ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 3, 1977 Математика

А. Н. АЙРАПЕТЯН

О ЛОКАЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ, СУММИРУЕМЫХ ПО ПЛОЩАДИ СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

1°. Пусть D — единичный круг $|z|<1$, а Γ — единичная окружность $|z|=1$. Интерпретируя круг D, как модель плоскости в геометрии Лобачевского, обозначим через $\sigma(z_1, z_2)$ неэвклидово расстояние между точками z_1 и z_2 из D.

Для произвольной точки $\zeta=e^{i\theta}\in\Gamma$ обозначим через $D(\zeta)$ круг $|z-\rho\zeta|<1-\rho$, где $\rho\left(\frac{1}{2}<\rho<1\right)$ — фиксированное число, а через $l(\theta, \alpha)$ — лежащий в $D(\zeta)$ отрезок хорды, выходящей из точки $\zeta=e^{i\theta}$ и образующей с радиусом круга D направленный угол α; $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Подобласть круга D, ограниченную двумя хордами

$$l(\theta, \alpha_1) \text{ и } l(\theta, \alpha_2), \ -\frac{\pi}{2}<\alpha_1<\alpha_2<\frac{\pi}{2}$$

и окружностью $|z-\rho\zeta|=1-\rho$, будем обозначать через $\Delta(\theta, \alpha_1, \alpha_2)$. Пусть $f(z)$ — произвольная мероморфная в D функция, принимающая значения на сфере Римана Ω. Сферическую производную функции $f(z)$ обозначим через $\rho(f(z))$; $\rho(f(z))=|f'(z)|\,[1+|f(z)|^2]^{-1}$. В случае, если $f(z)$ имеет предел, когда $z\to e^{i\theta}$, $z\in l(\theta, \alpha)$, этот предел будем обозначать через $f(\theta, \alpha)$. Наконец, для произвольного борелева множества E на Γ символ $\operatorname{mes} E$ обозначает линейную меру множества E.

Следуя [1], последовательность точек $\{z_n\}$, $z_n\in D$, $n=1, 2, \cdots$, $\lim|z_n|=1$, называют P-последовательностью функции $f(z)$, если для любого $\varepsilon>0$ и любой бесконечной последовательности $\{z_{nk}\}$ функция $f(z)$ принимает в объединении неэвклидовых кругов $\{z;\ \sigma(z, z_{nk})<\varepsilon\}$ бесконечно часто каждое значение $w\in\Omega$, кроме, быть может, двух значений. Сегмент $l(\theta, \alpha)$ назовем P-сегментом для $f(z)$, если $l(\theta, \alpha)$ содержит хотя бы одну P-последовательность функции $f(z)$.

2°. Изучается следующая задача. Для произвольного измеримого по Борелю множества M на Γ указать условия на функцию $f(z)$, при которых можно утверждать, что все или почти все хорды $l(\theta, \alpha)$ круга D в каждой точке $\zeta=e^{i\theta}\in M$, исключая, быть может, некоторое малое множество $E\subset M$, переходят в спрямляемые кривые на сфере Римана Ω при отображении $w=f(z)$. Эта задача связана с изучением функций

$$L_f(\theta, \alpha) = \int\limits_{l(\theta, \alpha)} \rho(f(z))\,|dz|,$$

$$K_f(\theta, \alpha) = \int\limits_{l(\theta, \alpha)} |\operatorname{grad} f(z)|\,|dz|,$$

если функция $f(z)$ непрерывна вместе с частными производными первого порядка и

$$\lambda_f(\theta, \alpha) = \int\limits_{l(\theta, \alpha)} |f'(z)|\,|dz|,$$

если $f(z)$ голоморфна в D. В случае, когда M совпадает с Γ, эта задача рассмотрена в работах [2], [3], [4], [5] и исключительные множества были малы в смысле меры или емкости. В случае произвольного $M \subset \Gamma$ задача рассматривалась в работе [8] для подклассов функций ограниченного вида. В настоящей статье задача изучается в одном классе мероморфных функций в D, который содержит каждый из подклассов функций, изученных в [8], но отличается от класса функций ограниченного вида. Используемый при этом метод имеет общий характер, и может быть применен в случае непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций, определенных в D.

3°. Доказываемые ниже теоремы во многом опираются на следующий общий результат.

Положим $\sigma = \bigcup\limits_{\zeta \in M} D(\zeta)$.

Теорема 1. *Пусть непрерывная в D функция $U(z) \geqslant 0$ удовлетворяет условию*

$$\iint\limits_{\sigma} U(z)\,dxdy < +\infty, \quad z = x + iy. \tag{1}$$

Тогда функция

$$\Lambda_u(\theta, \alpha) = \int\limits_{l(\theta, \alpha)} U(z)\,|dz|$$

обладает следующими свойствами:

1. *для каждого α; $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, она является суммируемой функцией аргумента θ; $e^{i\theta} \in M$,*

2. *на множестве M существует такое подмножество M', $\operatorname{mes} M' = \operatorname{mes} M$, что для каждого θ; $e^{i\theta} \in M'$, $\Lambda_u(\theta, \alpha)$ является суммируемой функцией аргумента $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Доказательство. Определим функцию $h(z)$ следующим образом:

$$h(z) = \begin{cases} U(z), & z \in \sigma, \\ 0, & D \setminus \sigma. \end{cases}$$

Тогда, согласно условию (1), будем иметь

$$\iint\limits_D h(z)\, dxdy < +\infty. \tag{2}$$

Положим

$$q(r) = \int\limits_0^1 h(re^{i\theta})\, d\theta,\ 0 \leqslant r < 1.$$

На основании (2) имеем

$$\int\limits_0^1 rq(r)\, dr = \iint\limits_D h(z)\, dxdy < +\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^1 q(r)\, dr < +\infty. \tag{3}$$

Пусть точка $\zeta = e^{i\theta} \in M$ и число $\alpha;\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ произвольны. Рассмотрим сегмент $l(\theta, \alpha)$ и для $z \in l(\theta, \alpha)$ положим $|z - e^{i\theta}| = t$, тогда

$$z = \tau\, e^{i(\theta+\varphi)},\ |dz| = dt,\ \tau = \sqrt{1 + t^2 - 2t\cos\alpha},$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg}[t\sin\alpha / 1 - t\cos\alpha].$$

По определению

$$\Lambda_u(\theta, \alpha) = \int\limits_0^{(2-2\rho)\cos\alpha} U(\tau e^{i(\theta+\varphi)}\, dt.$$

Далее

$$\int\limits_M \Lambda_u(\theta, \alpha)\, d\theta = \int\limits_0^{(2-2\rho)\cos\alpha} dt \int\limits_M U(\tau\, e^{i(\theta+\varphi)}\, d\theta = \int\limits_0^{(2-2\rho)\cos\alpha} dt \int\limits_M h(\tau e^{i(\theta+\varphi)})\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{(2-2\rho)\cos\alpha} dt \int\limits_0^{2\pi} h(\tau\, e^{i(\theta+\varphi)})\, d\theta = \int\limits_0^{(2-2\rho)\cos\alpha} q(\tau)\, dt.$$

Полагая $c(\rho, \alpha) = \sqrt{(2\rho-1)^2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$, $d(\rho, \alpha) = (2-2\rho)\cos\alpha$, окончательно получим

$$\int_M \Lambda_u(\theta, \alpha)\, d\theta \leqslant \int_{c(\rho, \alpha)}^{1} \frac{xq(x)\, dx}{\sqrt{x^2 - \sin^2\alpha}}. \tag{4}$$

В силу условия (3), при каждом фиксированном α; $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, последний интеграл в (4) конечен. Таким образом, утверждение 1 теоремы 1 доказано.

Рассмотрим функцию

$$\Lambda_u(\theta, \alpha, t) = \int_t^{d(\rho, \alpha)} U(\tau e^{i(\theta+\varphi)})\, dt, \quad t > 0.$$

Функция $\Lambda_u(\theta, \alpha, t)$ является непрерывной функцией аргументов θ, α и t, и так как $\Lambda_u(\theta, \alpha) = \lim\limits_{t\to 0} \Lambda_u(\theta, \alpha, t)$, то $\Lambda_u(\theta, \alpha)$ является измеримой функцией аргументов (θ, α) в произведении $M \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Поскольку при любом фиксированном α; $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, множество тех значений θ, для которых $\Lambda_u(\theta, \alpha) = +\infty$ имеет линейную меру нуль, множество всех пар (θ, α), $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, для которых $\Lambda_u(\theta, \alpha) = +\infty$ имеет плоскую меру нуль ([6], стр. 134). А это означает, что на множестве M существует такое подмножество M', $\operatorname{mes} M' = \operatorname{mes} M$, обладающее следующим свойством; при любом фиксированном θ; $e^{i\theta} \in M'$ функция $\Lambda_u(\theta, \alpha)$ конечна для почти всех α; $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, утверждение 2 доказано.

4°. Теорема 2. *Пусть функция $f(z)$ удовлетворяет условию*

$$\iint_{\sigma} |\operatorname{grad} f(z)|\, dxdy < +\infty, \quad z = x + iy.$$

Тогда функция $K_f(\theta, \alpha)$ обладает следующими свойствами:

1. *для каждого α; $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ она является суммируемой функцией аргумента θ; $e^{i\theta} \in M$,*

2. *на множестве M существует такое подмножество M_1, $\operatorname{mes} M_1 = \operatorname{mes} M$, что для каждого θ; $e^{i\theta} \in M_1$ $K_f(\theta, \alpha)$ является суммируемой функцией аргумента $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,*

3. *для всех θ; $e^{i\theta} \in M_1$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, для которых $K_f(\theta, \alpha_1) < +\infty$ и $K_f(\theta, \alpha_2) < +\infty$, существуют конечные пределы $f(\theta, \alpha_1)$, $f(\theta, \alpha_2)$ и $f(\theta, \alpha_1) = f(\theta, \alpha_2)$.*

Доказательство. Применим теорему 1 к функции $U(z) = |\text{grad} f(z)|$ и рассмотрим множество M', фигурирующее в утверждении 2 теоремы 1. Тогда утверждения 1 и 2 теоремы справедливы для функции $K_f(\theta, \alpha)$ и множества M'. Заметим, что конечность интеграла $K_f(\theta, \alpha)$ означает существование определенного предела $f(\theta, \alpha)$. Рассмотрим те точки θ; $e^{i\theta} \in M'$, в которых по крайней мере для двух хорд $l(\theta, \alpha_1)$ и $l(\theta, \alpha_2)$ пределы $f(\theta, \alpha_1)$ и $f(\theta, \alpha_2)$ различны. Такие точки являются точками неопределенности функции $f(z)$ и, согласно теореме Багемила [7], их множество самое большее счетно. Выбрасывая эти точки, мы получаем множество M_1, $\text{mes}\, M_1 = \text{mes}\, M$, для которого выполняются утверждение 3, а также и утверждения 1 и 2 теоремы 2.

5°. Используя теоремы 1 и 2, можно доказать следующий результат.

Теорема 3. *Пусть мероморфная в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию*

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \rho(f(z))\, dxdy < +\infty, \; z = x + iy.$$

Тогда функция $L_f(\theta, \alpha)$ обладает следующими свойствами:

1. *для каждого α; $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, она является суммируемой функцией аргумента θ; $e^{i\theta} \in M$,*

2. *на множестве M существует такое подмножество M_1, $\text{mes}\, M_1 = \text{mes}\, M$, что для каждого θ, $e^{i\theta} \in M_1$, $L_f(\theta, \alpha)$ является суммируемой функцией аргумента $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,*

3. *для всех θ, $e^{i\theta} \in M_1$ и α_1, $\alpha_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, для которых $L_f(\theta, \alpha_1) < +\infty$ и $L_f(\theta, \alpha_2) < +\infty$, существуют определенные пределы $f(\theta, \alpha_1)$, $f(\theta, \alpha_2)$ и $f(\theta, \alpha_1) = f(\theta, \alpha_2)$,*

4. *для всех θ; $e^{i\theta} \in M_1$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, для которых $L_f(\theta, \alpha) = +\infty$, сегменты $l(\theta, \alpha)$ являются P-сегментами функции $f(z)$.*

Утверждения 1, 2 и 3 теоремы следуют из аналогичных утверждений теоремы 2, поскольку конечность интеграла $L_f(\theta, \alpha)$ при фиксированных значениях θ и α означает существование определенного предела $f(\theta, \alpha)$. Доказательство утверждения 4 проводится буквально по схеме, проведенной в статье [4], (стр. 954).

Теорема 4. *Пусть голоморфная в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию*

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} |f'(z)|\, dxdy < +\infty, \; z = x + iy.$$

Тогда функция $\lambda_f(\theta, \alpha)$ обладает следующими свойствами:

1. *для каждого α; $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ она является суммируемой функцией аргумента θ; $e^{i\theta} \in M$,*

2. *на множестве M существует такое подмножество M_2, $\operatorname{mes} M_2 = \operatorname{mes} M$, что для каждого θ; $e^{i\theta} \in M_2$, $\lambda_f(\theta, \alpha)$ является суммируемой функцией аргумента $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,*

3. *функция $f(z)$ на множестве M_2 имеет угловые предельные значения,*

4. *функция $\lambda_f(\theta, \alpha) < +\infty$ для каждого θ; $e^{i\theta} \in M_2$ и $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 теоремы следуют из теоремы 3. Рассмотрим множество M_1, фигурирующее в утверждении 2 теоремы 3. Проведя те же рассуждения, что и в работе [8] (теорема 4), мы получаем множество M_2, $\operatorname{mes} M_2 = \operatorname{mes} M$, для которого выполняются утверждения 1, 2 и 3 теоремы 4.

Пусть для какого-то $\alpha_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и θ; $e^{i\theta} \in M_2$, $\lambda_f(\theta, \alpha_0) = +\infty$. Как и в теореме 3 заключаем, что сегмент $l(\theta, \alpha_0)$ является P-сегментом для $f(z)$, а это противоречит тому, что функция $f(z)$ на множестве M_2 имеет угловые предельные значения. Следовательно, утверждение 4 теоремы 4 доказано.

В заключение, пользуясь случаем, выражаю свою благодарность В. И. Гаврилову, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Армянский педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 18.XI.1975

Ա. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ. Սֆերիկ ածանցյալով, մակերեսով հանրագումարելի մերոմորֆ ֆունկցիաների լոկալ եզրային հատկությունների մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում ուսումնասիրվում է հետևյալ խնդիրը. Բորելի իմաստով չափելի կամայական $M \subset \Gamma: |z|=1$ բազմության համար նշել այն պայմանները $f(z)$ հոլոմորֆ (մերոմորֆ) ֆունկցիաների վրա, որի դեպքում կարելի է պնդել, որ M բազմության ցանկացած կետում, բացի գուցե, մի որոշ, փոքր $E \subset M$ ենթաբազմությունից, $D: |z|<1$ շրջանի բոլոր կամ համարյա բոլոր $l(\xi, \alpha)$ լարերը $w=f(z)$ արտապատկերման ժամանակ անցնում են ուղղելի կորերի w-հարթության մեջ կամ Ռիմանի սֆերայի վրա։

A. N. AIRAPETIAN. *On local boundary properties of meromorphic functions with summable spheric derivatives* (summary)

The following problem is considered: which are the conditions to be imposed a holomorphic (meromorphic) function f, which ensure, that in every point of a given

borel set M, $M \subset \Gamma$: $|z| = 1$, pethars with exception of a small set $E \subset M$, all or almost all chords of the circle D: $|z| < 1$ have reck'tifialle curves for their images on the w-plane or Rieman sphere Ω under the map $w = f(z)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Гаврилов.* О распределении значений мероморфных в единичном круге функций, не являющихся нормальными, Матем. сб., 67, № 3, 1965, 408—427.
2. *M. Tsuji.* Beurlings theorem on exeptional sets, Tohoku math. J., 2, 1950, 113—125.
3. *M. Tsuji.* A theorem on the boundary behavior of a meromorphic functions in $|z| < 1$, Comment. Math. Univ. st., Pauli, 8, № 1, 1960, 53—55.
4. *В. И. Гаврилов.* Об одной теореме Цудзи, Сибирск. матем. журнал, 14, № 5, 1973, 951—956.
5. *В. И. Гаврилов.* О теоремах Берлинга, Карлесона и Цудзи относительно исключительных множеств, Матем. сб., 94 (136), № 1, 1974, 3—15.
6. *С. Сакс.* Теория интеграла, ИИЛ., М., 1949.
7. *F. Bagemihl.* Curvilinear cluster sets of arbitrary functions, Proc. Nat. Acad. Sci, USA, 41, 1955, 379—382.
8. *А. Н. Айрапетян.* Об исключительных множествах подклассов мероморфных функций ограниченного вида, Изв. АН Арм.ССР, сер. „Математика", XI, № 1, 1976, 25—33.