ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 3, 1977 Математика

Л. Д. ГРИГОРЯН

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ Э. ЛАНДАУ

1°. Пусть $U = \{z: |z| < 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости, Γ — его граница, K — непустое подмножество U. Для любого натурального числа n обозначим через $M_n(U, K)$ совокупность всех функций f, мероморфных в круге U и таких, что

а) число полюсов f в U (с учетом кратностей) не превосходит n и все они принадлежат множеству K;

б) $$\|f\|_\Gamma = \sup_{z \in \Gamma} \overline{\lim_{\zeta \to z,\ \zeta \in U}} |f(\zeta)| \leqslant 1.$$

Пусть R_f — сумма главных частей функции $f \in M_n(U, K)$ по всем ее полюсам в U. Положим

$$\lambda_n(U, K) = \sup\{\|R_f\|_\Gamma: f \in M_n(U, K)\}.$$

В работе [2] показано*, что $\lambda_n(U, U) \asymp n$ (в этом случае на расположение полюсов f в U нет никаких ограничений). Задача об оценке роста $\lambda_n(U, K)$ существенно упрощается, когда $K \Subset U$; порядок роста $\lambda_n(U, K)$ в этом случае логарифмический и можно получить соответствующую точную асимптотику.

А именно, справедлива следующая

Теорема. *Для любого* $K \subset\subset U$ *имеем*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda_n(U, K)}{\log n} = \frac{1}{\pi}. \tag{1}$$

Легко видеть, что если множество K состоит из единственной точки $z = 0$, то

$$\lambda_n(U, \{0\}) = \sup_{f \in B_1} \|T_{n-1}(f)\|_\Gamma,$$

где B_1 — класс голоморфных в U функций, таких, что $|f(z)| \leqslant 1$, $z \in U$, и $T_{n-1}(f)(z) = \sum_{\nu=0}^{n-1} f^{(\nu)}(0)\, z^\nu/\nu!$ — полином Тейлора функции f. Тем самым, в случае $K = \{0\}$ соотношение (1) сводится к хорошо известному результату Э. Ландау [3].

* В работе [2] рассматривалась величина $\Lambda_n(U)$, определяемая аналогично $\lambda_n(U, U)$ с заменой R_f на $f^* = f - R_f$; ясно, что $|\Lambda_n(U) - \lambda_n(U, U)| < 1$ для всех $n \geqslant 1$.

2°. Для доказательства теоремы мы применим прием, использованный в работе [1].

Оценим сначала $\lambda_n(U, K)$ сверху. Пусть f—произвольная функция, принадлежащая $M_n(U, K)$; без ограничения общности можно считать, что число полюсов f в U равно $n>1$ (каждый полюс выписывается столько раз какова его кратность). Из принципа максимума модуля следует неравенство

$$|f(z)| \leqslant \prod_{\nu=1}^{n} \left| \frac{1-\bar{a}_\nu z}{z-a_\nu} \right|, \quad z \in U. \tag{2}$$

Положим

$$\rho_n = e^{-1/n \log n}, \quad g_n(a) = \left\{ z \in U: \left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < \rho_n \right\}, \quad g_n = \bigcup_{\nu=1}^{n} g_n(a_\nu).$$

Из оценки (2) получим, что

$$|f(z)| \leqslant e^{1/\log n}, \quad z \in U \setminus g_n. \tag{3}$$

Используя тот факт, что все $a_\nu \in K \subset\subset U$, получаем

$$g_n \subset U_n(K) = \{z: |z| \leqslant 1 - C(K)/n \log n\}, \tag{4}$$

где $C(K)$ $(0 < C(K) < \infty)$ зависит только от K (точнее от расстояния K до границы круга Γ); мы опускаем простые вычисления, из которых следует соотношение (4). Поскольку все полюсы функции f принадлежат $U_n(K)$, по формуле Коши имеем

$$R_f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial U_n(K)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \bar{\in} U_n(K).$$

Используя (3), из последнего соотношения получаем

$$|R_f(z)| \leqslant \frac{e^{1/\log n}}{2\pi} \int\limits_{\partial U_n(K)} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}, \quad z \bar{\in} U_n(K).$$

Отсюда, с учетом определения $U_n(K)$, находим

$$\|R_f\|_\Gamma \leqslant \frac{e^{1/\log n}}{2\pi} \int\limits_{\partial U_n(K)} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - 1|} \leqslant \frac{e^{1/\log n}}{2\pi} \left(2 \log \frac{n \log n}{C(K)} + C \right),$$

буквой C (с различными индексами) здесь и далее будем обозначать положительные абсолютные постоянные. Замечая, что последняя оценка справедлива для произвольной функции $f \in M_n(U, K)$, получаем

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\lambda_n(U, K)}{\log n} \leqslant \frac{1}{\pi}. \tag{5}$$

Чтобы оценить $\lambda_n(U, K)$ снизу, модифицируем сначала пример Э. Ландау. Пусть a есть произвольная точка, принадлежащая K; не уменьшая общности можно считать $0 \leqslant a < 1$. Введем следующие обозначения:

$$P_n(z)=1+\frac{1}{2}z+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}z^2+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}z^n,$$

$$K_n(z)=\frac{P_n(1/z)}{P_n(z)},\ K_{n,a}(z)=K_n\left(\frac{z-a}{1-az}\right)$$

($P_n(z)$ есть частная сумма Тейлора функции $1/\sqrt{1-z}$). В [3] показано, что при любом n многочлен $P_n(z)$ не имеет корней в круге U. Следовательно, единственной особой точкой рациональной функции $K_{n,a}(z)$ в U является полюс n-го порядка в точке a. Но $|K_{n,a}(z)|=1$, $z\in\Gamma$, поэтому $K_{n,a}(z)\in M_n(U,\{a\})$ ($M_n(U,\{a\})\subset M_n(U,K)$, так как $a\in K$).

Для $z=e^{i\theta}$, $0<|\theta|\leqslant\pi$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1-z}}-P_n(z)\right|=\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^{2(n+1)}\varphi d\varphi}{1-\sin^2\varphi\cdot z}\right|\leqslant\frac{C_1}{\sqrt{n}\cdot|\theta|},$$

отсюда

$$|1-\sqrt{1-z}\,P_n(z)|\leqslant\frac{C_2}{\sqrt{n|\theta|}}\tag{6}$$

(относительно последних оценок см. [4]).

Из (6) следует, что

$$\left|\arg\frac{1}{\sqrt{1-z}}-\arg P_n(z)\right|\leqslant\frac{C_3}{\sqrt{n|\theta|}},$$

откуда получаем

$$\left|\arg\frac{1}{1-z}+\arg K_n(z)\right|\leqslant\frac{2C_3}{\sqrt{n|\theta|}}\tag{7}$$

(здесь также $z=e^{i\theta}$, $0<|\theta|\leqslant\pi$; $\arg K_n(z)=-2\arg P_n(z)$). Подставляя в (7) вместо z выражение $\dfrac{z-a}{1-az}$, для любого a ($0\leqslant a<1$) имеем

$$\left|\arg(1-az)+\arg\frac{1}{1-z}+\arg K_{n,a}(z)\right|<C_4\sqrt{\frac{1-a}{n|\theta|}};\tag{8}$$

для этого надо заметить, что $\left|\arg\dfrac{z-a}{1-az}\right|\geqslant C_5\dfrac{|\theta|}{1-a}$. Нетрудно показать, что для $\rho_n=e^{-1/n}$

$$g_n(a)=\left\{z:\left|\frac{z-a}{1-az}\right|<\rho_n\right\}\subset\left\{z\in U:|z-1|\geqslant\frac{C_6(1-a)}{n}\right\}=G_n(a).$$

При надлежащей ориентации границы множества $G_n(a)$ имеем

$$R_{K_{n,a}}(1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G_n(a)}\frac{K_{n,a}(z)}{1-z}\,dz$$

($R_{K_{n,a}}(1)$ — значение главной части функции $K_{n,a}(z)$ в точке 1). Учитывая (2) и определение множества $g_n(a)$, для произвольного n получаем

$$|K_{n,a}(z)| \leqslant e, \quad z \in \partial G_n(a).$$

Следовательно

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{U\cap\partial G_n(a)} \frac{K_{n,a}(z)}{1-z}\,dz\right| \leqslant \frac{e}{2\pi}\int\limits_{|z-1|=r_n(a)} \frac{|dz|}{|z-1|} = e\left(r_n(a) = \frac{C_6(1-a)}{n}\right).$$

Поэтому

$$|R_{K_{n,a}}(1)| \geqslant \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma\cap\partial G_n(a)} \frac{K_{n,a}(z)}{1-z}\,dz\right| - e. \tag{9}$$

Очевидно

$$\Gamma\cap\partial G_n(a) = \Gamma_n(a) \subset \left\{z = e^{i\theta}\colon \frac{C_7(1-a)}{n} \leqslant |\theta| \leqslant \pi\right\}.$$

Так как для

$$z \in \Gamma_n'(a) = \left\{z = e^{i\theta}\colon \frac{C_7(1-a)\log n}{n} \leqslant |\theta| \leqslant \frac{C_7(1-a)}{\log n}\right\},$$

$$|\arg(1-az)| \leqslant C_8/\log n,$$

то из (7) получаем

$$\left|\arg\frac{K_{n,a}(z)}{1-z}\right| < \frac{C_9}{\sqrt{\log n}}, \quad z \in \Gamma_n'(a).$$

Из последнего соотношения следует, что

$$\operatorname{Re}\frac{K_{n,a}(z)\cdot z}{1-z} \geqslant \left(1-\frac{C_{10}}{\log n}\right)\left|\frac{K_{n,a}(z)\cdot z}{1-z}\right| \geqslant \left(1-\frac{C_{10}}{\log n}\right)\frac{1}{|\theta|},$$

$$z = e^{i\theta} \in \Gamma_n'(a).$$

Отсюда (при $z = e^{i\theta}$, $dz = iz\,d\theta$)

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n'(a)} \frac{K_{n,a}(z)}{1-z}\,dz\right| \geqslant \left|\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n'(a)} \frac{K_{n,a}(z)}{1-z}\,dz\right| \geqslant$$

$$\geqslant 2\left(1-\frac{C_{10}}{\log n}\right)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\theta_n'(a)}^{\theta_n''(a)} \frac{d\theta}{\theta},$$

где

$$\theta_n'(a) = \frac{C(1-a)}{n}\log n, \quad \theta_n''(a) = \frac{C(1-a)}{\log n}.$$

Теперь нетрудно заметить, что

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n'(a)}\frac{K_{n,a}(z)}{1-z}\,dz\right|\geqslant\left(\frac{1}{\pi}-\varepsilon_n\right)\log n,\ \lim_{n\to\infty}\varepsilon_n=0. \tag{10}$$

Из определения множеств $\Gamma_n(a)$ и $\Gamma_n'(a)$ имеем

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n(a)\setminus\Gamma_n'(a)}\frac{K_{n,a}(z)}{1-z}\,dz\right|\leqslant C(a)\log\log n, \tag{11}$$

$C(a)<\infty$ зависит только от a.

Объединяя оценки (9), (10) и (11), получаем

$$|R_{K_{n,a}}(1)|\geqslant\left(\frac{1}{\pi}-\varepsilon_n(a)\right)\log n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n(a)=0.$$

Тем самым аналогичное неравенство справедливо и для $\lambda_n(U,\{a\})$. Так как $\lambda_n(U,K)\geqslant\lambda_n(U,\{a\})$, мы получаем соотношение

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\lambda_n(U,K)}{\log n}\geqslant\frac{1}{\pi}. \tag{12}$$

Из соотношений (5) и (12) вытекает (1). Теорема доказана.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступила 15.XII.1976

Լ. Դ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Է. Լանդաուի մի թեորեմի ընդհանրացումը (*ամփոփում*)

Ներկա հոդվածում ստացված է միավոր շրջանում մերոմորֆ ֆունկցիաների որոշակի դասում գործող պրոեկտորի նորմայի աճի ասիմպտոտիկան։

L. D. GRIGORIAN. *A generalisation of a theorem of E. Landau's* (summary)

The asymptotics of the growth for the norme of a projector in a class of functions, meromorphic in the unit disk, is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Гончар, Л. Д. Григорян.* Об оценках нормы голоморфной составляющей мероморфной функции, Матем. сб., 99 (141), № 4, 1976, 634—638.
2. *Л. Д. Григорян.* Оценки нормы голоморфных составляющих мероморфных функций в областях с гладкой границей, Матем. сб., 100 (142), № 1, 1976, 156—164.
3. *E. Landau.* Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Functionentheorie, 1929.
4. *С. Я. Хавинсон.* Оценка сумм Тейлора ограниченных аналитических функций в круге, ДАН СССР, LXXX, № 3, 1951, 333—336.