S_m(z) = \sum_{1}^{m} c_k(f) r_k(z), \tag{3.11}$$

где $c_k(f)$ $(k=1, 2, \cdots)$ определяется по формуле (3.7). По теореме Хана-Банаха имеем

$$\|S_m - S_n\| = \sup_{\substack{g \in L_q \\ \|g\| \leq 1}} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|=1} [\overline{S_m(t)} - \overline{S_n(t)}] \, g(t) \, |dt| \right| =$$

$$= \sup \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{n+1}^{m} (s_k - 1)! \, c_k(f) \int\limits_{|t|=1} g(t) \frac{dt}{(t-\alpha_k)^{s_k}} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{G \in H_q \\ \|G\| \leq A_q}} \left| \sum_{n+1}^{m} c_k(f) \, G^{(s_k - 1)}(\alpha_k) \right|,$$

где

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} \frac{g(t)}{t-z} dt \in H_q(D^{(+)}).$$

Учитывая теперь оценки (3.9), как и в заключительной части теоремы 1 докажем, что последовательность (3.11) фундаментальна в $\lambda_p\{\alpha_k\}$. Но так как $\lambda_p\{\alpha_k\}$ — замкнутое подпространство класса $H_p(D^{(+)})$, то заключаем, что

$$\left\| \sum_1^n c_k(f)\, r_k(z) - f_0(z) \right\|_p \to 0,\ f_0(z) \in \lambda_p\{\alpha_k\}. \tag{3.12}$$

Но тогда $c_k(f_0) = c_k(f)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ и по лемме 3.5 $f(z) \equiv f_0(z)$. Тем самым, достаточность теоремы доказана.

Теперь предположим, что $\{r_k(z)\}_1^\infty$ является базисом в $\lambda_p\{\alpha_k\}$. Тогда как и в лемме 3.3 будем иметь

$$\|\Omega_k\|_q \leqslant C\,\|r_k\|_p^{-1},$$

где C $(0 < C < \infty)$ не зависит от k. Применяя опять это неравенство для тех k, для которых $s_k = p_k$, согласно лемме 3.2 и (3.5) имеем

$$\frac{1}{(p_k-1)!} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{\alpha_j \neq \alpha_k} \left| \dfrac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k} \right|} < C,$$

так что

$$\prod_{\alpha_j \neq \alpha_k} \left| \frac{\alpha_j - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_j \alpha_k} \right| > \frac{1}{Cs!}.$$

Теперь, учитывая лемму 3.3, завершаем доказательство теоремы.

(в). Теорема 4. *Для того чтобы система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ образовала базис в $\lambda_p\{\alpha_k\}$, необходимо и достаточно чтобы $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta_s$.*

Доказательство. Необходимость условия доказывается так же как и в теореме 3.

Рассмотрим последовательность функций

$$S_m(z) = \sum_1^m f^{(s_k-1)}(\alpha_k)\, \Omega_k(z)\ (m = 1, 2, \cdots). \tag{3.13}$$

Так как по теореме A для точек α_k $(k=1, 2, \cdots)$ выполняется неравенство

$$\sum_1^\infty |f^{(s_k-1)}(\alpha_k)|^p\, (1 - |\alpha_k|^2)^{p(s_k-1)+1} < C\,\|f\|_p,$$

то тем же способом, как и в теореме 1 доказывается фундаментальность последовательности (3.13). Так как каждая функция $\Omega_k(z)$ принадлежит классу $\lambda_p\{\alpha_k\}$, то предел последовательности (3.13) $\tilde{f}(z)$ также принадлежит классу $\lambda_p\{\alpha_k\}$ и выполняются условия

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \tilde{f}^{(s_k-1)}(\alpha_k)\ (k=1, 2, \cdots).$$

Учитывая лемму 3.4, завершаем доказательство теоремы.

В заключение выражаю благодарность профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и внимание к настоящей работе.

Институт математики
АН Армянской ССР Поступила 13.XII.1976

Հ. Մ. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Բազմապատիկ ինտերպոլյացիա և ռացիոնալ ֆունկցիաների մի բիօրթոգոնալ սիստեմի բազիսությունը Հարդիի H_p դասերում *(ամփոփում)*

Հոդվածում բերվում է H_p $(0< p <\infty)$ *տարածություններում բազմապատիկ ինտերպոլյացիայի խնդրի լուծումը։ Գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ, որպեսզի հետևյալ ֆունկցիաների սիստեմը*

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\,z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad(k=1,\ 2,\cdots)$$

(որտեղ $|\alpha_k|<1$ $(k=1,2,\cdots)$ *և* s_k*-ն* α_k*-ի հանդես գալու կարգն է* $\{\alpha_j\}_1^k$*-ում), ինչպես նաև նրա հետ բիօրթոգոնալ* $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ *սիստեմը կազմեն բազիս իրենց գծային թաղանթի փակման մեջ* H_p $(1< p <\infty)$*-ում։*

H. M. HAIRAPETIAN. *The multiple interpolation and the basisness of some systems of rational functions in Hardy* H_p *classes* (summary)

The multiple interpolation problem on the classes H_p $(0<p<\infty)$ is solved. The nacessary and sufficient conditions for the system of functions

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\,z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}}\quad(k=1,\ 2,\cdots)$$

(where $|\alpha_k|<1$ $(k=1,2,\cdots)$, s_k is the multiplisity of α_k in $\{\alpha_j\}_1^k$) and its biorthogonal system $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ to form basae for their linear hulle in H_p $(1<p<\infty)$ are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы рациональных функций и представление ядра Коши, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., VIII, № 5, 1973, 384—409.
2. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., IX, № 5, 1974, 339—373.
3. *Г. М. Айрапетян*. О базисе рациональных функций в подпространствах Харди H_p $(1<p<\infty)$, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем, VIII, № 6, 1973, 429—450.
4. *L. Carleson*. Interpolation by boynded analytic function and the Corona problem, Ann Math., 76, № 3, 1962.
5. *Г. М. Айрапетян*. О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., X, № 2, 1975, 133—152.
6. *В. Э. Кацнельсон*. Об условии базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов, Функциональный анализ и его приложения, I., вып. 2, 1967, 39—51.
7. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов*. Базисы из собственных векторов вполне неунитарных сжатий и характеристическая функция, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 1, 1970, 90—133.

8. *Ю. Ф. Карабейник.* О безусловных базисах в гильбертовом пространстве, Мат. заметки, 19, № 2, 1976, 259—267.
9. *В. И. Вгсючин.* Базисы из рациональных функций и кратная интерполяция. Записки научных семинаров ЛОМИ, 1976, 56.
10. *Ф. А. Шамоян.* Теоремы вложения, связанные с задачей кратного интерполирования в пространствах H_p, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XI, № 2, 1976, 124—131.
11. *H. S. Shapiro, A. L. Shields.* On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
12. *В. Кабайла.* Интерполяционные последовательности для классов H_p в случае $p<1$, Lict. matem. rink., III, 1, 1963, 141—147.
13. *Г. Ц. Тумаркин.* Разложение аналитических функций в ряд по рациональным дробям с заданным множеством полюсов, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., IV, № 1, 1969, 9—31.
14. *М. М. Джрбашян.* Разложение по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 2, № 1, 1967.
15. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, М., 1963.
16. *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев.* Элементы функционального анализа, М., 1965.

Примечание при корректуре

Поскольку при $\sup\limits_{k>1} \{s_k\} = +\infty$ система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не является базисом в $\lambda_p\{\alpha_k\}$ $(1<p<\infty)$, то в силу одной теоремы из работы С. А. Виноградова „Базисы из показательных функций и свободная интерполяция в банаховых пространствах с L^p-нормой“ (ЛОМИ, т. 65, VII, 1976), множество $\{(f^{(s_k-1)}(\alpha_k))_{k=1}^\infty;\ f\in H^p\}$ не совпадает ни с каким весовым пространством l^p.