

Л. А. ГАЛСТЯН

АНАЛИТИЧЕСКИЕ j -РАСТЯГИВАЮЩИЕ
МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ И ПРОБЛЕМА ШУРА

Существует ряд исследований, посвященных различным обобщениям рассматриваемой в настоящей статье проблемы Шура [1]. Среди них следует упомянуть интересную работу В. М. Адамяна, Д. З. Арова и М. Г. Крейна [10], заметку И. П. Федчиной [11], а также „проблему АСГ“ А. А. Нудельмана (доклад на семинаре Одесс. инс. нар. хоз.).

В отличие от этих работ целью настоящей статьи является установление тесной взаимосвязи матричной проблемы Шура с теорией аналитических j -растягивающих матриц-функций [3, 2, 4]. В этом плане к нашей задаче наиболее близки исследования И. В. Ковалишиной и В. П. Потапова [6, 7, 8], посвященные классическим проблемам Неванлинны-Пика, Каратеодори и проблеме моментов.

В первом параграфе излагаются некоторые свойства элементарного кратного множителя—объекта теории аналитических j -растягивающих матриц-функций. Важными здесь являются теорема 2 „об отщеплении кратного множителя“ и теорема 3 „о параметризации“.

Основной результат статьи содержится в § 2, где приводится постановка матричной проблемы Шура и ее решение методами теории j -растягивающих матриц-функций. Устанавливается, что любая проблема Шура с невырожденным информационным блоком основного матричного неравенства* адекватна заданию некоторого, вполне определенного кратного множителя полного ранга.

Использованные в статье основные понятия и определения можно найти в работах [4, 5, 6].

В терминологии и некоторых обозначениях мы придерживаемся работ [4, 5].

Считаем своим приятным долгом поблагодарить И. В. Ковалишину за многочисленные поправки и замечания, а также В. П. Потапова, под чьим руководством выполнена данная работа.

* Основное матричное неравенство проблемы Шура, с вырожденным информационным блоком, соответствует известной экстремальной задаче Фейера и является предметом для самостоятельного решения. См. также примечание на стр. 224.

§ 1. Элементарный кратный множитель

1.1°. Определение и основные свойства

Определение [5]. Аналитическая матрица-функция $A(\zeta)$, порядка N , имеющая в расширенной комплексной плоскости единственный полюс произвольной кратности, называется J -растягивающим в единичном круге элементарным кратным множителем, если она J -растягивающая внутри круга и J -унитарна на его границе, т. е.

$$A(\zeta) J A^*(\zeta) - J \geq 0, |\zeta| < 1,$$

$$A(\zeta) J A^*(\zeta) - J = 0, |\zeta| = 1,$$

или, в равной степени

$$A^*(\zeta) J A(\zeta) - J \geq 0, |\zeta| < 1,$$

$$A^*(\zeta) J A(\zeta) - J = 0, |\zeta| = 1.$$

Здесь J — постоянная, эрмитовая и инволютивная матрица порядка N

$$J^* = J, J^2 = I.$$

Нас сейчас будет интересовать тот частный случай, когда J имеет вид

$$J = j = \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}, N = 2m,$$

а полюс матрицы-функции находится, в зависимости от ситуации, в точках $\zeta = 0$, или $\zeta = \infty$.

Добавим, что всюду здесь элементарный кратный множитель нормируется к единице в точке $\zeta = 1$, т. е. $A(1) = I$.

Структура элементарных кратных множителей выяснена в работе [3]. Мы приведем лишь формулировки двух критериев элементарности кратного множителя для нашего случая.

Теорема 1. Для того чтобы матрица-функция

$$A(\zeta) = \frac{c_0}{\zeta^{n+1}} + \frac{c_1}{\zeta^n} + \dots + \frac{c_n}{\zeta} + c_{n+1}$$

была j -растягивающим элементарным множителем, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\Gamma / \Gamma^* \geq 0 \tag{A}$$

и равенства

$$[I, \dots, I] \Gamma / \Gamma^* = [j, \dots, j] \Gamma^*, \tag{B}$$

где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_0 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} j & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & j \end{bmatrix}.$$

При этом j -форма матрицы-функции $A(\zeta)$ вычисляется по формуле

$$\frac{A(\zeta) j A^*(\zeta) - j}{1 - |\zeta|^2} = \left[\frac{I}{\zeta^{n+1}}, \dots, \frac{I}{\zeta} \right] \Gamma J \Gamma^* \begin{bmatrix} \frac{I}{\bar{\zeta}^{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{I}{\bar{\zeta}} \end{bmatrix}.$$

Аналогично формулируется дуальная

Теорема 1'. В обозначениях теоремы 1 выполнение условий

$$\Gamma^* J \Gamma \geq 0, \quad (A')$$

$$[I, \dots, I] \Gamma^* J \Gamma = [i, \dots, i] \Gamma \quad (B')$$

необходимо и достаточно для того, чтобы матрица-функция $A(\zeta)$ была j -растягивающим элементарным множителем. При этом

$$\frac{A^*(\zeta) j A(\zeta) - j}{1 - |\zeta|^2} = \left[\frac{I}{\zeta}, \dots, \frac{I}{\zeta^{n+1}} \right] \Gamma^* J \Gamma \begin{bmatrix} \frac{I}{\bar{\zeta}} \\ \vdots \\ \frac{I}{\bar{\zeta}^{n+1}} \end{bmatrix}.$$

В доказательстве приведенных теорем существенно используются основное и дуальное матричные неравенства Шварца-Пика, а также „принцип симметрии“ для j -растягивающих матриц-функций [4]. Последнее в нашем случае принимает форму

$$A(\zeta) = j A^{-1*} \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) j. \quad (1.1)$$

Ниже мы воспользуемся ими при выводе основного неравенства отщепления j -растягивающих элементарных множителей.

Замечание. Без труда проверяется, что матрица Γ удовлетворяет соотношению

$$\Gamma F = F \Gamma, \quad (1.2)$$

где

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем мы часто будем иметь дело с матрицами, характеризующимися равенством (1.2). Класс таких блок-матриц обозначим через $G_{p,q}$, где p указывает на порядок каждого блока, а $p(q+1)$ — порядок самих матриц этого класса.

Следующие утверждения очевидны:

1. Класс $G_{p,q}$ аддитивен и мультипликативен. Более того, если $\Gamma \in G_{p,q}$ и Γ^{-1} существует, то $\Gamma^{-1} \in G_{p,q}$.

2. Для любой матрицы $\Gamma \in G_{p,q}$

$$\Gamma E = E \Gamma, \quad (1.3)$$

где

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ I & I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I & I & \dots & I \end{bmatrix}.$$

3. Отображение

$$w(\zeta) (= a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_q \zeta^q + \dots) \rightarrow L \left(= \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_q & a_{q-1} & \dots & a_0 \end{bmatrix} \right)$$

класса голоморфных в круге $|\zeta| < 1$ матриц-функций порядка p на $G_{p,q}$ обладает свойствами аддитивности и мультипликативности в том смысле, что если

$$w_1(\zeta) \rightarrow L_1, \quad w_2(\zeta) \rightarrow L_2,$$

то

$$w_1(\zeta) + w_2(\zeta) \rightarrow L_1 + L_2 \text{ и } w_1(\zeta) w_2(\zeta) \rightarrow L_1 L_2.$$

1.2°. Отщепление элементарных кратных множителей

1. Пусть $w(\zeta)$ — произвольная аналитическая j -растягивающая в единичном круге матриц-функция порядка $2m$ с полюсом кратности $n+1$ в точке $\zeta=0$ и лорановым разложением

$$w(\zeta) = \frac{a_0}{\zeta^{n+1}} + \frac{a_1}{\zeta^n} + \dots + \frac{a_n}{\zeta} + \dots,$$

Выберем произвольный набор отличных от нуля точек $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ из открытого единичного круга и запишем неравенство Шварца-Пика для матрицы-функции $w(\zeta)$

$$\left| \begin{array}{c} \frac{w(\zeta_0)jw^*(\zeta_0)-j}{1-|\zeta_0|^2} \dots \frac{w(\zeta_0)jw^*(\zeta_n)-j}{1-\zeta_0\bar{\zeta}_n} \\ \hline \frac{w(\zeta_n)jw^*(\zeta_0)-j}{1-\zeta_n\bar{\zeta}_0} \dots \frac{w(\zeta_n)jw^*(\zeta_n)-j}{1-|\zeta_n|^2} \\ \hline * \\ \frac{w^*(\zeta)jw(\zeta)-j}{1-|\zeta|^2} \end{array} \right| \begin{array}{c} \frac{w(\zeta)-w(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0} \\ \hline \frac{w(\zeta)-w(\zeta_n)}{\zeta-\zeta_n} \\ \hline \frac{w^*(\zeta)jw(\zeta)-j}{1-|\zeta|^2} \end{array} \geq 0. \quad (1.4)$$

Соответствующее дуальное неравенство имеет вид

$$\left| \begin{array}{c} \frac{w^*(\zeta_0)jw(\zeta_0)-j}{1-|\zeta_0|^2} \dots \frac{w^*(\zeta_0)jw(\zeta_n)-j}{1-\bar{\zeta}_0\zeta_n} \\ \hline \frac{w^*(\zeta_n)jw(\zeta_0)-j}{1-\bar{\zeta}_n\zeta_0} \dots \frac{w^*(\zeta_n)jw(\zeta_n)-j}{1-|\zeta_n|^2} \\ \hline * \\ \frac{w(\zeta)jw^*(\zeta)-j}{1-|\zeta|^2} \end{array} \right| \begin{array}{c} \frac{w^*(\zeta)-w^*(\zeta_0)}{\zeta-\zeta_0} \\ \hline \frac{w^*(\zeta)-w^*(\zeta_n)}{\zeta-\zeta_n} \\ \hline \frac{w(\zeta)jw^*(\zeta)-j}{1-|\zeta|^2} \end{array} \geq 0. \quad (1.5)$$

Так же как и в [5], введем скалярные функции

$$\varphi_k(\zeta) = (\zeta - \zeta_0) \dots (\zeta - \zeta_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

и составим по ним матрицу

$$T = \left| \begin{array}{cccc|c} \frac{I}{\varphi'_0(\zeta_0)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{I}{\varphi'_1(\zeta_0)} & \frac{I}{\varphi'_1(\zeta_1)} & \dots & 0 & 0 \\ \hline \frac{I}{\varphi'_n(\zeta_0)} & \frac{I}{\varphi'_n(\zeta_1)} & \dots & \frac{I}{\varphi'_n(\zeta_n)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & I \end{array} \right| = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

Обозначим еще

$$V = \left| \begin{array}{cccc|c} \zeta_0^{n+1} I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_1^{n+1} I & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \zeta_n^{n+1} I & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & I \end{array} \right|.$$

Умножая (1.4) слева на матрицу TV , справа на сопряженную, а (1.5) — слева на T^*V^* , справа на VT , в пределе, когда $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ стремятся к нулю, получим соответственно два неравенства

$$\begin{bmatrix} A (=LJL^*) & B \\ B^* & \frac{w^*(\zeta)jw(\zeta)-j}{1-|\zeta|^2} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (I)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} (= L^* J L) & \tilde{B} \\ \tilde{B}^* & \frac{w(\zeta) j w^*(\zeta) - j}{1 - |\zeta|^2} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (I')$$

где

$$L = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}, \quad B = L \begin{bmatrix} \frac{I}{\zeta} \\ \vdots \\ \frac{I}{\zeta^{n+1}} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = L^* \begin{bmatrix} \frac{I}{\bar{\zeta}^{n+1}} \\ \vdots \\ \frac{I}{\bar{\zeta}} \end{bmatrix}.$$

Неравенства (I) и (I') называются основным и дуальным неравенствами отщепления.

С их помощью строятся элементарные кратные множители, отщепляемые от $w(\zeta)$ соответственно справа и слева.

II. Рассмотрим сначала неравенство (I).

По лемме о неотрицательной блок-матрице (см., например, [4]) имеем

- 1) $A \geq 0$,
- 2) уравнение $AX = B$ имеет решение,
- 3) $\frac{w^*(\zeta) j w(\zeta) - j}{1 - |\zeta|^2} - X^* A X \geq 0$.

Учитывая вид блоков A и B , нетрудно усмотреть, что в качестве X можно взять матрицу

$$X = \begin{bmatrix} \frac{q_{00}}{\zeta} + \cdots + \frac{q_{0n}}{\zeta^{n+1}} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{q_{n0}}{\zeta} + \cdots + \frac{q_{nn}}{\zeta^{n+1}} & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

где матрица

$$Q = \begin{bmatrix} q_{00} & \cdots & q_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n0} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

является решением уравнения $AQ = L$, разрешимость которого непосредственно следует из разрешимости уравнения $AX = B$.

Рассмотрим теперь третье условие леммы.

В подробной записи оно выглядит так

$$\frac{w^*(\zeta) j w(\zeta) - j}{1 - |\zeta|^2} - \left[\frac{I}{\bar{\zeta}}, \dots, \frac{I}{\bar{\zeta}^{n+1}} \right] Q^* A Q \begin{bmatrix} \frac{I}{\zeta} \\ \vdots \\ \frac{I}{\zeta^{n+1}} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (1.7)$$

Введем матрицу-функцию

$$A(\zeta) = I + (1 - \zeta)[j, \dots, j] Q^* A Q \begin{bmatrix} \frac{I}{\zeta} \\ \vdots \\ \frac{I}{\zeta^{n+1}} \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Используя представление

$$\begin{bmatrix} j \\ \vdots \\ j \end{bmatrix} j[j, \dots, j] = EJ + JE^* - J,$$

соотношение (1.3) для матрицы $AQ = L \in G_{2m, n}$, а также равенство

$$\begin{bmatrix} \frac{I}{\bar{\zeta}} \\ \vdots \\ \frac{I}{\bar{\zeta}^{n+1}} \end{bmatrix} E^* = \frac{1}{1 - \bar{\zeta}} \begin{bmatrix} \frac{I}{\bar{\zeta}} \\ \vdots \\ \frac{I}{\bar{\zeta}^{n+1}} \end{bmatrix} - \frac{1}{1 - \bar{\zeta}} [I, \dots, I],$$

после несложных преобразований приходим к выражению для j -формы

$$\frac{A^*(\zeta) j A(\zeta) - j}{1 - |\zeta|^2} = \begin{bmatrix} \frac{I}{\bar{\zeta}} \\ \vdots \\ \frac{I}{\bar{\zeta}^{n+1}} \end{bmatrix} Q^* A Q \begin{bmatrix} \frac{I}{\zeta} \\ \vdots \\ \frac{I}{\zeta^{n+1}} \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Сравнивая последнее с (1.7), получим неравенство

$$\frac{w^*(\zeta) j w(\zeta) - j}{1 - |\zeta|^2} - \frac{A^*(\zeta) j A(\zeta) - j}{1 - |\zeta|^2} \geq 0,$$

которое и означает, что матрица-функция $A(\zeta)$ отщепляется от $w(\zeta)$ справа, т. е.

$$w(\zeta) = w_1(\zeta) A(\zeta),$$

где $w_1(\zeta)$ — некоторая аналитическая j -растягивающая в круге $|\zeta| < 1$ матрица-функция.

Из (1.9) видно, что $A(\zeta)$ — элементарный кратный множитель с полюсом в точке $\zeta = 0$.

Покажем, что при этом отщеплении частное $w_1(\zeta)$ голоморфно в точке $\zeta = 0$, а кратность полюса обратной матрицы $w_1^{-1}(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$ не повышается.

В самом деле, пусть

$$A(\zeta) = \frac{c_0}{\zeta^{n+1}} + \frac{c_1}{\zeta^n} + \dots + \frac{c_n}{\zeta} + c_{n+1} \quad (1.10)$$

— лорановое разложение матрицы-функции $A(\zeta)$.

Из двух представлений (1.8) и (1.10) найдем связь

$$[j, \dots, j] Q^* A Q = [I, \dots, I] \Gamma,$$

где, как и выше

$$\Gamma = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_0 \end{bmatrix}.$$

Но $Q^* A = L^*$, так что

$$\Gamma^* \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} = L^* Q \begin{bmatrix} j \\ \vdots \\ j \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

откуда

$$L \Gamma^* \begin{bmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix} = A Q \begin{bmatrix} j \\ \vdots \\ j \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} j \\ \vdots \\ j \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

По „принципу симметрии“ (1.1) имеем

$$w_1(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{n+1}} [(a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_n \zeta^n + \dots)(j c_0^* j \zeta^{n+1} + \dots + j c_{n+1}^* j)]. \quad (1.13)$$

Учитывая условие нормировки, которое здесь означает, что

$$c_0 + c_1 + \dots + c_{n+1} = I,$$

легко убедиться, что соотношение (1.12) обеспечивает равенство нулю первых $n+1$ коэффициентов тейлорового разложения выражения в квадратных скобках (1.13), а тем самым и голоморфность $w_1(\zeta)$.

Пусть, далее

$$w^{-1}(\zeta) = \frac{d_0}{\zeta^{p+1}} + \frac{d_1}{\zeta^p} + \dots$$

— лорановое разложение матрицы-функции $w^{-1}(\zeta)$.

Имеем

$$w_1^{-1}(\zeta) = A(\zeta) w^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\zeta^{n+p+2}} [(c_0 + c_1 \zeta + \dots)(d_0 + d_1 \zeta + \dots)].$$

И тут ясно, что равенство нулю первых $n+1$ тейлоровых коэффициентов выражения в квадратных скобках в последнем соотношении равносильно условию (см. замечание п. 1.1°) $\Gamma D = 0$, где

$$D = \begin{bmatrix} d_0 & 0 & \dots & 0 \\ d_1 & d_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_n & d_{n-1} & \dots & d_0 \end{bmatrix}.$$

Но вследствие (1.11)

$$[I, \dots, I] \Gamma D = [j, \dots, j] Q^* L \Gamma$$

и остается, заметить, что равенство $LD = 0$ является тривиальным следствием тождества $w(\zeta) w^{-1}(\zeta) = I$.

Итак, доказана

Теорема 2. Пусть j -растягивающая матрица-функция $w(\zeta)$ имеет в точке $\zeta = 0$ полюс кратности $n + 1$ с лорановым разложением

$$w(\zeta) = \frac{a_0}{\zeta^{n+1}} + \frac{a_1}{\zeta^n} + \dots + \frac{a_n}{\zeta} + \dots$$

Пусть, далее, Q — матрица, являющаяся решением уравнения $AQ = L$. Тогда

1) матрица-функция

$$A(\zeta) = I + (1 - \zeta)[j, \dots, j] Q^* A Q \begin{pmatrix} \frac{I}{\zeta} \\ \vdots \\ \frac{I}{\zeta^{n+1}} \end{pmatrix}$$

является элементарным j -растягивающим кратным множителем с полюсом кратности $n + 1$ в точке $\zeta = 0$.

2) $A(\zeta)$ отщепляется от $w(\zeta)$ справа

$$w(\zeta) = w_1(\zeta) A(\zeta),$$

3) при этом отщеплении $w_1(\zeta)$ голоморфна в точке $\zeta = 0$, а кратность полюса обратной матрицы $w_1^{-1}(\zeta)$ в точке $\zeta = 0$ не превышает кратность полюса $w^{-1}(\zeta)$.

Замечание 1. Выражение $Q^* A Q$ не зависит от выбора решения уравнения $AQ = L$.

Действительно, если $AQ_1 = L$, то

$$Q_1^+ A Q_1 = Q_1^* L = Q_1^* A Q = L^* Q = Q^* A Q.$$

Замечание 2. Если исходная матрица-функция $w(\zeta)$ является элементарным кратным множителем, то отщепляемая от нее по формулам теоремы 2 матрица-функция $A(\zeta)$ совпадает с ней.

В самом деле, для $w(\zeta)$ выполняются условия (B) теоремы 1 и (B') теоремы 1', откуда следует, что в качестве решения уравнения $AQ = L$ можно взять матрицу $Q = JL$, и следовательно в качестве решения уравнения $AX = B$ матрицу

$$X = JL \begin{vmatrix} \frac{I}{\zeta} \\ \vdots \\ \frac{I}{\zeta^{n+1}} \end{vmatrix}.$$

Непосредственный подсчет j -форм матрицы-функции $w(\zeta)$ и построенного по Q элементарного множителя $A(\zeta)$ приводит к тождеству

$$\frac{w^*(\zeta) j w(\zeta) - j}{1 - |\zeta|^2} \equiv \frac{A^*(\zeta) j A(\zeta) - j}{1 - |\zeta|^2},$$

из которого следует совпадение матриц-функций $w(\zeta)$ и $A(\zeta)$ с точностью до j -унитарного постоянного множителя U , т. е.

$$w(\zeta) = UA(\zeta).$$

Учитывая еще условие нормировки, получим их полное совпадение.

Замечание 3. В условиях замечания 2 умножим основное неравенство отщепления (1) слева на

$$T = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

где V — неособенная матрица, а справа — на T^* .

Описанная в теореме 2 процедура опять приведет к построению элементарного множителя, совпадающего с $w(\zeta)$.

Отметим, наконец, что отправляясь от дуального неравенства (I') и повторяя вышеприведенную процедуру, мы построим элементарный кратный множитель $B(\zeta)$, отщепляемый от $w(\zeta)$ слева, т. е.

$$w(\zeta) = B(\zeta) w_2(\zeta).$$

1.3°. Элементарные кратные множители полного ранга. Для j -растягивающего элементарного кратного множителя (как и впрочем для произвольной аналитической j -растягивающей в единичном круге матрицы-функции порядка $2m$) с лорановым разложением

$$A(\zeta) = \frac{c_0}{\zeta^{n+1}} + \frac{c_1}{\zeta^n} + \dots + \frac{c_n}{\zeta} + c_{n+1} \quad (1.14)$$

имеет место неравенство $\text{rang } c_0 \leq m$.

В том случае, когда последнее превращается в равенство, $A(\zeta)$ называется элементарным множителем полного ранга.

На деле же можно утверждать большее, а именно:

Для любой j -растягивающей матрицы-функции $w(\zeta)$ с главной частью лоранового разложения, совпадающей с (1.14), верно неравенство

$$\text{rang } \Gamma \leq m(n+1),$$

где, как всегда

$$\Gamma = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & c_0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}.$$

Доказательство последнего предложения весьма просто.

Из неравенств (I) и (I'), по лемме о неотрицательной блок-матрице имеем

- а) $\Gamma/\Gamma^* \geq 0$, уравнение $\Gamma/\Gamma^* X_1 = \Gamma$ имеет решение;
- б) $\Gamma^*/\Gamma \geq 0$, уравнение $\Gamma^*/\Gamma X_2 = \Gamma^*$ имеет решение.

Отсюда немедленно следует

$$\text{rang } \Gamma = \text{rang } \Gamma/\Gamma^* = \text{rang } \Gamma^*/\Gamma. \quad (1.15)$$

Введем унитарную матрицу порядка $2m(n+1)$

$$S = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}.$$

Запишем „треугольное представление“ неотрицательной матрицы

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} = S^* \Gamma / \Gamma^* S \geq 0. \quad (1.16)$$

Имеем

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & X_0^* \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - X_0^* C X_0 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_0 & I \end{bmatrix}, \quad (1.17)$$

где X_0 — решение заведомо разрешимого уравнения $CX_0 = B^*$.

Подставляя (1.17) в неравенство

$$S^* \Gamma / \Gamma^* S S^* / S S^* \Gamma / \Gamma^* S = S^* \Gamma / \Gamma^* / \Gamma / \Gamma^* S \geq 0$$

и произведя умножение, легко придем к неравенству

$$\begin{bmatrix} -(A - X_0^* C X_0)^2 & -(A - X_0^* C X_0) X_0^* C \\ -C X_0 (A - X_0^* C X_0) & C (I - X_0 X_0^*) C \end{bmatrix} \geq 0,$$

из которого следует равенство

$$A - X_0^* C X_0 = 0.$$

Последнее, вместе с (1.15), (1.16) и (1.17) означает, что

$$\text{rang } \Gamma = \text{rang } C \leq m(n+1).$$

Замечание. Ясно, что для элементарных кратных множителей полного ранга вида (1.14) выполняется равенство

$$\text{rang } \Gamma = m(n+1).$$

1.4°. Параметризация элементарных кратных множителей полного ранга.

Теорема 3. (о параметризации). Для того чтобы матрица-функция порядка $2m$

$$A(\zeta) = \frac{c_0}{\zeta^{n+1}} + \frac{c_1}{\zeta^n} + \dots + \frac{c_n}{\zeta} + c_{n+1}$$

была элементарным кратным множителем полного ранга, необходимо и достаточно, чтобы существовали параметры $a_0, a_1, \dots, a_n$, являющиеся квадратными матрицами m -го порядка, удовлетворяющими условию

$$I - LL^* > 0,$$

где

$$L = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \end{bmatrix} \in G_{m,n},$$

такие, что матрица-функция $A(\zeta)$ допускает представление

$$A(\zeta) = I + j \frac{1-\zeta}{\zeta} \begin{bmatrix} u(1) & 0 \\ 0 & u(1) \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} u^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0 \\ 0 & u^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \end{bmatrix}, \quad (1.18)$$

в котором

$$u(\zeta) = u_n(\zeta) = [I_m, \zeta I_m, \dots, \zeta^n I_m],$$

$$H = H_n = \begin{bmatrix} L^* \\ I \end{bmatrix} (I - LL^*)^{-1} [L, I], \quad (I = L_n).$$

При этом параметры $a_0, a_1, \dots, a_n$ (т. е. матрица L) определяются по $A(\zeta)$ однозначно.

Доказательство. Пусть $A(\zeta)$ — элементарный кратный множитель полного ранга и

$$\Gamma = \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n-1} & \dots & c_0 \end{bmatrix}$$

— связанная с ним матрица из класса $G_{2m,n}$.

Разобьем на блоки размерности m матрицы

$$c_k = \begin{bmatrix} x_k & y_k \\ z_k & t_k \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Умножением справа на введенную в п. 1.3° матрицу S , а слева — на S^* , матрицу Γ приведем к виду

$$S^* \Gamma S = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}, \quad (1.19)$$

где, очевидно, все блоки X, Y, Z, T принадлежат $G_{m,n}$.

Далее, как было показано в п. 1.3°, (1.17) можно переписать в виде

$$S^* \Gamma / \Gamma^* S = \begin{bmatrix} I & X_0^* \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ X_0 & I \end{bmatrix},$$

где $C > 0$, так как $A(\zeta)$ по предположению имеет полный ранг.

Подставляя сюда (1.19) и произведя умножение, легко найдем

$$\begin{bmatrix} I - X_0^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Z & T \end{bmatrix},$$

причем $TT^* - ZZ^* = C > 0$, и следовательно матрица T — неособенная.

Положим $L = T^{-1} Z$.

Ясно, что $L = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \end{bmatrix} \in G_{m,n}$ (см. замечание п. 1.1°), при-

чем $I - LL^* > 0$.

Введем матрицу

$$V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{bmatrix}.$$

Умножая матрицу Γ слева на V , а справа на S , получим

$$V \Gamma S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L & I \end{bmatrix}.$$

Запишем теперь основное неравенство отщепления для $A(\zeta)$:

$$\left| \begin{array}{c} A(= \Gamma / \Gamma^*) B \left(= \Gamma \begin{bmatrix} \frac{I}{\zeta} \\ \vdots \\ I \\ \zeta^{n+1} \end{bmatrix} \right) \\ B^* \frac{A^*(\zeta) j A(\zeta) - j}{1 - |\zeta|^2} \end{array} \right| \geq 0.$$

Умножим его слева на матрицу $T = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$, а справа — на сопряженную.

Блок A преобразуется к виду

$$VAV^* = V\Gamma\Gamma^*V^* = V\Gamma SS^*\Gamma^*V^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I - LL^* \end{bmatrix}.$$

Для вычисления блока B введем обозначение

$$U(\zeta) = [I_{2m}, \zeta I_{2m}, \dots, \zeta^n I_{2m}] = \begin{bmatrix} u(\zeta) & 0 \\ 0 & u(\zeta) \end{bmatrix} S^*.$$

Имеем

$$\begin{aligned} VB &= V\Gamma \frac{1}{\zeta} U^* \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L & I \end{bmatrix} S^* \frac{1}{\zeta} U^* \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\zeta} u^* \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\zeta} u^* \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Новое неравенство приобретает вид

$$\left| \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I - LL^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\zeta} u^* \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\zeta} u^* \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \end{bmatrix} \right| \geq 0.$$

$$* \quad \frac{A^*(\zeta)jA(\zeta) - j}{1 - |\zeta|^2}$$

Отсюда, используя формулы теоремы 2, придем к построению элементарного кратного множителя, совпадающего на основании замечания 3 теоремы 2 с $A(\zeta)$.

Очевидно, в качестве решения Q уравнения

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I - LL^* \end{bmatrix} Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ L & I \end{bmatrix}$$

можно выбрать матрицу

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (I - LL^*)^{-1} L & (I - LL^*)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда из формулы (1.8) получаем представление (1.18).

Обратно, пусть матрица-функция $A(\zeta)$ представима в виде (1.18) с некоторой матрицей $L \in G_{m,n}$ такой, что $I - LL^* > 0$.

Покажем, что $A(\zeta)$ является j -растягивающим элементарным кратным множителем полного ранга.

В самом деле, из представления (1.18) легко получить выражение j -формы матрицы-функции $A(\zeta)$

$$\frac{A^*(\zeta) j A(\zeta) - j}{1 - |\zeta|^2} = \frac{1}{|\zeta|^2} \begin{bmatrix} u\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0 \\ 0 & u\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \end{bmatrix} \mathbf{H} \begin{bmatrix} u^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0 \\ 0 & u^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \end{bmatrix}, \quad (1.20)$$

откуда следует, что $A(\zeta)$ — элементарный кратный множитель.

Далее, сравнивая (1.18) с представлением

$$A(\zeta) = I + j \frac{1 - \zeta}{\zeta} U(1) \Gamma U^* \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right)$$

и учитывая линейную независимость системы $I, \frac{I}{\zeta}, \dots, \frac{I}{\zeta^n}$, находим

$$\Gamma^* U^*(1) j U(1) \Gamma = S \mathbf{H} \begin{bmatrix} u^*(1) & 0 \\ 0 & u^*(1) \end{bmatrix} j \begin{bmatrix} u(1) & 0 \\ 0 & u(1) \end{bmatrix} \mathbf{H} S^*.$$

Отсюда, непосредственно вычисляя правые нижние блоки обеих частей, получим

$$c_0^* j c_0 = \begin{bmatrix} a_0^* \\ I \end{bmatrix} \alpha_{nn} [a_0, \Gamma] = \begin{bmatrix} a_0^* \alpha_{nn} a_0 & a_0^* \alpha_{nn} \\ \alpha_{nn} a_0 & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

где α_{nn} — правый нижний блок матрицы $(I - LL^*)^{-1}$.

Из последнего равенства и из неособенности α_{nn} имеем

$$\text{rang } c_0 = \text{rang } c_0^* j c_0 = m.$$

Первая часть теоремы доказана.

Убедимся теперь, что матрица параметров

$$L = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

в представлении (1.18) определяется однозначно.

Действительно, пусть $A(\zeta)$ помимо (1.18) допускает еще представление

$$A(\zeta) = I + j \frac{1 - \zeta}{\zeta} \begin{bmatrix} u(1) & 0 \\ 0 & u(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1^* \\ I \end{bmatrix} (I - L_1 L_1^*)^{-1} [L_1, \Gamma] \begin{bmatrix} u^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0 \\ 0 & u^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \end{bmatrix},$$

где $L_1 \in G_{m, n}$ и $I - L_1 L_1^* > 0$.

Из равенства j -форм (1.20) получим соотношения

$$a) \quad u\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) (I - LL^*)^{-1} u^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) = u\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) (I - L_1 L_1^*)^{-1} u^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right);$$

$$(6) \quad u \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) (I - LL^*)^{-1} Lu^* \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) = u \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) (I - L_1 L_1^*)^{-1} L_1 u^* \left(\frac{1}{\bar{\zeta}} \right).$$

В первом соотношении, заменяя как обычно r и $e^{i\varphi}$ в представлении $\zeta = re^{i\varphi}$ на комплексные величины z и t и подставляя

$$\frac{t}{z} = \lambda, \quad \frac{1}{tz} = \mu,$$

придем к равенству билинейных форм

$$u(\lambda) (I - LL^*)^{-1} u^*(\bar{\mu}) = u(\lambda) (I - L_1 L_1^*)^{-1} u^*(\bar{\mu}),$$

откуда следует равенство матриц этих форм, т. е.

$$(I - LL^*)^{-1} = (I - L_1 L_1^*)^{-1}.$$

Поступая аналогично со вторым соотношением, найдем

$$(I - LL^*)^{-1} L = (I - L_1 L_1^*)^{-1} L_1,$$

что вместе с полученным выше дает $L = L_1$.

Теорема полностью доказана.

Преобразованием

$$B(\zeta) = J_2 A^{-1}(\zeta) J_2, \quad (1.21)$$

где

$$J_2 = \begin{bmatrix} 0 & -iI_m \\ iI_m & 0 \end{bmatrix},$$

элементарного кратного множителя $A(\zeta)$, с полюсом в точке $\zeta=0$, мы получим другой элементарный кратный множитель $B(\zeta)$, с полюсом в $\zeta = \infty$.

Используя представление (1.18) матрицы-функции $A(\zeta)$, можно получить аналогичное представление для $B(\zeta)$

$$B(\zeta) = I + (1 - \zeta) \begin{bmatrix} 0 & u(\zeta) \\ u(\zeta) & 0 \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} 0 & u^*(1) \\ u^*(1) & 0 \end{bmatrix} j, \quad (1.22)$$

(1.18) и (1.20) называются „параметризацией“ элементарных кратных множителей $A(\zeta)$ и $B(\zeta)$ соответственно.

В частном случае, когда $n=0$, элементарный кратный множитель полного ранга $B(\zeta)$, превращается в двучленный множитель полного ранга $b(\zeta)$, допускающий параметризацию

$$b(\zeta) = I + (1 - \zeta) \begin{bmatrix} I \\ a_0^* \end{bmatrix} (I - a_0 a_0^*)^{-1} [I, a_0] j, \quad (1.23)$$

где параметр a_0 определяется однозначно.

З а м е ч а н и е. Пусть $B_k(\zeta)$ ($k=0, 1, \dots, n$) — определенные посредством (1.21) элементарные кратные множители, соответствующие параметрам

$$a_0, a_1, \dots, a_n; \quad k=0, 1, \dots, n.$$

Используя „параметризации“ этих множителей, легко можно показать, что матрица-функция $B_{k+1}(\zeta)$ делится на $B_k(\zeta)$, $k=0, 1, \dots, n$ и что при этом частное является элементарным двучленным множителем полного ранга. Это означает, что $B_n(\zeta)$ разлагается на произведение элементарных двучленных множителей полного ранга

$$B_n(\zeta) = B(\zeta) = b_n(\zeta) b_{n-1}(\zeta) \cdots b_0(\zeta).$$

К этому же результату можно было бы прийти прямым отщеплением двучленных множителей от матрицы-функции $B(\zeta)$.

Так же легко убедиться в обратном, т. е., что произвольное произведение двучленных множителей полного ранга с полюсами в точке $\zeta = \infty$ является элементарным кратным множителем полного ранга.

§ 2. Проблема Шура

2.1°. Постановка задачи. Пусть $\mathbf{B}$ — класс сжимающих в круге $|\zeta| < 1$ голоморфных матриц-функций $w(\zeta)$ порядка m

$$I - w(\zeta) w^*(\zeta) \geq 0.$$

Проблема Шура в этом классе ставится так:

А. Задана конечная последовательность квадратных матриц порядка m

$$a_0, a_1, \dots, a_n. \quad (2.1)$$

Требуется

1) Найти необходимые и достаточные условия, при которых существует матрица-функция $w(\zeta)$ из класса $\mathbf{B}$, имеющая разложение в ряд Тейлора

$$w(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_n \zeta^n + \dots \quad (2.2)$$

2) При существовании таковых дать их полное описание.

„Бесконечным“ аналогом поставленной проблемы является следующая задача

В. Дана бесконечная последовательность квадратных матриц порядка m

$$a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

Найти необходимые и достаточные условия, при которых формальный ряд Тейлора

$$w(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_n \zeta^n + a_{n+1} \zeta^{n+1} + \dots \quad (2.3)$$

сходится и представляет матрицу-функцию из класса $\mathbf{B}$.

Именно с решения этой последней задачи мы начнем изучение проблемы Шура.

2.2°. Решение задачи В.

Теорема 4. Для того чтобы (2.3) представлял матрицу-функцию $w(\zeta)$ из класса В, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$I - L_n L_n^* \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.4)$$

где

$$L_n = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица-функция $w(\zeta)$, определенная тейлоровым разложением (2.3), принадлежит классу В.

Выберем произвольный набор отличных от нуля точек из открытого единичного круга $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ и запишем матричное неравенство Шварца—Пика для $w(\zeta)$

$$\begin{vmatrix} \frac{I - w(\zeta_0) w^*(\zeta_0)}{1 - |\zeta_0|^2} & \dots & \frac{I - w(\zeta_0) w^*(\zeta_n)}{1 - \zeta_0 \bar{\zeta}_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{I - w(\zeta_n) w^*(\zeta_0)}{1 - \zeta_n \bar{\zeta}_0} & \dots & \frac{I - w(\zeta_n) w^*(\zeta_n)}{1 - |\zeta_n|^2} \end{vmatrix} \geq 0. \quad (2.5)$$

Умножая (2.5) слева на матрицу G (1.6), а справа на G^* и переходя к пределу, когда $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ стремятся к нулю, получим неравенство

$$I - L_n L_n^* \geq 0,$$

что, ввиду произвольности n , совпадает с (2.4).

Отметим, что общий член $a_{\nu, \mu}$ матрицы $A_n = I - L_n L_n^*$ имеет вид

$$a_{\nu, \mu} = \delta_{\nu, \mu} I - \sum_{t=0}^{\min(\nu, \mu)} a_{\nu-t} a_{\mu-t}^*, \quad \nu, \mu = 0, 1, \dots, n,$$

где $\delta_{\nu, \mu}$ — символ Кронекера.

Достаточность. Из неравенства (2.4) получаем неотрицательность диагональных блоков матриц A_n ($n = 0, 1, \dots$), т. е.

$$I - a_0 a_0^* - \dots - a_n a_n^* \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots.$$

Отсюда немедленно следует сходимость формального ряда (2.3) при $|\zeta| < 1$.

С другой стороны

$$\begin{aligned}
\frac{I - w(\zeta) w^*(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} &= \sum_{t=0}^{\infty} |\zeta|^{2t} I - \sum_{t=0}^{\infty} |\zeta|^{2t} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \zeta^{\nu} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_0^* \bar{\zeta}^{\mu} = \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} |\zeta|^{2t} I - \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{\nu=t}^{\infty} \sum_{\mu=t}^{\infty} a_{\nu-t} a_{\mu-t}^* \zeta^{\nu} \bar{\zeta}^{\mu} = \sum_{t=0}^{\infty} \zeta^t \bar{\zeta}^t I - \\
&- \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\min(\nu, \mu)} \zeta^{\nu} \bar{\zeta}^{\mu} a_{\nu-t} a_{\mu-t}^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\nu, \mu=0}^n \left(\delta_{\nu, \mu} I - \sum_{t=0}^{\min(\nu, \mu)} a_{\nu-t} a_{\mu-t}^* \right) \zeta^{\nu} \bar{\zeta}^{\mu} \geq 0,
\end{aligned}$$

так как матрицы квадратичных форм совпадают с A_n ($n=0, 1, \dots$).

Итак, задача В решена.

Перейдем теперь к решению самой проблемы Шура (проблема А).

2.3°. Решение первой части проблемы А. Из теоремы 4 получаем необходимое условие на матрицы, $a_0, a_1, \dots, a_n$, а именно

$$A_n = I - L_n L_n^* \geq 0. \quad (2.6)$$

Однако это же условие является достаточным для разрешимости проблемы Шура.

Доказательство последнего утверждения опирается на следующее предложение:

При выполнении условия (2.6) всегда существует такая матрица a_{n+1} , что выполняется неравенство

$$A_{n+1} = I - L_{n+1} L_{n+1}^* \geq 0. \quad (2.7)$$

Смысл сформулированного предложения в том, что заданный набор матриц (2.1) можно дополнить до бесконечной последовательности

$$a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots$$

так, чтобы при этом выполнялись все неравенства (2.4). Тогда, на основании теоремы 2.1 можно утверждать, что (2.3) является решением проблемы Шура.

Для отыскания матрицы a_{n+1} применим лемму о неотрицательной блок-матрице к матрице

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & -L_{n-1} b^* \\ -b L_{n-1}^* & I - a_0 a_0^* - b b^* \end{bmatrix} \geq 0,$$

где $b = [a_n, \dots, a_1]$.

Имеем

$$1) A_{n-1} \geq 0,$$

$$2) \text{ уравнение } A_{n-1} X = -L_{n-1} b^* \text{ имеет решение } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$3) I - a_0 a_0^* - b b^* - X^* A_{n-1} X \geq 0.$$

Умножим матрицу

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} A_n & -L_n^* \begin{bmatrix} a_{n+1}^* \\ b^* \end{bmatrix} \\ * & I - a_0 a_0^* - b b^* - a_{n+1} a_{n+1}^* \end{bmatrix}$$

слева на

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ [0, -X^*] I \end{bmatrix},$$

а справа — на T^* .

После простых вычислений легко догадаться, что беря

$$a_{n+1} = -x_1^* a_1 - \dots - x_n^* a_n,$$

получим неравенство

$$T A_{n+1} T^* = \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & I - a_0 a_0^* - b b^* - X^* A_{n-1} X \end{bmatrix} \geq 0,$$

что, ввиду неособенности T эквивалентно (2.7).

Итак, доказана

Теорема 5. Для разрешимости проблемы Шура необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$A = I - LL^* \geq 0 \quad (L = L_n).$$

2.4. Матричные неравенства проблемы Шура.

Теорема 6. Для того чтобы голоморфная в круге $|\zeta| < 1$ матрица-функция $w(\zeta)$ была решением проблемы Шура, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - LL^* & I - a_0 w^*(\zeta) \\ & \ddots \\ \zeta^n & I - \left(a_0 + \dots + \frac{1}{\zeta^n} a_n \right) w^*(\zeta) \\ * & \frac{I - w(\zeta) w^*(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (III)$$

Теорема 6' (дуальная). Для того чтобы голоморфная в круге $|\zeta| < 1$ матрица-функция $w(\zeta)$ была решением проблемы Шура, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\begin{bmatrix} A & B_1 \\ B_1^* & C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - LL^* & \frac{1}{\zeta} [w(\zeta) - a_0] \\ & \ddots \\ \frac{1}{\zeta^{n+1}} [w(\zeta) - (a_0 + \dots + a_n \zeta^n)] \\ * & \frac{I - w^*(\zeta) w(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (III')$$

Доказательство теорем 6 и 6'. Необходимость. Пусть $w(\zeta)$ является решением проблемы Шура.

Записывая неравенство (2.5) для набора точек $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$; ζ_n умножая его слева на матрицу T (1.6), справа — на сопряженную, после перехода к пределу, когда $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$ стремятся к нулю, приходим к неравенству (III).

Неравенство (III') получается совершенно аналогично, если вместо (2.5) отправляться от дуального неравенства Шварца-Пика

$$\left| \begin{array}{cc|c} \frac{I - w(\zeta_0) w^*(\zeta_0)}{1 - |\zeta_0|^2} & \dots & \frac{I - w(\zeta_0) w^*(\zeta_n)}{1 - \zeta_0 \bar{\zeta}_n} & \frac{w(\zeta) - w(\zeta_0)}{\zeta - \zeta_0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{I - w(\zeta_n) w^*(\zeta_0)}{1 - \zeta_n \bar{\zeta}_0} & \dots & \frac{I - w(\zeta_n) w^*(\zeta_n)}{1 - |\zeta_n|^2} & \frac{w(\zeta) - w(\zeta_n)}{\zeta - \zeta_n} \\ & * & & \frac{I - w^*(\zeta) w(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{array} \right| \geq 0.$$

Достаточность условий теоремы 6' непосредственно усматривается из структуры блока B_1 неравенства (III').

Также легко убедиться в достаточности условий теоремы 6, если предварительно умножить неравенство (III) слева на неособенную матрицу

$$V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\frac{u(\zeta)}{\zeta^{n+1}} & \frac{I}{\zeta^{n+1}} \end{bmatrix}$$

(см. обозначение п. 1.4°), а справа — на сопряженную.

Теоремы 6 и 6' доказаны.

Неравенства (III) и (III') называются соответственно основным и дуальным матричными неравенствами проблемы Шура. Решая каждое из них, мы получим полное описание всевозможных решений проблемы Шура.

2.5°. Решение матричных неравенств. Ввиду полной аналогичности рассуждений приведем подробное изложение решения лишь одного из матричных неравенств, а именно — дуального неравенства (III'). Преимущество этого неравенства состоит в том, что отправляясь от него мы естественным образом приходим к построению элементарного кратного множителя с полюсом в точке $\zeta = \infty$, т. е. являющегося по существу полиномом.

Здесь, как и в дальнейшем, мы предполагаем, что информационный блок A матричных неравенств (III) и (III') строго положителен*.

Теорема 7. *Общее решение $w(\zeta)$ неравенства (III') представляется в виде дробно-линейного преобразования произвольной матрицы-функции $w(\zeta) \in B$*

$$w(\zeta) = [a(\zeta)w(\zeta) + b(\zeta)][c(\zeta)w(\zeta) + d(\zeta)]^{-1}, \quad (2.8)$$

матрица коэффициентов которого строится по матрице L

* В скалярном случае при вырождении информационного блока задача имеет единственное решение в виде рациональной, сжимающей в единичном круге функции. См. примечание на стр. 204.

$$B(\zeta) = \begin{bmatrix} a(\zeta) & b(\zeta) \\ c(\zeta) & d(\zeta) \end{bmatrix} = I + (1 - \zeta) \begin{bmatrix} 0 & u(\zeta) \\ u(\zeta) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{H} \begin{bmatrix} 0 & u^*(1) \\ u^*(1) & 0 \end{bmatrix} j \quad (2.9)$$

и является j -растягивающим элементарным кратным множителем полного ранга, с полюсом кратности $n + 1$ в точке $\zeta = \infty$.

Доказательство. I. Пусть сначала голоморфная матрица-функция $w(\zeta)$ удовлетворяет неравенству (III'), которое в принятых нами обозначениях записывается в виде

$$\left| \begin{array}{c} \mathbf{A} - [L, I] \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\zeta} u^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \\ \frac{1}{\zeta} u^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0 \end{bmatrix} j \begin{bmatrix} w(\zeta) \\ I \end{bmatrix} \\ * \\ \frac{I - w^*(\zeta) w(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \end{array} \right| \geq 0. \quad (\text{III}')$$

Так как по предположению информационный блок $\mathbf{A}$ невырожден, неравенство (III'), по лемме о неотрицательной блок-матрице, эквивалентно неравенству

$$C_1 - B_1^* A^{-1} B_1 > 0 \quad (2.10)$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} & [w^*(\zeta), I] \left\{ \frac{I}{1 - |\zeta|^2} - \frac{1}{|\zeta|^2} j \begin{bmatrix} 0 & u\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \\ u\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0 \end{bmatrix} \times \right. \\ & \left. \times \mathbf{H} \begin{bmatrix} 0 & u^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \\ u^*\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) & 0 \end{bmatrix} j \right\} \begin{bmatrix} w(\zeta) \\ I \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Введем матрицу-функцию

$$B(\zeta) = I + (1 - \zeta) \begin{bmatrix} 0 & u(\zeta) \\ u(\zeta) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{H} \begin{bmatrix} 0 & u^*(1) \\ u^*(1) & 0 \end{bmatrix} j. \quad (2.12)$$

Из связи (1.20) и выражения для j -формы (1.19) видно, что (2.11) можно переписать так

$$[w^*(\zeta), I] \frac{B^{-1*}(\zeta) j B^{-1}(\zeta)}{1 - |\zeta|^2} \begin{bmatrix} w(\zeta) \\ I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.13)$$

II. Определим теперь пару матриц-функций, полагая

$$B^{-1}(\zeta) \begin{bmatrix} w(\zeta) \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Совершенно очевидно, что пара $\begin{bmatrix} p(\zeta) \\ q(\zeta) \end{bmatrix}$ — нерастягивающая и неособенная, так что всюду в единичном круге имеет смысл частное

$$\omega(\zeta) = p(\zeta)q^{-1}(\zeta), \quad (2.15)$$

являющееся нерастягивающей голоморфной матрицей-функцией.

III. Разобьем матрицу-функцию $B(\zeta)$ на блоки

$$B(\zeta) = \begin{bmatrix} a(\zeta) & b(\zeta) \\ c(\zeta) & d(\zeta) \end{bmatrix}$$

соответственно блокам матрицы

$$j = \begin{bmatrix} -I_m & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

Подставляя в (2.14), с учетом (2.15) получим дробно-линейное преобразование

$$w(\zeta) = [a(\zeta)\omega(\zeta) + b(\zeta)][c(\zeta)\omega(\zeta) + d(\zeta)]^{-1},$$

совпадающее с (2.8).

Итак, первая часть теоремы доказана.

IV. Пусть, обратно, $\omega(\zeta)$ — произвольная матрица-функция из класса B .

Введем пару голоморфных матриц-функций

$$\begin{bmatrix} r(\zeta) \\ s(\zeta) \end{bmatrix} = B(\zeta) \begin{bmatrix} \omega(\zeta) \\ I \end{bmatrix}.$$

И здесь, учитывая нерастягиваемость и неособенность пары, получаем существование всюду голоморфной в единичном круге, нерастягивающей матрицы-функции

$$w(\zeta) = r(\zeta)s^{-1}(\zeta) = [a(\zeta)\omega(\zeta) + b(\zeta)][c(\zeta)\omega(\zeta) + d(\zeta)]^{-1}.$$

Очевидно $w(\zeta)$ удовлетворяет неравенству (2.13), которое в свою очередь эквивалентно неравенству (III').

Теорема доказана.

Сопоставляя с теоремой 6', получаем:

Общее решение проблемы Шура, с невырожденным информационным блоком A , представляется в виде дробно-линейного преобразования (2.8), матрица коэффициентов которого является j -растягивающим элементарным множителем полного ранга, с полюсом кратности $n+1$ в точке $\zeta = \infty$, а параметром служит произвольная матрица-функция $\omega(\zeta)$ из класса B .

Поступая аналогично с неравенством (III), придем сначала к эквивалентному ему неравенству

$$[w(\zeta), \Pi] \frac{A^{-1}(\zeta)jA^{-1*}(\zeta)}{1-|\zeta|^2} \begin{bmatrix} w^*(\zeta) \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.16)$$

где $A(\zeta)$ — элементарный кратный множитель полного ранга, с полюсом кратности $n+1$ в точке $\zeta=0$, связанный с $B(\zeta)$ соотношением (1.20).

Затем, разбивая так же как и выше матрицу-функцию $A(\zeta)$ на блоки

$$A(\zeta) = \begin{bmatrix} \alpha(\zeta) & \beta(\zeta) \\ \gamma(\zeta) & \delta(\zeta) \end{bmatrix},$$

получим дробно-линейное преобразование

$$\omega(\zeta) = [\omega(\zeta)\beta(\zeta) + \delta(\zeta)]^{-1} [\omega(\zeta)\alpha(\zeta) + \gamma(\zeta)], \quad (2.17)$$

определяющее общее решение проблемы Шура.

Параметром тут, как и выше, служит произвольная сжимающая голоморфная матрица-функция $\omega(\zeta)$.

Таким образом, каждой конкретной проблеме Шура с невырожденным информационным блоком соответствует построенный по данным задачи j -растягивающий элементарный кратный множитель полного ранга, с полюсом в точке $\zeta = \infty$.

Как показывает теорема 1.3 „о параметризации“, верно и обратное:

Каждому j -растягивающему элементарному множителю полного ранга соответствует вполне определенная проблема Шура, с невырожденным информационным блоком, для которого он является матрицей коэффициентов дробно-линейного преобразования (2.8).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 23.I.1976

1. Ն. ԳԱԼՍՏՅԱՆ. Անալիտիկ j -ձգող մատրից-ֆունկցիաները և Շուրի պրոբլեմը (ամփոփում)

Հոդվածում լուծված է Շուրի պրոբլեմը մատրիցային դրվածքով. որի մատրիցային անհավասարության ինֆորմացիոն բլոկը չվերածվող է: Ցույց է տրված այդպիսի պրոբլեմի աղեկվածությունը տարրական j -ձգող բազմապատիկ արտադրիչի տրմանը:

L. H. GALSTIAN. *Analytic j -stretch matrix-functions and the problem of Shure (summary)*

Under the assumption of strong positivity of information block of matrix-inequality the matrix aspect of the problem of Shure is solved. This is essentially the problem of determination of elementary j -stretch multiple factor of complete.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. J. Schur. Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind Journ. f. Math., 147, 1916; 148, 1918.
2. В. П. Потапов. Мультипликативная структура аналитических j -растягивающих матриц-функций, Труды ММО, том IV, 1955.

3. В. П. Потапов. Общие теоремы о структуре и отщеплении элементарных множителей аналитических матриц-функций, ДАН Арм.ССР, XLVIII, 5, 1969, 257—263.
4. А. В. Ефимов, В. П. Потапов. j -растягивающие матрицы-функции и их роль в аналитической теории эл. цепей, УМН. XXVIII, вып. 1 (169), 1973, 65—130.
5. И. В. Ковалишина. Аддитивное разложение произвольной реактивной матрицы-функции, Изв. АН Арм.ССР, серия „Математика“, VI, № 1, 1971, 43—60.
6. И. В. Ковалишина, В. П. Потапов. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны-Пика, ДАН Арм.ССР, LIX, № 1, 1974, 17—22.
7. И. В. Ковалишина. j -растягивающие матрицы-функции в задаче Каратеодори, ДАН Арм.ССР, LIX, № 3, 1974, 129—135.
8. И. В. Ковалишина. j -растягивающие матрицы-функции и классическая проблема моментов, ДАН Арм.ССР, LX, № 1, 1975, 3—10.
9. С. А. Орлов. О сходимости и характере расходимости монотонных семейств аналитических j -сжимающих матриц-функций, ДАН Арм.ССР, LIX, № 4, 1974, 193—198.
10. В. М. Адамян, Д. З. Аров, М. Г. Крейн. Бесконечные блочно-ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения, Изв. АН Арм.ССР, серия „Математика“, VI, № 2—3, 1971, 87—112.
11. И. П. Федчина. Описание решений касательной проблемы Неванлинны-Пика, LX, № 1, 1975, 37—42.