ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 4, 1977 Математика

Ю. А. КУТОЯНЦ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА КОЭФФИЦИЕНТА СНОСА

Приводится пример диффузионного процесса, для которого оценка максимального правдоподобия параметра коэффициента сноса обладает следующим свойством. При одних значениях этого параметра асимптотическая дисперсия убывает с ростом времени наблюдения T как T^{-N}, при других значениях — как T^{-1}. Число $N \geqslant 1$ можно выбрать произвольным, меняя некоторый параметр задачи.

1°. Пусть задано основное вероятностное пространство $\{\Omega, \mathbf{F}, P\}$; семейство $\{\mathbf{F}_t, t \geqslant 0\}$ σ-подалгебр $\mathbf{F}$ и случайный процесс $\{X_t, \mathbf{F}_t, t \geqslant 0\}$, допускающий дифференциал

$$dX_t = \theta\, |X_t|^\alpha\, dt + dw_t, \ t \geqslant 0, \ X_0 = 1, \tag{1}$$

где $\{w_t, \mathbf{F}_t, t \geqslant 0\}$ — стандартный винеровский процесс; α — известный параметр, $0 \leqslant \alpha < 1$, а параметр $\theta \in R^1$ требуется оценить. Будем исследовать асимптотические свойства оценки максимального правдоподобия $\hat{\theta}_T$, получаемой по наблюдениям $X^T = \{X_t, 0 \leqslant t \leqslant T\}$ при $T \to \infty$.

Отметим, что коэффициент сноса $\theta\, |x|^\alpha$ не удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $x = 0$, но тем не менее можно показать [1], что уравнение (1) имеет сильное решение.

Схема наблюдений (1) выбрана для иллюстрации того, как в естественной ситуации скорость убывания дисперсии оценки зависит от значения оцениваемого параметра. Представляет интерес изучение асимптотических свойств оценок, когда дисперсия имеет более чем две скорости убывания. Например, если в уравнении (1) $\theta = 1$ и исследуются свойства оценки параметра $\alpha \in (0,1)$, то, по-видимому, каждое значение α имеет свою скорость убывания дисперсии.

При $\theta < 0$ свойства $\hat{\theta}_T$ исследованы в [2].

В силу непрерывности X_t

$$P\left\{\int_0^T |X_t|^{2\alpha}\, dt < \infty\right\} = 1$$

и меры $P_\theta^{(T)}$, наведенные в пространстве $(C_{[0, T]}, B_{[0, T]})$ непрерывных на $[0, T]$ функций решениями (1), при разных $\theta \in R^1$ эквивалентны. Обозначим $P^{(T)}$ меру, отвечающую винеровскому процессу. Производная Радона-Никодима меры $P_\theta^{(T)}$ по мере $P^{(T)}$ равна [3]

$$\frac{dP_\theta^{(T)}}{dP^{(T)}}(X^T)=\exp\left\{\theta\int\limits_0^T|X_t|^\alpha\; dX_t-\frac{1}{2}\theta^2\int\limits_0^T|X_t|^{2\alpha}\,dt\right\}.$$

Оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}_T$ имеет вид

$$\hat{\theta}_T=\int\limits_0^T|X_t|^\alpha\; dX_t:\int\limits_0^T|X_t|^{2\alpha}\,dt. \tag{2}$$

Положим

$$\sigma_1(\theta)=\theta^{-\frac{2\alpha}{1-\alpha}}(1+\alpha)(1-\alpha)^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}},$$

$$\sigma_2(\theta)=(-2\theta)^{\frac{2\alpha}{1+\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\alpha^{-1}\Gamma\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right),$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма функция, и введем функцию

$$\varphi_T(\theta)=\begin{cases}\sigma_1(\theta)\cdot T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}, & \theta>0\\ \sigma_2(\theta)\cdot T^{-1}, & \theta<0.\end{cases}$$

Сходимость последовательности функционалов $\eta_T(X^T)$ от решения уравнения (1) по распределению к гауссовой случайной величине с параметрами $(0,\sigma)$ обозначим $L_\theta\{\eta_T(X^T)\}\Rightarrow N(0,\sigma)$.

2°. Теорема. *При $\theta\neq 0$ оценка $\hat{\theta}_T$ состоятельна, асимптотически эффективна и асимптотически нормальна, точнее,*

$$L_\theta\{(\hat{\theta}_T-\theta)\,\varphi_T(\theta)^{-1/2}\}\Rightarrow N(0,1).$$

Доказательство. После подстановки наблюдаемой реализации (1) в (2) получаем

$$\hat{\theta}_T=\theta+\int\limits_0^T|X_t|^\alpha\, dw_t:\int\limits_0^T|X_t|^{2\alpha}\,dt. \tag{3}$$

Предварительно докажем ряд лемм. Отдельно рассмотрим случаи $\theta>0$ и $\theta<0$.

Лемма 1. *Если $\theta>0$, то*

$$P_\theta\left\{\lim_{T\to\infty}X_T\cdot T^{-\frac{1}{1-\alpha}}=[\theta(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right\}=1.$$

Доказательство имеется в книге [4], часть I, § 17.

Лемма 2. *Если $\theta>0$, то*

$$P_\theta\lim_{T\to\infty}T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\int\limits_0^T|X_t|^{2\alpha}\,dt=(1+\alpha)^{-1}\theta^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}. \tag{4}$$

Доказательство. По формуле Ито для функции $f(x) = x^2$ имеем

$$X_t^2 = 1 + t + \theta \int_0^t X_s |X_s|^\alpha ds + \int_0^t X_s dw_s.$$

Следовательно

$$MX_t^2 = 1 + t + \theta \int_0^t M(X_s |X_s|^\alpha) ds \leqslant 1 + t +$$

$$+ \theta \int_0^t M |X_s|^{1+\alpha} ds \leqslant 1 + t + \theta \int_0^t (MX_s^2)^{\frac{1+\alpha}{2}} ds,$$

где мы воспользовались неравенством Йенсена. Введем функцию $q_t = \sup\limits_{0<s<t} MX_s^2$. Очевидно

$$g_t \leqslant 1 + t + \theta \cdot t \cdot g_t^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Поэтому, начиная с некоторого $t_0(\theta)$ для всех $t \geqslant t_0$

$$g_t \leqslant C \cdot t^{\frac{2}{1-\alpha}}, \tag{5}$$

где $C = (3\theta)^{\frac{2}{1-\alpha}}$. Введем функцию

$$\Phi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{1+\alpha}}{1+\alpha}, & x \geqslant 1 \\ -\dfrac{(-x)^{1+\alpha}}{1+\alpha}, & x \leqslant -1, \end{cases}$$

а на интервале $(-1, 1)$ положим $\Phi(x) = \varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = \frac{3-2\alpha+3\alpha^2}{8(1+\alpha)} + \frac{3-2\alpha}{4} x^2 - \frac{1-\alpha}{8} x^4.$$

Функция $\Phi(x)$ имеет две непрерывные производные и следовательно процесс $Y_t = \Phi(X_t)$ допускает представление

$$Y_T = \frac{1}{1+\alpha} + \theta \int_0^T \dot{\Phi}(X_t) |X_t|^\alpha dt + \frac{1}{2} \int_0^T \ddot{\Phi}(X_t) dt + \int_0^T \dot{\Phi}(X_t) dw_t. \tag{6}$$

Так как при $x \geqslant 1$ имеем $y = (1+\alpha)^{-1} x^{1+\alpha}$, то по лемме 1

$$P_\theta \{\lim_{T\to\infty} Y_T \cdot T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} = (1+\alpha)^{-1} [\theta(1-\alpha)]^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\} = 1. \tag{7}$$

К стохастическому интегралу в (6) применим неравенство Чебышева ($\delta > 0$)

$$P_\theta \left\{ T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \left| \int_0^T \Phi(X_t)\, dw_t \right| > \delta \right\} \leqslant \delta^{-2}\, T^{-2\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \int_0^T M\, \Phi(X_t)^2\, dt.$$

Пусть $\chi_{\{B\}}$ — индикатор события B и $N = \dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}$. Используя оценку (5), получаем

$$T^{-2N} \int_0^T M\, \Phi(X_t)^2\, dt = T^{-2N} \int_0^T M\, |X_t|^{2\alpha}\, \chi\, \{|X_t| \geqslant 1\}\, dt +$$

$$+ T^{-2N} \int_0^T M\, \Phi(X_t)^2\, \chi_{\{|X_t|<1\}}\, dt \leqslant T^{-2N} \cdot T \cdot g_T^2 + T^{-\frac{1+3\alpha}{1-\alpha}} \to 0$$

при $T \to \infty$. Поэтому

$$P_\theta - \lim_{T \to \infty} T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \int_0^T \Phi(X_t)\, dw_t = 0.$$

Аналогичные вычисления приводят к

$$P_\theta - \lim_{T \to \infty} T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \int_0^T \Phi(X_t)\, dt = 0.$$

Следовательно, после деления (6) на $T^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}$ с учетом (7) получаем

$$P_\theta - \lim_{T \to \infty} \cdot T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \int_0^T \Phi(X_t)\, |X_t|^\alpha\, dt = \sigma_1(\theta)^{-1}. \tag{8}$$

Введем случайный момент $\tau = \sup\{t\colon X_t \leqslant 1\}$. Так как $P_\theta\{\lim\limits_{T \to \infty} X_T = \infty\} = 1$, то имеем $P\{\tau < \infty\} = 1$. По определению функции $\Phi(X)$ очевидно $\Phi(x)\, |x|^\alpha - |x|^{2\alpha} = 0$ при $|x| \geqslant 1$ и $|\Phi(x)\, |x|^\alpha - |x|^{2\alpha}| < 1$ при $|x| < 1$, поэтому

$$\left| \int_0^T \Phi(x_t)\, |x_t|^\alpha\, dt - \int_0^T |X_t|^{2\alpha}\, dt \right| < \tau.$$

Теперь из (8) следует (4), так как $P_\theta\{\lim\limits_{T \to \infty} \tau \cdot T^{-N} = 0\} = 1$.

Лемма 3. *Если* $\theta > 0$, *то*

$$\mathbf{L}_\theta \left\{ T^{-\frac{1+\alpha}{2(1-\alpha)}} \int\limits_0^T |X_t|^\alpha \, dw_t \right\} \Rightarrow N(0, \sigma_1(\theta)). \tag{9}$$

Доказательство. По лемме работы [5] условие [4] является достаточным для выполнения (9).

Теперь асимптотическая нормальность $(\hat{\theta}_T - \theta)\, \sigma_1(\theta)^{-1/2}\, T^{\frac{1}{2}N}$ следует из представления

$$(\hat{\theta}_T - \theta)\, \sigma_1(\theta)^{-1/2}\, T^{1/2\,N} = \sigma_1(\theta)^{-1}\, T^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \left(\int\limits_0^T |X_t|^{2\alpha} dt \right)^{-1} \times$$

$$\times\, \sigma_1(\theta)^{1/2}\, T^{-\frac{1+\alpha}{2(1-\alpha)}} \int\limits_0^T |X_t|^\alpha \, dw_t$$

и лемм 2 и 3.

Лемма 4. *Если* $\theta > 0$, *то*

$$P_\theta \left\{ \lim_{T \to \infty} \int\limits_0^T |X_t|^\alpha \, dw_t : \int\limits_0^T |X_t|^{2\alpha} dt = 0 \right\} = 1.$$

Доказательство. Положим

$$\eta_T = \int\limits_0^T |X_t|^{2\alpha} dt - \sigma_1(\theta)^{-1}\, T^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}.$$

По лемме 2

$$P_\theta - \lim_{T \to \infty} \eta_T \cdot T^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} = 0.$$

Пусть $T_k \to \infty$ — подпоследовательность, для которой

$$P_\theta \{ \lim_{k \to \infty} \eta_{T_k} \cdot T_k^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} = 0 \} = 1.$$

Тогда

$$\int\limits_0^{T_k} |X_t|^{2\alpha} dt = \left(\sigma_1(\theta)^{-1} + \eta_{T_k} \cdot T_k^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\right) \cdot T_k^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sigma_1(\theta)^{-1} - |\eta_{T_k}| \cdot T_k^{-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\right) \cdot T_k^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \to \infty.$$

Следовательно

$$P_\theta \left\{ \int\limits_0^\infty |X_t|^{2\alpha} dt = \infty \right\} = 1.$$

Теперь утверждение леммы 4 следует из леммы 17.4 книги [3].

Представление (3) и лемма 4 устанавливают сильную состоятельность $\hat{\theta}_T$ при $\theta > 0$, т. е.

$$P_\theta \{\lim_{T \to \infty} \hat{\theta}_T = \theta\} = 1. \tag{10}$$

При $\theta < 0$ процесс X_t является эргодическим и для него справедлив усиленный закон больших чисел

$$P_\theta \left\{ \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |X_t|^{2\alpha} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{2\alpha} \, d\mu_\theta (x) \right\} = 1, \tag{11}$$

где $\mu_\theta(\cdot)$ — эргодическое распределение X_t [6]. Вычисления приводят к

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X|^{2\alpha} \, d\mu_\theta (x) = \sigma_2 (\theta).$$

Условие (11) по лемме работы [5] обеспечивает

$$\mathbf{L}_\theta \left\{ T^{-1/2} \int_0^T |X_t|^\alpha \, dw_t \right\} \Rightarrow N (0, \sigma_2 (\theta)).$$

Следовательно, при $\theta < 0$

$$\mathbf{L}_\theta \{ (\hat{\theta}_T - \theta) \, \sigma_2 (\theta)^{-1/2} \, T^{1/2} \} \Rightarrow N (0, 1).$$

В силу (11) лемма 4 справедлива и при $\theta < 0$, поэтому (10) имеет место и при $\theta < 0$.

Семейство мер $\{P_\theta^{(T)}, \theta \in \bar{R}^1 \setminus \{0\}\}$ локально асимптотически нормально с нормирующими функциями, квадрат которых совпадает с асимптотической дисперсией $\hat{\theta}_T$. Поэтому оценка $\hat{\theta}_T$ асимптотически (слабо) эффективна при $T \to \infty$ [7].

Замечание. При $\theta > 0$ для любого $N \geqslant 1$ выбором параметра $\alpha = \dfrac{N-1}{N+1}$ получаем

$$\mathbf{L}_\theta \{ (\hat{\theta}_T - \theta) \, \sigma_1 (\theta)^{-1/2} \, T^{1/2N} \} \Rightarrow N (0, 1).$$

В заключение автор выражает глубокую признательность Р. Ш. Липцеру за критическое прочтение рукописи и ряд полезных замечаний.

Институт радиофизики и электроники
АН Армянской ССР

Поступила 15.VII.1975

ՅՈՒ. Ա. ԿՈՒՏՈՅԱՆՑ. Պատահական պրոցեսների պարամետրի գնահատականը *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրվում է պատահական [1] պրոցեսը և դիտարկվում է θ պարամետրի գնահատականը։

Yu. A. KUTOYANTS. *On the estimation of the trend parameter* (summary)

The stochastic diffusion equation (1) is considered. The maximum likelihood estimate of the parameter θ is under investigation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. К. Звонкин.* Преобразование фазового пространства диффузионного процесса, уничтожающее снос, Матем. сб., 93, 1, 1974, 129—149.
2. *А. Ф. Тараскин.* Об асимптотической нормальности стохастических интегралов и оценках коэффициента переноса диффузионного процесса, Математич. физика, респ. межвед. сб., Наукова думка, К., 8, 1970, 149—163.
3. *Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев.* Статистика случайных процессов, Изд. „Наука", М., 1974.
4. *И. И. Гихман, А. В. Скороход.* Стохастические дифференциальные уравнения, Наукова думка, К., 1968.
5. *Ю. А. Кутоянц.* Локальная асимптотическая нормальность для процессов диффузионного типа, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика", X, № 2, 1975, 103—112.
6. *Р. З. Хасьминский.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, Изд. „Наука", М., 1969.
7. *И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский.* Локальная асимптотическая нормальность для неодинаково распределенных наблюдений, Теория вероят. и ее примен., 20, № 2, 1975, 251—266.