В. А. КАКИЧЕВ

ДВУМЕРНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТИПА ЗАДАЧИ
РИМАНА, СОДЕРЖАЩАЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ
ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Обозначения и первоначальная постановка задачи

1°. Пусть Γ_j — замкнутый контур Ляпунова, ограничивающий плоскую область D_j^+ , содержащую начало координат, и D_j^- дополняет $D_j^+ \cup \Gamma_j$ до расширенной плоскости комплексного переменного z_j ; $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ — общий состав границ четырех биобластей $D^{\pm\pm} = D_1^{\pm} \times D_2^{\pm}$; $H(\Gamma)(L_p(\Gamma))$ — множество функций, удовлетворяющих на Γ условию Гельдера (суммируемых на Γ со степенью p , где $1 < p < +\infty$);

$$(K\varphi)(z_1, z_2) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - z_1)(\tau_2 - z_2)}, \quad z_j \neq \tau_j \in \Gamma_j, \quad (1.1)$$

— интеграл типа Коши с плотностью $\varphi \in H(\Gamma)$ (или $\varphi \in L_p(\Gamma)$), определяющий четыре функции

$$\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2) = (K\varphi)(z_1, z_2), \quad (z_1, z_2) \in D^{\pm\pm}, \quad (1.2)$$

голоморфные в биобластях $D^{\pm\pm}$, предельные значения $\Phi^{\pm\pm}(t_1, t_2)$ которых при $(z_1, z_2) \rightarrow (t_1, t_2) \in \Gamma$ описывают формулы Сохоцкого [1]:

$$\begin{aligned} 4\Phi^{\pm\pm}(t_1, t_2) &= [(I \pm S_1 \pm S_2 + S_{12}) \varphi](t_1, t_2), \\ 4\Phi^{\pm\mp}(t_1, t_2) &= [(-I \mp S_1 \pm S_2 + S_{12}) \varphi](t_1, t_2), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где I — тождественный оператор,

$$(S_1 \varphi)(t_1, t_2) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(\tau_1, t_2) d\tau_1}{\tau_1 - t_1}, \quad (t_1, t_2) \in \Gamma, \quad (1.4)$$

оператор S_2 определяется аналогично и

$$(S_{12} \varphi)(t_1, t_2) = \frac{1}{(\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)}, \quad (t_1, t_2) \in \Gamma; \quad (1.5)$$

сингулярные операторы S_1 , S_2 и S_{12} ограничены в $L_p(\Gamma)$, причем $S_{12} = S_1 S_2 = S_2 S_1$;

$$(A_{kx} \varphi)(t_1, t_2) \equiv [(\alpha_{kx}^0 I + A_{kx}^1 + A_{kx}^2 + A_{kx}^{12}) \varphi](t_1, t_2) \equiv$$

$$\begin{aligned} &\equiv a_{kx}^0(t_1, t_2) \varphi(t_1, t_2) + \int_{\Gamma_1} a_{kx}^1(t_1, \tau_1, t_2) \varphi(\tau_1, t_2) d\tau_1 + \\ &+ \int_{\Gamma_2} a_{kx}^2(t_1, t_2, \tau_2) \varphi(t_1, \tau_2) d\tau_2 + \iint_{\Gamma} a_{kx}^{12}(t_1, \tau_1, t_2, \tau_2) \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

— оператор, зависящий от индексов k и x и определяемый функцией $a_{kx}^0 \in H(\Gamma)$ и регулярными ядрами a_{kx}^1 , a_{kx}^2 и a_{kx}^{12} ; при этом ядра a_{kx}^1 и a_{kx}^2 могут быть слабо полярными:

$$a_{kx}^1 = \frac{a_{kx}^1(t_1, \tau_1, t_2)}{|\tau_1 - t_1|^{\mu_1}}, \quad a_{kx}^2 = \frac{a_{kx}^2(t_1, t_2, \tau_2)}{|\tau_2 - t_2|^{\mu_2}}, \quad 0 \leq \mu_1, \mu_2 < 1,$$

а ядра a_{kx}^{12} — слабо биполярными:

$$a_{kx}^{12} = a_{kx}^{12}(t_1, \tau_1, t_2, \tau_2) |\tau_1 - t_1|^{-\nu_1} |\tau_2 - t_2|^{-\nu_2}, \quad 0 \leq \nu_1, \nu_2 < 1,$$

где функции a_{kx}^j , $j = 1, 2, 12$, удовлетворяют условию Гельдера по совокупности всех переменных $(t_1, t_2) \in \Gamma$ и $(\tau_1, \tau_2) \in \Gamma$; операторы A_{kx}^1 и A_{kx}^2 не являются вполне непрерывными;

$$\begin{aligned} \Phi_{kx}^{\pm\pm}(z_1, z_2) &\equiv \partial^{k+x} \Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2) / \partial z_1^k \partial z_2^x, \quad (z_1, z_2) \in D^{\pm\pm}, \\ \Phi_{kx}^{\pm\pm}(t_1, t_2) &= \lim_{\substack{z_1 \rightarrow t_1 \\ z_2 \rightarrow t_2}} \Phi_{kx}^{\pm\pm}(z_1, z_2), \quad (t_1, t_2) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1.7)$$

и, в частности, например,

$$\Phi_{00}^{\pm\pm}(z_1, z_2) = \Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2), \quad \Phi_{k0}^{\pm\pm}(z_1, z_2) = \partial^k \Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2) / \partial z_1^k.$$

2°. По аналогии с одномерным случаем (см. [2—5]) сформулируем следующую задачу, которую коротко будем называть R -задачей.

Определить четыре функции $\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2)$, голоморфные в биобластях $D^{\pm\pm}$ и продолжимые определенным образом на Γ вместе с достаточным количеством своих производных, по краевому условию

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \sum_{x=0}^{\nu} (A_{kx} \Phi_{kx}^{++})(t_1, t_2) - \sum_{k=0}^r \sum_{x=0}^{\rho} (B_{kx} \Phi_{kx}^{+-})(t_1, t_2) - \\ &- \sum_{k=0}^s \sum_{x=0}^{\sigma} (C_{kx} \Phi_{kx}^{-+})(t_1, t_2) + \sum_{k=0}^m \sum_{x=0}^{\mu} (D_{kx} \Phi_{kx}^{--})(t_1, t_2) = \\ &= f(t_1, t_2), \quad (t_1, t_2) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где операторы A_{kx} определяются по формуле (1.6), а операторы B_{kx} , C_{kx} и D_{kx} аналогичным образом с помощью соответствующих функций b_{kx}^j , c_{kx}^j и d_{kx}^j , $j = 0, 1, 2, 12$ и функция $f(t_1, t_2)$ задана.

Пусть $f(t_1, t_2) \in H(\Gamma) (\in L_p(\Gamma))$. Будем говорить, что кусочно голоморфная функция $\Phi(z_1, z_2)$, удовлетворяющая условию (1.8), принадлежит классу

$$H \left(\begin{matrix} n, \nu, r, \rho \\ m, \mu, s, \sigma \end{matrix} \right) \left(L_p \left(\begin{matrix} n, \nu, r, \rho \\ m, \mu, s, \sigma \end{matrix} \right) \right),$$

если предельные значения всех производных соответствующих функций $\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2)$ и $\Phi^{\pm\bar{\pm}}(z_1, z_2)$, фигурирующих в (1.8), принадлежат классу $H(\Gamma)(L_p(\Gamma))$.

Отметим, что здесь дана только предварительная формулировка R -задачи, которая в дальнейшем уточняется.

3°. Следуя одномерному случаю [4] исследование R -задачи будем проводить сведением ее к полному бисингулярному интегральному уравнению с ядрами Коши [6] и искомой функцией $\varphi(t_1, t_2)$ такой, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} \Phi_{n\nu}^{++} &= (K\varphi)(z_1, z_2), \quad \Phi_{m\mu}^{--} = z_1^{-m} z_2^{-\mu} (K\varphi)(z_1, z_2), \\ \Phi_{r\rho}^{+-} &= z_2^{-\rho} (K\varphi)(z_1, z_2), \quad \Phi_{s\sigma}^{-+} = z_1^{-s} (K\varphi)(z_1, z_2). \end{aligned} \quad (1.9)$$

В силу формул Сохоцкого (1.3) плотность $\varphi(t_1, t_2)$ однозначно определяется предельными значениями функций (1.9):

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, t_2) &= \Phi_{n\nu}^{++}(t_1, t_2) + t_1^m t_2^\mu \Phi_{m\mu}^{--}(t_1, t_2) - \\ &- t_2^\rho \Phi_{r\rho}^{+-}(t_1, t_2) - t_1^s \Phi_{s\sigma}^{-+}(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

и очевидно принадлежит классу $H(\Gamma)(L_p(\Gamma))$, если соответствующая кусочно голоморфная функция

$$\Phi(z_1, z_2) \in H \left(\begin{matrix} n, \nu, r, \rho \\ m, \mu, s, \sigma \end{matrix} \right) \left(\in L_p \left(\begin{matrix} n, \nu, r, \rho \\ m, \mu, s, \sigma \end{matrix} \right) \right).$$

Нам потребуются интегральные представления функций $\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2)$ вытекающие из равенств (1.9), описанию которых предпошлем следующие обозначения (ср. [3, 4]):

$$\Theta_k^\pm(\omega, \omega) = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} (\omega - \omega)^{k-1} \ln \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega} \right)^{\pm 1} \right], \quad (1.11)$$

$$\pi_k^\pm(\omega, \omega) = \Theta_k^\pm(\omega, \omega) + \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_{kl}^\pm \omega^{k-l-1} \omega^k, \quad (1.12)$$

где

$$\alpha_{kl}^- = (-1)^{k-1} \alpha_{R, k-l-1}^+, \quad \alpha_{k0}^+ = 0 \text{ и}$$

$$\alpha_{kl}^+ = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(-1)^j}{l-j} \frac{(k-1)!}{j!(k-j-1)!} \quad \text{при } l > 0,$$

и заметим, что

$$\frac{\partial^k}{\partial \omega^k} \Theta_k^+(\omega, \omega) = \left(\frac{\omega}{\omega} \right)^k \frac{\partial^k}{\partial \omega^k} \Theta_k^-(\omega, \omega) = \frac{1}{\omega - \omega}. \quad (1.13)$$

§ 2. Интегральные представления

1°. Распространяя рассуждения работ [3, 4] на случай функций двух переменных и используя обозначения (1.11), (1.12), легко убедимся, что функции $\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2)$, удовлетворяющие равенствам (1.9), допускают следующие интегральные представления:

$$\Phi^{++}(z_1, z_2) = Q_v^{++}(z_1, z_2) + P_n^{++}(z_1, z_2) + \left(\overset{1}{\prod}_n^+ \overset{2}{\prod}_v^+ \varphi \right) (z_1, z_2), \quad (2.1)$$

$$\Phi^{+-}(z_1, z_2) = P_r^{+-}(z_1, z_2) + \left(\overset{1}{\prod}_r^+ \overset{2}{\prod}_\rho^- \varphi \right) (z_1, z_2), \quad (2.2)$$

$$\Phi^{-+}(z_1, z_2) = Q_\sigma^{-+}(z_1, z_2) + \left(\overset{1}{\prod}_s^- \overset{2}{\prod}_\sigma^+ \varphi \right) (z_1, z_2), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \Phi^{--}(z_1, z_2) &= \Phi^{--}(z_1, \infty) + \Phi^{--}(\infty, z_2) - \\ &- \Phi^{--}(\infty, \infty) + \left(\overset{1}{\prod}_m^- \overset{2}{\prod}_\mu^- \varphi \right) (z_1, z_2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$Q_v^{++}(z_1, z_2) = \sum_{x=0}^{v-1} \Phi_{0x}^{++}(z_1, 0) \frac{z_2^x}{x!}, \quad (2.5)$$

$$P_n^{++}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\Phi_{k0}^{++}(0, z_2) - \sum_{x=0}^{v-1} \Phi_{kx}^{++}(0, 0) \frac{z_2^x}{x!} \right] \frac{z_1^k}{k!}, \quad (2.6)$$

$$P_r^{+-}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{r-1} [\Phi_{k0}^{+-}(0, z_2) - \Phi_{k0}^{+-}(0, 0)] \frac{z_1^k}{k!}, \quad (2.7)$$

$$Q_\sigma^{-+}(z_1, z_2) = \sum_{x=0}^{\sigma-1} [\Phi_{0x}^{-+}(z_1, 0) - \Phi_{0x}^{-+}(0, 0)] \frac{z_2^x}{x!} \quad (2.8)$$

и, например,

$$\left(\overset{1}{\prod}_n^+ \varphi \right) (z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \varphi(\tau_1, z_2) \pi_n^+(\tau_1, z_1) d\tau_1, \quad (2.9)$$

$$\left(\overset{2}{\prod}_\rho^- \varphi \right) (\tau_1, z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \varphi(\tau_1, \tau_2) \pi_\rho^-(\tau_2, z_2) \tau_2^{-\rho} d\tau_2. \quad (2.10)$$

Операторы вида $\overset{2}{\prod}_v^+$ и $\overset{1}{\prod}_s^-$ определяются по формулам, аналогичным (2.9) и (2.10), причем операторы $\overset{1}{\prod}_n^+$ и $\overset{1}{\prod}_s^-$ коммутируют с операторами вида $\overset{2}{\prod}_v^+$ и $\overset{2}{\prod}_\sigma^-$.

Итог сказанному здесь подводит

Теорема 1. Кусочно голоморфная функция $\Phi(z_1, z_2)$ класса

$$H \left(\begin{matrix} n, \nu, r, \rho \\ m, \mu, s, \sigma \end{matrix} \right) \left(L_\rho \left(\begin{matrix} n, \nu, r, \rho \\ m, \mu, s, \sigma \end{matrix} \right) \right)$$

допускает интегральное представление, описываемое формулами (2.1)–(2.10), с плотностью

$$\varphi(t_1, t_2) \in H(\Gamma) (\in L_\rho(\Gamma)).$$

Это представление не единственно и зависит от счетного множества линейно независимых функций. Более точно: от $\nu + \sigma + n + r + 2$ произвольных функций одного переменного, голоморфных в соответствующих областях:

$$\Phi_{0x}^{++}(z_1, 0) = q_x^+(z_1), \quad z_1 \in D_1^+, \quad x = 0, 1, \dots, \nu - 1,$$

$$\Phi_{0\lambda}^{-+}(z_1, 0) - \Phi_{0\lambda}^{-+}(\infty, 0) = q_\lambda^-(z_1), \quad z_1 \in D_1^-, \quad \lambda = 0, 1, \dots, \sigma - 1,$$

$$\Phi^{--}(z_1, \infty) - \Phi^{--}(\infty, \infty) = q_s^-(z_1), \quad z_1 \in D_1^-$$

и

$$\Phi_{k0}^{++}(0, z_2) - \sum_{x=0}^{\nu-1} \Phi_{kx}^{++}(0, 0) \frac{z_2^x}{x!} = p_k^+(z_2), \quad z_2 \in D_2^+, \quad (2.11)$$

$$k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

$$\Phi_{l0}^{+-}(0, z_2) - \Phi_{l0}^{+-}(0, \infty) = p_l^-(z_2), \quad z_2 \in D_2^-, \quad l = 0, 1, \dots, r - 1,$$

$$\Phi^{--}(\infty, z_2) = p_r^-(z_2), \quad z_2 \in D_2^-.$$

Произвольно заданные функции, стоящие справа в (2.11), должны быть продолжимы соответственно на Γ_1 и Γ_2 так, что

$$\frac{d^\alpha q_x^+(t_1)}{dt_1^\alpha}, \frac{d^\beta q_\lambda^-(t_1)}{dt_1^\beta} \text{ и } \frac{d^\gamma q_s^-(t_1)}{dt_1^\gamma} \in H(\Gamma_1) (\in L_\rho(\Gamma_1)),$$

$$x = 0, 1, \dots, \nu - 1, \alpha = 0, 1, \dots, n; \lambda = 0, 1, \dots, \sigma - 1, \beta = 0, 1, \dots, s \quad (2.12)$$

$$\text{и } \gamma = 0, 1, \dots, m;$$

$$\frac{d^\alpha p_k^+(t_2)}{dt_2^\alpha}, \frac{d^\beta p_l^-(t_2)}{dt_2^\beta} \text{ и } \frac{d^\gamma p_r^-(t_2)}{dt_2^\gamma} \in H(\Gamma_2) (\in L_\rho(\Gamma_2)),$$

$$k = 0, 1, \dots, n - 1, \alpha = 0, 1, \dots, \nu; l = 0, 1, \dots, r - 1, \beta = 0, 1, \dots, \rho$$

$$\text{и } \gamma = 0, 1, \dots, \mu.$$

Непосредственно из (2.11) следует, что функции $q_\lambda^-(z_1)$, $p_l^-(z_2)$ и $p_k^+(z_2)$ должны удовлетворять еще и таким условиям:

$$q_{\lambda}^{-}(\infty) = 0, \lambda = 0, 1, \dots, \sigma, p_l^{-}(\infty) = 0, l = 0, 1, \dots, r-1,$$

$$\lim_{z_2 \rightarrow 0} z_2^{1-\nu} p_k^{+}(z_2) = 0, k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (2.13)$$

Интегральное представление, описываемое теоремой 1, кратко будем называть R -представлением. В частности, если все произвольные функции, входящие в условия (2.11), тождественно равны нулю в соответствующих областях, то R -представление единственно и мы назовем его R_0 -представлением.

Сделаем еще одно замечание. Если функции $\varphi_j(\tau_1, \tau_2) \in H(\Gamma)$, $j = 1, 2, \dots, l$, линейно независимы на Γ , то соответствующие им R_0 -представления $\Phi_j^{\pm\pm}(z_1, z_2)$, $j = 1, 2, \dots, l$, также линейно независимы в соответствующих биобластях $D^{\pm\pm}$ (и наоборот).

2°. Так как при $l < k$ ядра $\partial^l \pi_k^{\pm}(\omega, \zeta) / \partial \omega^l$ регулярны, то операторы вида

$$\overset{1}{\Pi}_{kl}^{\pm} = \frac{\partial^l}{\partial t_1^l} \overset{1}{\Pi}_k^{\pm} \text{ и } \overset{2}{\Pi}_{kl}^{\pm} = \frac{\partial^l}{\partial t_2^l} \overset{2}{\Pi}_k^{\pm}$$

также имеют регулярные ядра. Отсюда, если $k < n$ и $x < \nu$, то интегралы, представляющие функции $\Phi_{kx}^{++}(t_1, t_2)$, где $(t_1, t_2) \in \Gamma$, имеют регулярные ядра. Аналогичное утверждение относится и к функциям (2.2), (2.3) и (2.4) соответственно при $k < r$, $x < \rho$, $k < s$, $x < \sigma$ и $k < m$, $x < \mu$.

Если же, например, $k < r$, а $x = \rho$, то в силу (1.13) и одномерной формулы Сохоцкого (по переменной t_2) из (2.2) будем иметь:

$$2\Phi_{kr}^{+-}(t_1, t_2) = t_2^{-\rho} \left[\overset{1}{\Pi}_{nk}^{+} (I + S_2) \varphi \right] (t_1, t_2) + \\ + 2\partial^{k+\rho} P_r^{+-}(t_1, t_2) / \partial t_1^k \partial t_2^{\rho}. \quad (2.14)$$

Аналогичную формулу для функции (2.2) при $k = r$ и $x < \rho$, а также для функций (2.1), (2.3) и (2.4) при $k < n$ и $x = \nu$ ($k = n$, $x < \nu$), $k < m$, $x = \mu$ ($k = m$, $x < \mu$) и $k < s$, $x = \sigma$ ($k = s$, $x < \sigma$) опускаем.

Далее, при $k = m$ и $x = \mu$ из (1.13) и формул Сохоцкого (1.3) для функции (2.4) получим

$$4\Phi_{m\mu}^{--}(t_1, t_2) = t_1^{-m} t_2^{-\mu} [(I - S_1 - S_2 + S_{12}) \varphi](t_1, t_2). \quad (2.15)$$

Формулы, аналогичные последней, для функций (2.1), (2.2), (2.3) при $k = n$, $x = \nu$, $k = r$, $x = \rho$ и $k = s$, $x = \sigma$ также опускаем.

§ 3. Сведение R -задачи к полному бисингулярному интегральному уравнению

1°. Будем, для определенности, предполагать, что свободный член $f(t_1, t_2)$ краевого условия R -задачи (1.8) принадлежит классу $H(\Gamma)$.

Подставляя в этом случае предельные значения R -представления (2.1)—(2.10) кусочно голоморфной функции

$$\Phi(z_1, z_2) \in H \left(\begin{matrix} n, \nu, r, \rho \\ m, \mu, s, \sigma \end{matrix} \right)$$

в условии (1.8) и учитывая формулы типа (2.14) и (2.15), получим полное бисингулярное интегральное уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned} (S^u \varphi)(t_1, t_2) &\equiv u_0(t_1, t_2) \varphi(t_1, t_2) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{u_1(t_1, \tau_1, t_2)}{\tau_1 - t_1} \varphi(\tau_1, t_2) d\tau_1 + \\ &+ \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{u_2(t_1, t_2, \tau_2)}{\tau_2 - t_2} \varphi(t_1, \tau_2) d\tau_2 + \frac{1}{(\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int \frac{u_{12}(t_1, \tau_1, t_2, \tau_2)}{(\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2)} \times \\ &\times \varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \equiv (\hat{S}^u \varphi)(t_1, t_2) + (V\varphi)(t_1, t_2) + (W\varphi)(t_1, t_2) = \\ &= F(t_1, t_2; \Phi), (t_1, t_2) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} F(t_1, t_2; \Phi) &= f(t_1, t_2) - \\ &- \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{x=0}^{\nu} (A_{kx} P_{n, kx}^{++})(t_1, t_2) - \sum_{k=0}^{\nu-1} \sum_{x=0}^{\rho} (A_{kx} Q_{\nu, kx}^{++})(t_1, t_2) + \\ &+ \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{x=0}^{\rho} (B_{kx} P_{2, kx}^{+-})(t_1, t_2) + \sum_{k=0}^s \sum_{x=0}^{\sigma-1} (C_{kx} Q_{s, kx}^{-+})(t_1, t_2) - \\ &- \sum_{k=0}^m (D_{k0} q_{\sigma, k0}^{-})(t_1, t_2) - \sum_{x=0}^{\mu} (D_{0x} p_{r, 0x}^{-})(t_1, t_2) \end{aligned} \quad (3.2)$$

— правая часть уравнения (3.1), зависящая, в силу формул (2.5)—(2.8), линейным образом от искомой кусочно-голоморфной функции $\Phi(z_1, z_2)$;

$$\hat{S}^u = u_0 I + \hat{u}_1 S_1 + \hat{u}_2 S_2 + \hat{u}_{12} S_{12} \quad (3.3)$$

— так называемый характеристический бисингулярный оператор с коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_0(t_1, t_2) \\ \hat{u}_{12}(t_1, t_2) \end{aligned} \right\} = a_{n\nu}^0 \pm t_2^{-\rho} b_{r\rho}^0 \pm t_1^{-s} c_{s\sigma}^0 + t_1^{-m} t_2^{-\mu} d_{m\mu}^0,$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}_1(t_1, t_2) \\ \hat{u}_2(t_1, t_2) \end{aligned} \right\} = a_{n\nu}^0 \pm t_2^{-\rho} b_{r\rho}^0 \mp t_1^{-s} c_{s\sigma}^0 - t_1^{-m} t_2^{-\mu} d_{m\mu}^0; \quad (3.4)$$

$$V = V_1 S_2 + S_1 V_2 \text{ и } W = W_1 + W_2 + W_{12} \quad (3.5)$$

— „смешанная“ и „регулярная“ части оператора (3.1), в которых:

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} 4V_1 \\ 4W_1 \end{aligned} \right\} &= A_{nv}^1 (I + S_1) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} (a_{kv}^0 I + A_{kv}^1) \prod_{nk}^+ \pm \\
&\pm t_2^{-p} B_{rp}^1 (I + S_1) \pm 2t_2^{-p} \sum_{k=0}^{r-1} (b_{kp}^0 I + B_{kp}^1) \prod_{rk}^+ + \\
&+ C_{s\sigma}^1 (\tau_1^{-s} I)(I - S_1) - 2 \sum_{k=0}^{s-1} (t_1^{-s} c_{k\sigma}^0 I + C_{k\sigma}^1 (\tau_1^{-s} I)) \prod_{sk}^- \pm \\
&\pm t_2^{-m} D_{m\mu}^1 (\tau_1^{-m} I)(I - S_1) \mp 2 \sum_{k=0}^{m-1} (t_1^{-m} d_{k\mu}^0 I + D_{k\mu}^1 (\tau_1^{-m} I)) \prod_{mk}^-, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

операторы V_2 и W_2 определяются по формулам, аналогичным (3.6), а W_{12} — вполне непрерывный оператор, явный вид которого ввиду его чрезмерной громоздкости мы не выписываем.

Следовательно

$$\begin{aligned}
u_1(t_1, \tau_1, t_2) &= \hat{u}_1(t_1, t_2) + (\tau_1 - t_1) w_1(t_1, \tau_1, t_2), \\
u_2(t_1, t_2, \tau_2) &= \hat{u}_2(t_1, t_2) + (\tau_2 - t_2) w_2(t_1, t_2, \tau_2), \quad (3.7) \\
u_{12}(t_1, \tau_1, t_2, \tau_2) &= \hat{u}_{12}(t_1, t_2) + (\tau_1 - t_1) v_1(t_1, \tau_1, t_2) + \\
&+ (\tau_1 - t_2) v_2(t_1, t_2, \tau_2) - (\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2) w_{12}(t_1, \tau_1, t_2, \tau_2),
\end{aligned}$$

где v_j и w_j — ядра операторов V_j и W_j , $j = 1, 2$, не являющихся вполне непрерывными, а w_{12} — ядро оператора W_{12} .

Таким образом, краевое условие (1.8) сведено к уравнению (3.1), правая часть которого (3.2) линейным образом зависит от кусочно-голоморфной функции $\Phi(z_1, z_2)$, удовлетворяющей условию (1.8). В связи с этим уточним и приведем окончательную постановку R -задачи.

R -задачей будем называть задачу с краевым условием (1.8), решение которой удовлетворяет $\nu + \sigma + n + r + 2$ условиям Коши (2.11), с наперед заданными правыми частями, голоморфными в соответствующих областях и удовлетворяющими условиям (2.12) и (2.13).

Если в условии (1.8) $f(t_1, t_2) \equiv 0$ и все функции, стоящие в правых частях условий Коши (2.11) тождественно равны нулю, то R -задачу будем называть однородной или короче R_0 -задачей.

2°. Так как всякое решение R -задачи по формуле (1.10) определяет плотность $\varphi(t_1, t_2)$ соответствующего R -представления и $\varphi(t_1, t_2)$ является решением уравнения (3.1) — (3.6), а любое решение $\varphi(t_1, t_2)$ этого уравнения по формулам (2.1) — (2.10) определяет R -представление, описывающее некоторое решение R -задачи, то справедлива

Теорема 2. Полное бисингулярное уравнение $S^u \varphi \equiv 0$ ($S^u \varphi = F$) и R_0 -задача (R -задача) равносильны:

каждому решению уравнения $S^u \varphi = 0$ ($S^u \varphi = F$) по формулам (2.1) — (2.10) соответствует решение R_0 -задачи (R -задачи);

каждому решению R_0 -задачи (R -задачи) по формуле (1.10) отвечает решение однородного (неоднородного) полного бисингулярного уравнения $S'' \varphi = 0$ ($S'' \varphi = f$).

При этом линейно независимым решениям уравнения $S'' \varphi = 0$ соответствуют линейно независимые решения R_0 -задачи и наоборот.

Используя теперь вытекающую из работ [6–8] и приведенную в [9] теорему о $\Phi_{\pm}$ -нетеровости полных бисингулярных операторов (3.1), убедимся, что имеет место

Теорема 3. Если при всех значениях параметра t обратимы справа (слева) полные одномерные сингулярные операторы

$$[u_0(t, \omega) \pm \hat{u}_1(t, \omega)] + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_1} [\hat{u}_2(t, \zeta) \pm \hat{u}_{12}(t, \zeta)] \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \omega} +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_2} [w_2(t, \omega, \zeta) \pm v_2(t, \omega, \zeta)] \chi(\zeta) d\zeta, \quad (t, \omega) \in \Gamma$$

и

$$[u_0(\omega, t) \pm \hat{u}_2(\omega, t)] + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_1} [\hat{u}_1(\zeta, t) \pm \hat{u}_{12}(\zeta, t)] \frac{\chi(\zeta) d\zeta}{\zeta - \omega} +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_2} [w_1(\omega, \zeta, t) \pm v_1(\omega, \zeta, t)] \chi(\zeta) d\zeta, \quad (\omega, t) \in \Gamma, \quad (3.8)$$

то R_0 -задача имеет конечное (счетное) множество линейно независимых решений, а R -задача разрешима лишь при выполнении счетного (конечного) множества необходимых и достаточных условий разрешимости.

Сделаем несколько замечаний к теореме 3.

1. Если операторы (3.8) двусторонне обратимы, то R -задача удовлетворяет теории Нетера [7].

2. Пусть

$$a_{n\nu}^0 = t_2^{-\rho} b_{r\rho}^0 = t_1^{-s} c_{s3}^0 = t_1^{-m} t_2^{-\mu} d_{m\mu}^0$$

и, значит

$$u_0 = 4a_{n\nu}^0, \quad \hat{u}_1 = \hat{u}_2 = \hat{u}_{12} \equiv 0$$

(и наоборот), тогда операторы (3.8) существенно упрощаются и становятся однопараметрическими семействами операторов Фредгольма.

3. Обращаясь к операторам (3.6), нетрудно указать условия, обеспечивающие обращение в нуль ядер w_1, v_1 и w_2, v_2 , а операторов (3.8) — в характеристические сингулярные.

4. Если операторы (3.8) обратимы справа (слева), то существует полный бисингулярный оператор, являющийся левым (правым) регуляризатором оператора S'' [9]. Следовательно, соответствующую ему

по теореме 2 R -задачу можно преобразовать в некоторое уравнение Фредгольма.

5. Если операторы (3.8) обратимы слева, то уравнение $S'' \varphi = F$ разрешимо при выполнении счетного множества линейно независимых условий разрешимости. В этом случае имеет смысл полагать только те из функций, входящих в правые части условий (2.11), наперед заданными, которые не могут быть определены из условий разрешимости этого уравнения.

В заключение заметим, что аналогичным образом R -задача исследуется в классе $L_p \left(\begin{matrix} n, \nu, r, \rho \\ m, \mu, s, \sigma \end{matrix} \right)$ с правой частью условия (1.8) $f(t_1, t_2)$ из $L_p(\Gamma)$ и функциями (2.12), принадлежащими $L_p(\Gamma_1)$ и $L_p(\Gamma_2)$ соответственно.

§ 4. Интегро-дифференциальное бисингулярное уравнение

1°. Пусть

$$l = \max(n, r, s, m), \quad \lambda = \max(\nu, \rho, \sigma, \mu), \quad l + \lambda > 0,$$

а функции

а) $\alpha_{kx}^0(t_1, t_2)$, б) $\alpha_{kx}^1(t_1, \tau_1, t_2)$, в) $\alpha_{kx}^2(t_1, t_2, \tau_2)$, г) $\alpha_{kx}^{12}(t_1, \tau_1, t_2, \tau_2)$ удовлетворяют условию Гельдера при $(t_1, t_2) \in \Gamma$ и $(\tau_1, \tau_2) \in \Gamma$ и тождественно равны нулю, если соответственно:

$$\text{а) } k > n \text{ или } x > \nu, \quad \text{б) } k > r \text{ или } x > \rho,$$

$$\text{в) } k > s \text{ или } x > \sigma, \quad \text{г) } k > m \text{ или } x > \mu.$$

Через S_{kx}^a обозначим бисингулярный оператор, определяемый функциями α_{kx}^j , $j = 0, 1, 2, 12$. Сравнивая оператор S_{kx}^a с оператором S'' уравнения (3.1) замечаем, что он не содержит в качестве своего слагаемого смешанный оператор V тогда и только тогда, когда ядро α_{kx}^{12} можно записать так (ср. с (3.7)):

$$\alpha_{kx}^{12} = \hat{\alpha}_{kx}^{12}(t_1, t_2) + (\tau_1 - t_1)(\tau_2 - t_2) w_{kx}^{12}(t_1, \tau_1, t_2, \tau_2), \quad (4.1)$$

где w_{kx}^{12} — слабо биполярное ядро.

Далее, не ограничивая общности, как и в (3.7), положим

$$\alpha_{kx}^1 = \hat{\alpha}_{kx}^1(t_1, t_2) + (\tau_1 - t_1) w_{kx}^1(t_1, \tau_1, t_2),$$

$$\alpha_{kx}^2 = \hat{\alpha}_{kx}^2(t_1, t_2) + (\tau_2 - t_2) w_{kx}^2(t_1, t_2, \tau_2), \quad (4.2)$$

где w_{kx}^1 и w_{kx}^2 — слабо полярные ядра относительно $\tau_1 - t_1$ и $\tau_2 - t_2$.

В силу соотношений (4.1) и (4.2) оператор S_{kx}^a можно записать следующим образом:

$$S_{kx}^a = \hat{S}_{kx}^a + W_{kx}^1 + W_{kx}^2 + W_{kx}^{12}, \quad (4.3)$$

где

$$\hat{S}_{kx}^a = \alpha_{kx}^0 I + \hat{\alpha}_{kx}^1 S_1 + \hat{\alpha}_{kx}^2 S_2 + \hat{\alpha}_{kx}^{12} S_{12} \quad (4.4)$$

— характеристический бисингулярный оператор, а одномерные W_{kx}^1 , W_{kx}^2 и двумерный W_{kx}^{12} интегральные операторы порождены ядрами w_{kx}^1 , w_{kx}^2 и w_{kx}^{12} соответственно.

2°. В качестве первого приложения R -задачи рассмотрим сингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_{l\lambda}^a \psi)(t_1, t_2) &\equiv \sum_{k=0}^l \sum_{x=0}^{\lambda} (S_{kx}^a \psi_{kx})(t_1, t_2) = \\ &= f(t_1, t_2), \quad f \in H(\Gamma) \text{ (или } f \in L_p(\Gamma)), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где

$$\psi_{kx}(t_1, t_2) = \partial^{k+x} \psi(t_1, t_2) / \partial t_1^k \partial t_2^x.$$

Обозначим через $H_{l\lambda}(\Gamma)$ класс функций ψ таких, что на Γ определены при $k \leq l$ и $x \leq \lambda$ все производные ψ_{kx} , которые принадлежат классу $H(\Gamma)$.

Пусть $\psi(t_1, t_2)$ — любое решение уравнения (4.5) и, значит, $\psi \in H_{l\lambda}(\Gamma)$, если $f \in H(\Gamma)$, тогда

$$\Phi(z_1, z_2) = (K\psi)(z_1, z_2) \in H \left(\begin{matrix} l, \lambda, l, \lambda \\ l, \lambda, l, \lambda \end{matrix} \right) \quad (4.6)$$

и наоборот. Это следует из формул (1.3), в силу которых на Γ имеют место следующие формулы Сохоцкого:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \psi_{kx} \\ S_{12} \psi_{xk} \end{array} \right\} &= \Phi_{kx}^{++} \mp \Phi_{kx}^{+-} \mp \Phi_{kx}^{-+} + \Phi_{kx}^{--}, \\ \left. \begin{array}{l} S_1 \psi_{kx} \\ S_2 \psi_{kx} \end{array} \right\} &= \Phi_{kx}^{++} \mp \Phi_{kx}^{+-} \pm \Phi_{kx}^{-+} - \Phi_{kx}^{--}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

С помощью формул (4.7) уравнение (4.5) приводится к краевому условию R -задачи (1.8), в котором $n = r = s = m = l$, $\nu = \rho = \sigma = \mu = \lambda$ и, например, $\alpha_{kx}^j = w_{kx}^j$ при $j = 1, 2, 12$, а

$$\alpha_{kx}^0 = \alpha_{kx}^0 + \hat{\alpha}_{kx}^1 + \hat{\alpha}_{kx}^2 + \hat{\alpha}_{kx}^{12}.$$

Из (4.6) следует, что

$$\Phi^{\pm-}(z_1, \infty) = 0 \quad \forall z_1 \in D_1^{\pm} \text{ и } \Phi^{-\pm}(\infty, z_2) = 0, \quad \forall z_2 \in D_2^{\pm}.$$

Поэтому в соответствующих равенствах (2.11) надо полагать:

$$q^-(z_1) = q_{\lambda}^-(z_1) \equiv 0 \text{ и } p_0^-(z_2) = p_l^-(z_2) \equiv 0. \quad (4.8)$$

Остальные условия Коши (2.11) для R -задачи приводят нас к следующим условиям Коши для уравнения (4.5):

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\tau_1, \tau_2)}{\tau_1 - z_1} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_2^x + 1} = \Phi_{0x^+}^{\pm\pm}(z_1, 0) = q_x^{\pm}(z_1), \quad z_1 \in D_1^{\pm},$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{\psi(\tau_1, \tau_2)}{\tau_2 - z_2} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\tau_1^{k+1}} = \Phi_{k0}^{\pm\pm}(0, z_2) = p_k^{\pm}(z_2), \quad z_2 \in D_2^{\pm}, \quad (4.9)$$

где

$$x = 0, 1, \dots, \lambda \quad (x = 1, \dots, \lambda - 1) \quad \text{и} \quad k = 0, 1, \dots, l \quad (k = 1, \dots, l - 1),$$

если $z_j \in D_j^+$ ($z_j \in D_j^-$), $j = 1, 2$.

Интегро-дифференциальное уравнение (4.5) вместе с условиями (4.9) будем называть T -задачей и T_0 -задачей, если $f(t_1, t_2) \equiv 0$ и

$$q_x^{\pm}(z_1) \equiv 0, \quad x = 0, 1, \dots, \lambda, \quad p_k^{\pm}(z_2) \equiv 0, \quad k = 0, 1, \dots, l.$$

Соответствующую T -задаче R -задачу с краевыми условиями Коши (4.8) и (4.9) назовем R' -задачей.

Нами получена

Теорема 4. Каждому решению $\psi(t_1, t_2)$ T (T_0)-задачи по формуле (4.6) соответствует решение R' (R'_0)-задачи и наоборот: каждому решению R' (R'_0)-задачи по формуле Сохоцкого

$$\psi(t_1, t_2) = \Phi^{++}(t_1, t_2) - \Phi^{+-}(t_1, t_2) - \Phi^{-+}(t_1, t_2) + \Phi^{--}(t_1, t_2) \quad (4.10)$$

отвечает решение T (T_0)-задачи.

При этом линейно независимым решениям T_0 -задачи соответствуют независимые решения R'_0 -задачи и наоборот.

Из теорем 2—4 вытекает

Следствие 1. T -задача эквивалентна некоторому полному бисингулярному интегральному уравнению вида (3.1).

Поэтому $\Phi_{\pm}$ -нетеровость T -задачи может быть исследована с помощью обратимости соответствующей системы операторов типа (3.8).

§ 5. Дискретный аналог R -задачи

1°. В качестве второго приложения R -задачи рассмотрим ее дискретный аналог.

Через $l_p(Z^m)$, где $1 \leq p < +\infty$, обозначим множество векторов $\bar{h} = \{h_{j_1, \dots, j_m}\}_{j_1, \dots, j_m = -\infty}^{+\infty}$ таких, что

$$\sum_{j_1, \dots, j_m = -\infty}^{+\infty} |h_{j_1, \dots, j_m}|^p < +\infty.$$

По векторам $\bar{b}_{kx}^0 = \{b_{kx; \rho q}^0\}_{\rho, q=-\infty}^{+\infty} \in l_1(Z^2)$ и

$$\bar{b}_{kx}^1, \bar{b}_{kx}^2 \in l_1(Z^3), \bar{b}_{kx}^{12} \in l_1(Z^4)$$

построим вектор $\bar{b}_{kx}$ с компонентами

$$b_{kx; \rho l q \lambda} = b_{kx; l-\rho, \lambda-q}^0 + b_{kx; l, -1-\rho, \lambda-q}^1 + \\ + b_{kx; l-\rho, \lambda, -1-q}^2 + b_{kx; l, -1-\rho, \lambda, -1-q}^{12}.$$

Вектору $\bar{b}_{kx}$ сопоставим действующий в $l_2(Z^2)$ оператор

$$\bar{B}_{kx}^{+-} \bar{\varphi} = \left\{ \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{-x-1} \frac{(k+p)! (-q-1)!}{p! (-q-1-x)!} b_{kx; \rho l q \lambda} \varphi_{p+k, q+x} \right\}_{l, \lambda=-\infty}^{+\infty}.$$

Аналогичным образом определим векторы $\bar{a}_{kx}, \bar{c}_{kx}, \bar{d}_{kx}$ и поставим им в соответствие операторы вида $\bar{A}_{kx}^{++}, \bar{C}_{kx}^{--}, \bar{D}_{kx}^{--}$.

Теперь нетрудно убедиться, что дискретный аналог уравнения (1.8) таков

$$\sum_{k=0}^n \sum_{x=0}^v \bar{A}_{kx}^{++} \bar{\varphi} - \sum_{k=0}^r \sum_{x=0}^p \bar{B}_{kx}^{+-} \bar{\varphi} - \sum_{k=0}^s \sum_{x=0}^{\sigma} \bar{C}_{kx}^{--} \bar{\varphi} + \\ + \sum_{k=0}^m \sum_{x=0}^{\mu} \bar{D}_{kx}^{--} \bar{\varphi} = \bar{f}, \bar{f} = \{f_{l\lambda}\}_{l, \lambda=-\infty}^{+\infty} \in l_2(Z_2). \quad (5.1)$$

2°. После двумерного дискретного преобразования Фурье уравнение (5.1) перейдет в уравнение (1.8), в котором компоненты кусочно голоморфной функции $\Phi(z_1, z_2)$ имеют вид

$$\Phi^{++}(z_1, z_2) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} \varphi_{pq} z_1^p z_2^q, \quad \Phi^{--}(z_1, z_2) = \sum_{p=-\infty}^{-1} \sum_{q=-\infty}^{-1} \varphi_{pq} z_1^p z_2^q, \\ \Phi^{+-}(z_1, z_2) = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{-1} \varphi_{pq} z_1^p z_2^q, \quad \Phi^{-+}(z_1, z_2) = \sum_{p=-\infty}^{-1} \sum_{q=0}^{+\infty} \varphi_{pq} z_1^p z_2^q. \quad (5.2)$$

Следовательно, искомые решения такой R -задачи должны удовлетворять условиям

$$\Phi^{\pm-}(z_1, \infty) = 0 \quad \forall z_1 \in D_1^{\pm} \quad \text{и} \quad \Phi^{-\pm}(\infty, z_2) = 0 \quad \forall z_2 \in D_2^{\pm}. \quad (5.3)$$

Из остальных условий Коши (2.11) для R -задачи следует, что коэффициенты φ_{pq} рядов (5.2) с индексами

$$0 \leq p \leq n-1, q \geq 0, 0 \leq q \leq v-1, p \geq 0;$$

$$1 \leq p \leq r-1, q \leq -1; 1 \leq q \leq \sigma-1, p \leq -1 \quad (5.4)$$

могут быть взяты совершенно произвольно, лишь бы соответствующие им ряды

$$P_{nv}^{++}(z_1, z_2) = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{+\infty} \varphi_{pq} z_1^p z_2^q + \sum_{p=n}^{+\infty} \sum_{q=0}^{v-1} \varphi_{pq} z_1^p z_2^q,$$

$$P_r^{+-}(z_1, z_2) = \sum_{p=1}^{r-1} \sum_{q=-\infty}^{-1} \varphi_{pq} z_1^p z_2^q, \quad P_\sigma^{-+}(z_1, z_2) = \sum_{p=-\infty}^{-1} \sum_{q=1}^{\sigma-1} \varphi_{pq} z_1^p z_2^q$$

были голоморфны соответственно в областях D^{++} и D^{+-} , D^{-+} , а предельные значения производных

$$\frac{\partial^n P_{n^+}^{++}}{\partial z_1^n}, \quad \frac{\partial^s P_{n^+}^{++}}{\partial z_2^s}, \quad \frac{\partial^p P_r^{+-}}{\partial z_2^p}, \quad \frac{\partial^s P_\sigma^{-+}}{\partial z_1^s}$$

при $(z_1, z_2) \rightarrow (t_1, t_2) \in \Gamma$ принадлежали бы $L_2(\Gamma)$.

Уравнение (5.1) с описанными здесь дополнительными ограничениями на произвольные коэффициенты φ_{pq} с индексами, удовлетворяющими неравенствам (5.4), назовем U -задачей и U_0 -задачей, если такие коэффициенты равны нулю и $\bar{f} = \bar{0}$. R -задачу, соответствующую U -задаче, обозначим через R'' . Из сказанного здесь следует

Теорема 5. Каждому решению $\bar{\varphi}$ U (U_0)-задачи по формулам (5.2) в $L_2(\Gamma)$ соответствует решение R'' (R_0'')-задачи, и каждому решению (5.2) задачи R'' (R_0'') с помощью формулы Сохоцкого (4.10) и вычисления коэффициентов Фурье φ_{pq} функции $\psi(t_1, t_2)$ соответствует решение $\bar{\varphi}$ задачи U (U_0).

При этом линейно независимым решениям U_0 -задачи соответствуют линейно независимые решения R_0'' -задачи и наоборот.

Из теорем 2 и 5 получаем

Следствие 2. U -задача эквивалентна некоторому полному бисингулярному интегральному уравнению вида (3.1), заданному на единичном торе: $|t_1|=1$, $|t_2|=1$.

Ростовский-на-Дону государственный университет

Поступила 20.1.1975

Վ. Ա. ԿԱԿԻՉԵՎ. Ռիմանի խնդրի տիպի ինտեգրա-դիֆերենցիալ օպերատորներ պարունակող երկչափ եզրային խնդիր (ամփոփում)

Ուսումնասիրվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության մի խնդիր, որի եզրային պայմանը՝ տրված $D_1^{\pm} \times D_2^{\pm}$ շրջա կրկնակի տիրույթների եզրերի ընդհանուր հիմքի վրա, պարունակում է համապատասխանորեն $D_1^{\pm} \times D_2^{\pm}$ տիրույթներում հոլոմորֆ $\Phi^{\pm\pm}(z_1, z_2)$ ֆունկցիաների եզրային արժեքներով կազմված պժային ինտեգրա-դիֆերենցիալ օպերատորների բերվում է երկու կիրառություն:

V. A. KAKICHEV. Two dimensional Riemann type boundary problem with integro-differential operators (summary)

The problem of the analytical functions theory, for which the boundary condition involves integro-differential operators is considered. The boundary condition is imposed on the common skeleton of four bidomains $D_1^{\pm} \times D_2^{\pm}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. В. А. Какичев. Граничные свойства интеграла типа Коши многих переменных Уч. зап. Шахтинского пед. ин-та, 2, вып. 6, 1959, 25—90.
2. Л. Г. Магарадзе. Теория одного класса линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, Сообщ. АН Груз.ССР, т. IV, № 2, 1943, 103—110.
3. Ю. М. Крикунов. О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения, ДАН СССР, 85, № 2, 1952, 269—272.
4. Ю. М. Крикунов. Обобщенная задача Римана и линейное сингулярное интегро-дифференциальное уравнение, Уч. зап. Казан. ун-та, 116, № 4, 1956, 3—30.
5. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи, М., Физматгиз, 1963.
6. В. А. Какичев. О регуляризации сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши для билиндрических областей, Изв. Вузов, матем., № 1, 7 (62), 1967, 54—64.
7. И. Б. Симоненко. К вопросу о разрешимости бисингулярных и полисингулярных уравнений, Функ. анализ и его прилож., 5, вып. 1, 1971, 93—94.
8. В. С. Пилиди. О бисингулярном уравнении в пространстве L_p . Матем. исслед., 1972, т. 7., вып. 3, Кишинев, 167—175.
9. В. А. Какичев. Регуляризация и псевдoreгуляризация полных бисингулярных операторов с ядрами Коши и нормальной характеристической частью, ДАН СССР, 229, № 1, 1976, 19—22.