ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 3, 1977 Математика

Н. К. КАРАПЕТЯНЦ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Исследуется нетеровость сингулярных функциональных операторов вида

$$(K\varphi)(t)\equiv a_1(t)\,\varphi^+(t)+a_2(t)\,\varphi^-(t)+b_1(t)\,\varphi^+(te^{i\omega})+b_2(t)\varphi^-(te^{i\omega}),\ |t|=1, \tag{1}$$

где $a_j(t),\ b_j(t)\in C,\ j=1,\ 2;\ \frac{\omega}{2\pi}$ — иррациональное число;

$$\varphi^{\pm}=\frac{1}{2}(I\pm S)\,\varphi,\ \varphi(t)\in L_p(\Gamma),\ 1<p<\infty$$

(Γ — единичная окружность)

$$(S\varphi)(t)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau. \tag{2}$$

В отличие от обычных сингулярных операторов $(b_1(t)=b_2(t)=0)$ или случая рационального $\frac{\omega}{2\pi}$ (случай обобщенного карлемановского сдвига), когда условия нетеровости выражаются в виде необращения в нуль коэффициентов или некоторых определителей, составленных из коэффициентов, в случае иррационального $\frac{\omega}{2\pi}$ условия нетеровости оказываются принципиально иными. Основную роль в выявлении нетеровости здесь играют логарифмические средние значения коэффициентов. Кроме того, важно знать какие и сколько коэффициентов могут обращаться в нуль.

В настоящей работе найдены необходимые и достаточные условия нетеровости операторов (1) и формула индекса в предположении, что иррациональное число $\frac{\omega}{2\pi}$ „медленно приближается" (см. п. 2° § 1) рациональными числами. (Заметим, что почти все иррациональные числа „медленно приближаемы"). Исследование оператора (1) основывается на изучении функционального оператора вида $I+a(t)\,Q$, где

$$(Q\varphi)(t)=\varphi(te^{i\omega}). \tag{3}$$

При $a(t)=\mathrm{const}$ в [1]—[3] (ср. также [4]) исследование функционального оператора проведено на основе оценок для малых знаменателей, входящих в ряды, определяющие обратный оператор. При произвольной $a(t)$ используется „факторизация со сдвигом" [5] достаточно гладких функций, которая становится возможной благодаря оценкам малых знаменателей [1]—[3].

В § 1 приводятся сведения о „факторизации со сдвигом" гладких функций и определяется логарифмическое среднее непрерывных функций, не обращающихся в нуль на окружности $|t|=1$. Эти результаты позволяют в § 2 установить критерий обратимости функционального оператора $I+a(t)Q$ и указать способ построения обратного оператора. В § 3 получен основной результат для операторов вида (1), коэффициенты которых не обращаются в нуль на окружности $|t|=1$. В § 4 рассматриваются случаи, когда коэффициенты функционального (и сингулярного функционального) оператора могут обращаться в нуль.

Некоторые аналоги результатов §§ 2—3 в несколько иных формулировках и классах содержатся в кратком сообщении [6], относящемся к дискретным операторам типа свертки с осциллирующим коэффициентом $e^{i\omega n}$.

Заметим, что оператор (1) относится к классу сингулярных интегральных операторов с некарлемановским сдвигом (см. обзор в [7]—[8], где основное внимание уделяется обобщенному карлемановскому сдвигу). Нетеровость некоторых операторов с некарлемановским сдвигом, в том числе и оператора (1), рассматривалась в [9], где с помощью принципа сжатых отображений были указаны некоторые достаточные условия нетеровости оператора (1). Отметим еще недавнюю работу [10].

Автор благодарен С. Г. Самко за полезное обсуждение работы.

§ 1. Определения и вспомогательные предложения

1°. Логарифмическое среднее $a(t)\neq 0$, $|t|=1$. Через $\hat{C}$ будем обозначать множество функций, непрерывных на единичной окружности и не обращающихся на ней в нуль: $\hat{C}=\{a(t)\colon a(t)\in C,\ a(t)\neq 0,\ |t|=1\}$. Введем в рассмотрение функционал (логарифмическое среднее):

$$\rho(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|a(e^{i\theta})|\,d\theta,\quad a(t)\in\hat{C}. \tag{4}$$

Отметим некоторые свойства среднего $\rho(a)$.

Лемма 1. (непрерывность $\rho(a)$ на $\hat{C}$). *Если* $a(t)$, $a_\varepsilon(t)\in\hat{C}$ *и* $\|a(t)-a_\varepsilon(t)\|_C<(1-\sigma^{-1})\min\limits_{|t|=1}|a(t)|$, $\sigma>1$, *то*

$$|\rho(a)-\rho(a_\varepsilon)|\leqslant\sigma\,(\min_{|t|=1}|a(t)|)^{-1}\,\|a(t)-a_\varepsilon(t)\|_C. \tag{5}$$

Лемма вытекает из легко проверяемой оценки

$$\left\|\ln \frac{a_\varepsilon(t)}{a(t)}\right\| \leqslant \max\left\{\ln\left(1+\frac{|a_\varepsilon(t)-a(t)|}{|a(t)|}\right), \left|\ln\left(1-\frac{|a_\varepsilon(t)-a(t)|}{a(t)}\right)\right|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\,(\min_{|t|=1} |a(t)|)^{-1}\, \|a(t)-a_\varepsilon(t)\|.$$

Следствие 1. Пусть $a(t) \in \hat{C}$, $r = \operatorname{ind} a(t)$ и $\ln t^{-r} a(t)$ — ветвь логарифма, выбранная из условия $0 \leqslant \arg a(1) < 2\pi$. Пусть $b_\varepsilon(t) \in C^\infty$ такова, что $\|\ln t^{-r} a(t) - b_\varepsilon(t)\|_C < \varepsilon$ и $a_\varepsilon(t) = e^{b_\varepsilon(t)}$. Тогда

$$|\rho(a) - \rho(a_\varepsilon)| \leqslant M \cdot \varepsilon,\quad M = M(a), \tag{6}$$

$$\left\|\frac{a(t)}{a_\varepsilon(t)}\right\|_C < e^\varepsilon. \tag{7}$$

Лемма 2. *Для* $a(t) \in \hat{C}$ *существует аппроксимация в* C *функциями* $a_\varepsilon(t) \in C^\infty \cap \hat{C}$ *такая, что* $\rho(a_\varepsilon) = \rho(a)$.

Доказательство. Пусть $\overset{0}{a}_\varepsilon(t) \in C^\infty \cap \hat{C}$ — произвольная аппроксимация в C функции $a(t)$, тогда $a_\varepsilon(t) = \overset{0}{a}_\varepsilon(t)\, e^{\rho(a)-\rho(\overset{0}{a}_\varepsilon)}$ требуемая аппроксимация.

2°. „Медленно приближаемые" иррациональные числа. Говорят, что иррациональное число ω ($\in (0, 1)$) „медленно приближается" рациональными числами, если существуют постоянные $D = D(\omega) > 0$, $\gamma = \gamma(\omega) > 0$ такие, что для любых целых s и $m > 0$

$$\left|\omega - \frac{s}{m}\right| \geqslant \frac{D}{m^\gamma}. \tag{8}$$

Условие (8) выполняется для почти всех иррациональных ω [1], при этом можно взять $\gamma = 2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ (см. также [2]—[4]). Для алгебраических чисел ω степени $n \geqslant 2$ неравенство (8) при $\gamma = 2 + \varepsilon$ представляет собой теорему Туэ-Зигеля-Рота ([11], стр. 261), а при $n = \gamma = 2$ неравенство (8) превращается в теорему Лиувилля ([11], стр. 258). Среди оставшихся иррациональных чисел есть такие, скорость приближения которых рациональными числами может оказаться сколь угодно высокой (см. [1]), так что неравенство (8) для них невыполнимо.

3°. Факторизация со сдвигом гладких функций. В [5] показано, что функция $b(t) \in W$ (W — винеровское кольцо функций) допускает факторизацию в виде

$$b(t) = \frac{v(te^{i\omega})}{v(t)},\quad v(t) \neq 0,\quad v(t) \in W \tag{9}$$

тогда и только тогда, когда условия*:

а) $b(t) \neq 0$, $|t| = 1$;

б) $\operatorname{ind} b(t) = 0$;

в) $(2\pi\omega)^{-1} \int\limits_{|t|=1} t^{-1} \operatorname{Ln} b(t)\, dt$ — целое число хотя бы для одного выбора ветви $\operatorname{Ln} b(t)$;

г) $\{u_m\}_{m=\pm 1, \pm 2, \dots} =$

$$= \left\{(2\pi i)^{-1} (e^{i\omega m}-1)^{-1} \int\limits_{|t|=1} t^{-m-1} \ln b(t)\, dt\right\}_{m=\pm 1, \pm 2, \dots} \in l_1.$$

При выполнении условий а)—г) функция $v(t)$ в (9) определяется единственным образом (с точностью до постоянного множителя):

$$v(t) = t^r e^{u(t)},$$

где

$$r = \operatorname{ind} v(t) = -(2\pi\omega)^{-1} \int\limits_{|t|=1} t^{-1} \operatorname{Ln} b(t)\, dt, \quad u(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' u_m t^m \ (\in W).$$

Условие г) выполняется, если $b(t)$ достаточно гладкая функция. Именно, если $\frac{\omega}{2\pi}$ медленно приближается рациональными числами, т. е. выполнена оценка (8), то при $b(t) \in C^{[\gamma]+1}$ ряды вида

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' (e^{i\omega m}-1)^{-1} \int\limits_{|t|=1} t^{-m-1} \ln b(t)\, dt$$

сходятся абсолютно [2]—[4], и условие г) выполнено. Выполнения условий б)—в) легко добиться несколько изменив вид факторизации (9).

Пусть $a(t) \in \dot{C}$. Обозначим $r = \operatorname{ind} a(t)$ и

$$\eta_a = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} t^{-1} \ln\left[\frac{a(t)}{a(t_0)} \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-r}\right] dt, \quad \ln 1 = 0, \tag{10}$$

$$\lambda_a = t_0^{-r} a(t_0) e^{\eta_a}, \tag{11}$$

где t_0 — произвольная фиксированная точка, $|t_0| = 1$. Очевидно

$$|\lambda_a| = e^{\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|t|=1} t^{-1} \ln a(t)\, dt}. \tag{12}$$

---

* В силу иррациональности $\frac{\omega}{2\pi}$ условие в) может быть выполнено лишь для одной ветви $\operatorname{Ln} b(t)$. Значение интегралов в условии г) не зависит от выбора ветви логарифма.

Лемма 3. *Пусть* $\frac{\omega}{2\pi}$ — *иррациональное число, „медленно приближаемое" рациональными числами, и пусть* $a(t) \in C^{[\gamma]+1} \cap \hat{C}$. *Имеет место представление*

$$a(t) = \lambda_a t^r \frac{v(te^{i\omega})}{v(t)}, \quad r = \operatorname{ind} a(t), \tag{13}$$

где λ_a *определяется согласно* (10)—(11), $v(t) \in \hat{C}$ *и* $\operatorname{ind} v(t) = 0$.

Доказательство. Положив $b(t) = \lambda_a^{-1} t^{-r} a(t)$, видим, что для $b(t)$ выполнены условия а)—г) факторизуемости, причем

$$\operatorname{ind} v(t) = -(2\pi\omega)^{-1} \int\limits_{|t|=1} t^{-1} \operatorname{Ln}_k b(t)\, dt = 0,$$

где ветвь $\operatorname{Ln}_k b(t)$ выбрана из условия $\operatorname{Ln}_k e^{-\eta_a} = -\eta_a$ (для этого k выбирается из условия $0 \leqslant -\operatorname{Im} \eta_a - 2k\pi < 2\pi$). Применяя к функции $b(t)$ представление (9), получаем утверждение леммы.

§ 2. Функциональный оператор с коэффициентами из $\hat{C}$

Рассмотрим вначале простейший оператор $I + \lambda t^r Q$. Справедлива (ср. [10], [12])

Лемма 4. *Пусть* $\frac{\omega}{2\pi}$ — *иррациональное число (любое!) и* r — *вещественное число. Следующие условия эквивалентны:* а) *оператор* $I + \lambda t^r Q$ *является* Φ ($\Phi_\pm$) *оператором в* L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$; в) *оператор* $I + \lambda t^r Q$ *обратим в* L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$; с) $|\lambda| \neq 1$.

Доказательство. Очевидно при $|\lambda| \neq 1$ оператор $I + \lambda t^r Q$ обратим. Пусть далее, от противного, $|\lambda_0| = 1$, а оператор $I + \lambda_0 t^r Q$ нетеров. Воспользуемся равенствами $t^{-s}(I + \lambda_0 t^r Q) t^s = I + \lambda_0 e^{i\omega s} t^r Q$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Учитывая, что множество $\{\lambda_0 e^{i\omega s}\}_{s=-\infty}^{\infty}$ плотно [13] на единичной окружности и что свойство нетеровости устойчиво [14], из этих равенств нетрудно вывести, что оператор $I + \lambda t^r Q$ нетеров при всех λ, $|\lambda| = 1$. Но тогда оператор $t^r Q - \mu I$ нетеров при всех комплексных μ, что невозможно [14] в бесконечномерном пространстве.

Теорема 1. *Пусть* $a(t) \in \hat{C}$, $\frac{\omega}{2\pi}$ — *иррациональное число „медленно приближаемое" рациональными числами и*

$$(I + a(t) Q)\, \varphi = \varphi(t) + a(t)\, \varphi(te^{i\omega}). \tag{14}$$

Следующие условия эквивалентны; а) *оператор* $I + a(t) Q$ *является* Φ ($\Phi_\pm$) *оператором в* L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$; в) *оператор* $I + a(t) Q$ *обратим в* L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$; с) $\rho(a) \neq 0$.

Доказательство. Пусть вначале $a(t) \in C^{\infty}$. Тогда $a(t)$ допускает факторизацию (13), где $v(t) \in \hat{C}$ и $\operatorname{ind} v(t) = 0$. Эта факторизация порождает факторизацию оператора:

$$I + a(t)\, Q = \frac{1}{v(t)} \; (I + \lambda_a t^r Q)\, v(t)\, I. \tag{15}$$

Из (15), с учетом леммы 4, следует, что для нетеровости (обратимости) оператора $I + a(t)\, Q$ необходимо и достаточно, чтобы $|\lambda_a| \neq 1$. Остается учесть, что согласно (12) имеем $|\lambda_a| = e^{\rho(a)}$. Теорема доказана для случая $a(t) \in C^{\infty}$.

Пусть теперь $a(t)$ лишь непрерывна.

Достаточность. Пусть $\rho(a) < 0$. Обозначим $r = \operatorname{ind} a(t)$, а через $b_\varepsilon(t)$, $a_\varepsilon(t) = e^{b_\varepsilon(t)}$ — приближающие функции из следствия 1. Очевидно $\operatorname{ind} a_\varepsilon(t) = 0$, так что согласно (13) имеем

$$a_\varepsilon(t) = \lambda_{a_\varepsilon} \frac{v_\varepsilon(t e^{i\omega})}{v_\varepsilon(t)},$$

где λ_{a_ε}, $v_\varepsilon(t)$ определяются по $a_\varepsilon(t)$. Имеем

$$I + a(t)\, Q = \frac{1}{v_\varepsilon(t)} \left(I + \lambda_{a_\varepsilon} \frac{a(t)}{a_\varepsilon(t)}\, Q \right) v_\varepsilon(t)\, I. \tag{16}$$

Из (6)—(7) легко вывести, что

$$\left\| \lambda_a \frac{a(t)}{a_\varepsilon(t)}\, Q \right\|_{L_p} < e^{\rho(a) + (M+1)\varepsilon}.$$

Так как $\rho(a) < 0$, то отсюда следует, что при достаточно малом ε оператор в круглых скобках в правой части (16) обратим. Но тогда в силу (16) обратим и исходный оператор. Случай $\rho(a) > 0$ сводится к исследованному с помощью равенства

$$I + a(t)\, Q = a(t)\, Q \left[I + \frac{1}{a(te^{-i\omega})}\, Q^{-1} \right]$$

случаю с учетом того, что $\rho(a^{-1}) = -\rho(a) < 0$.

Необходимость. Пусть $\rho(a) = 0$ и, от противного, оператор $I + a(t)\, Q$ нетеров. Приблизим согласно лемме 2 функцию $a(t)$ функцией $a_\varepsilon(t) \in C^{\infty} \cap \hat{C}$ с сохранением логарифмического среднего $\rho(a_\varepsilon) = \rho(a) = 0$. При достаточно малом ε оператор $I + a_\varepsilon(t)\, Q$ будет нетеров в силу устойчивости свойства нетеровости. Последнее противоречит доказанному в случае $a(t) \in C^{\infty}$. Теорема доказана.

Следствие 2. Спектр оператора $a(t)\, Q$ в пространствах L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ есть окружность $|\mu| = e^{\rho(a)}$.

§ 3. Сингулярный функциональный оператор с коэффициентами из $\dot{C}$

Как и в § 2 изучим прежде всего простейший оператор вида

$$K_0 = (I + \lambda t^r Q)\, P_+ + P_- = I + \lambda t^r QP_+,\ P_\pm = \frac{1}{2}(I \pm S), \tag{17}$$

где r — целое число. Нам понадобится следующая (ср. [15], стр. 262)

Лемма 5. *Пусть X — банахово пространство, распадающееся в прямую сумму $X = X_+ \oplus X_-$ своих подпространств X_+, X_- с проекторами P_+, P_- соответственно, и пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий в X. а) Если A обратим и $P_-AP_+ \equiv 0$, то $AP_+ + P_-$ обратим слева; б) если A обратим и $P_+AP_- \equiv 0$, то $AP_+ + P_-$ обратим справа; в) если A нетеров и $AP_+ - P_+A$ вполне непрерывный оператор, то $AP_+ - P_+A$ нетеров.*

Лемма 6. *Пусть $\frac{\omega}{2\pi}$ — иррациональное число (любое!). Для того чтобы оператор K_0 был нетеров в L_p $(1 < p < \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $|\lambda| \neq 1$. Если $|\lambda| < 1$, то оператор K_0 обратим. Если $|\lambda| > 1$, то он обратим слева, при $r \geqslant 0$, обратим справа, при $r \leqslant 0$ и $\varkappa(K_0) = -r$.*

Доказательство. При $|\lambda| \neq 1$ оператор $I + \lambda t^r Q$ обратим и удовлетворяет условию в) леммы 5, при любом r, условию а) леммы 5 при $r \geqslant 0$ и условию б) леммы 5 при $r \leqslant 0$. Поэтому при $|\lambda| \neq 1$ оператор K_0 нетеров, причем при $r > 0$ оператор K_0 обратим слева, при $r \leqslant 0$ справа. Займемся формулой для индекса. Рассмотрим семейство $K_0^\delta = I + \lambda\delta t^r QP_+$, $\delta \in [0, 1]$. При фиксированном λ, $|\lambda| < 1$, операторы K_0^δ нетеровы при всех $\delta \in [0, 1]$, поэтому $\varkappa(K_0^1) = \varkappa(I + \lambda t^r QP_+) = \varkappa(K_0^0) = 0$. Учитывая, как показано выше, что K_0 односторонне обратим, получаем, что K_0 обратим при $|\lambda| < 1$. При $|\lambda| > 1$ перепишем K_0 в виде

$$K_0 = (\lambda t^r P_+ + P_-)\{(\lambda^{-1} t^{-r} Q^{-1} + I)\, P_+ + P_-\}(QP_+ + P_-) + T_1{}^*, \tag{18}$$

где оператор $QP_+ + P_-$ обратим: $(QP_+ + P_-)^{-1} = Q^{-1}P_+ + P_-$. Так как $|\lambda^{-1}| < 1$, то оператор $(\lambda^{-1} t^{-r} Q^{-1} + I)\, P_+ + P_-$ также обратим. Следовательно, $\varkappa(K_0) = \varkappa(\lambda t^r P_+ + P_-) = -r$.

Остается доказать необходимость условия $|\lambda| \neq 1$. Пусть $|\lambda_0| = 1$ и оператор $I + \lambda_0 t^r QP_+$ нетеров. Как и при доказательстве леммы 4 нетрудно вывести, что тогда оператор K_0 нетеров при всех λ, $|\lambda| = 1$. Введем оператор

$$(\Omega\varphi)(t) = \varphi\left(\frac{1}{t}\right),\ \Omega^2 = I. \tag{19}$$

---

* Через T_1, T_2, ... обозначаются вполне непрерывные операторы.

Учитывая равенства $\Omega Q = Q^{-1}\Omega$, $\Omega Q^{-1} = Q\Omega$, $\Omega P_{\pm} = P_{\mp}\Omega \pm T$, найдем, что $\Omega K_0 \Omega = (\lambda t^{-r} Q^{-1} P_- + P_+)(I + \bar{\lambda} e^{i\omega r} t^r QP_-) + T_2$, откуда следует нетеровость оператора $I + \bar{\lambda} e^{i\omega r} t^r QP_-$ при всех λ, $|\lambda| = 1$. Но тогда нетеров оператор $(I + \lambda_0 t^r QP_+)(I + \lambda_0 t^r QP_-) = I + \lambda_0 t^r Q + T$, что противоречит лемме 4. Теорема доказана.

Следствие 3. d-характеристика [14] оператора K_0 имеет вид $(0, 0)$ при $|\lambda| < 1$ и $(\max(0, -r), \max(0, r))$ при $|\lambda| > 1$.

Теорема 2 (основная). *Пусть* $a_j(t), b_j(t) \in \dot{C}$, $j = 1, 2$ *и* $\frac{\omega}{2\pi}$ — *иррациональное число, „медленно приближаемое" рациональными числами. Для того чтобы оператор* (1) *был нетеров в* $L_p (1 < p < \infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\rho(a_j) \neq \rho(b_j)$, $j = 1, 2$. *При выполнении этих условий индекс оператора* K *вычисляется по формуле*

$$\varkappa(K) = \begin{cases} \operatorname{ind} \dfrac{a_2(t)}{a_1(t)}, & \text{если } \rho(a_2) > \rho(b_2),\ \rho(a_1) > \rho(b_1), \\ \operatorname{ind} \dfrac{b_2(t)}{b_1(t)}, & \text{если } \rho(a_2) < \rho(b_2),\ \rho(a_1) < \rho(b_1), \\ \operatorname{ind} \dfrac{a_2(t)}{b_1(t)}, & \text{если } \rho(a_2) > \rho(b_2),\ \rho(a_1) < \rho(b_1), \\ \operatorname{ind} \dfrac{b_2(t)}{a_1(t)}, & \text{если } \rho(a_2) < \rho(b_2),\ \rho(a_1) > \rho(b_1). \end{cases} \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим вначале „нормированный" случай, когда $a_1(t) \equiv 1$, $b_1(t) = a(t)$, $a_2(t) \equiv 1$, $b_2(t) \equiv 0$, т. е.

$$K = (I + a(t)Q)P_+ + P_- = I + a(t)QP_+. \tag{21}$$

Следует показать, что условие $\rho(a) \neq 0$ необходимо и достаточно для нетеровости оператора K и что $\varkappa(K) = 0$ при $\rho(a) < 0$, $\varkappa(K) = -\operatorname{ind} a(t)$ при $\rho(a) < 0$.

Достаточность вытекает из утверждения в) леммы 5 с учетом того, что при $\rho(a) \neq 0$ оператор $I + a(t)Q$ обратим.

Формула для индекса. Пусть $\rho(a) < 0$. Рассмотрим семейство операторов

$$K^{\delta} = I + \delta a(t) QP_+,\ \delta \in [\delta_0, 1],\ 0 < \delta_0 < \min(1, \|a(t)\|_C^{-1} \|P_+\|_{L_p}^{-1}).$$

Так как $\rho(\delta a) = \ln \delta + \rho(a) < 0$, то операторы K^{δ} нетеровы при всех $\delta \in [\delta_0, 1]$, так что $\varkappa(K^1) = \varkappa(K^{\delta_0})$. Остается учесть, что за счет выбора δ_0 имеем $\varkappa(K^{\delta_0}) = 0$. Следовательно, $\varkappa(K) = 0$ при $\rho(a) < 0$. Если $\rho(a) > 0$, то используем равенство

$$K = (a(t)P_+ + P_-)\{I + a^{-1}(t) Q^{-1} P_+\}(QP_+ + P_-) + T_3.$$

Так как $\rho(a^{-1})<0$, то $\varkappa(I+a^{-1}(t)Q^{-1}P_+)=0$. Учитывая обратимость оператора $QP_+ + P_-$, получаем

$$\varkappa(K)=\varkappa(a(t)P_+ + P_-)=-\operatorname{ind} a(t).$$

Необходимость. Если $a(t)\in C^\infty$, то необходимость вытекает из равенства

$$K=\left(\frac{1}{v(t)}P_+ + P_-\right)[(I+\lambda_a t^r Q)P_+ + P_-](v(t)P_+ + P_-)+T_4, \tag{22}$$

получаемого с помощью факторизации (15). В (22) следует применить лемму 6. Если $a(t)$ лишь непрерывна, то следует воспользоваться, как и в теореме 1, приближением $a(t)$ с помощью леммы 2 бесконечно дифференцируемой функцией с нулевым логарифмическим средним значением.

Перейдем к общему случаю. Так как операторы $a_j(t)I+b_j(t)Q$, $j=1, 2$, и P_+ коммутируют с точностью до вполне непрерывного слагаемого, то в силу леммы 2 из [16] оператор K нетеров тогда и только тогда, когда нетеровы операторы

$$K_1=(a_1(t)I+b_1(t)Q)P_+ + P_- \text{ и } K_2=P_+ + (a_2(t)I+b_2(t)Q)P_-,$$

причем $\varkappa(K)=\varkappa(K_1)+\varkappa(K_2)$. Оператор K_1 сводится к „нормированному" и сингулярному:

$$K_1=(a_1(t)P_+ + P_-)(I+b_1(t)a_1^{-1}(t)QP_+)+T_5.$$

Оператор K_2 несущественно отличается от оператора K_1' вида K_1:

$$K_1'=\Omega K_2\Omega=P_- + \left(a_2\left(\frac{1}{t}\right)I+b_2\left(\frac{1}{t}\right)Q^{-1}\right)P_+ + T_6,$$

где Ω — оператор (19). Остается учесть, что $\rho\left(a\left(\frac{1}{t}\right)\right)=-\rho(a(t))$. Теорема доказана.

§ 4. Случай обращения в нуль коэффициентов

1°. Логарифмическое среднее. В случае произвольной непрерывной функции $a(t)$ интеграл

$$\rho(a)=\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\delta(a)}\ln|a(e^{i\theta})|\,d\theta, \tag{23}$$

где $\Gamma_\delta(a)=\{\theta: |a(e^{i\theta})|\geqslant\delta,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$, может быть конечным или равным $-\infty$. Если $\rho(a)$ конечно, то $\lim\limits_{\delta\to 0}\ln\delta \operatorname{mes}\overline{\Gamma_\delta(a)}=0$, где $\overline{\Gamma_\delta(a)}=\{\theta: |a(e^{i\theta})|<\delta,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$.

Лемма 7. *Пусть $a(t) \in C|\dot{C}$ и $\rho(a)$ конечно. Тогда существует аппроксимация $a_\delta(t) \in \dot{C}$ такая, что*

$$\|a(t) - a_\delta(t)\|_C \leqslant 2\delta \text{ и } \lim_{\delta \to 0} \rho(a_\delta) = \rho(a).$$

Доказательство. Положим ([8], стр. 97)

$$a_\delta(t) = \begin{cases} a(t), & t \in \Gamma_\delta(a) \\ \delta e^{iN_\delta(t)}, & t \in \overline{\Gamma_\delta(a)}, \end{cases} \tag{24}$$

где $N_\delta(t)$ — произвольная непрерывная вещественнозначная функция, выбираемая так, чтобы $a_\delta(t)$ была непрерывной. Очевидно, $a_\delta(t) \in \dot{C}$

$$\|a(t) - a_\delta(t)\|_C \leqslant 2\delta, \text{ и } \lim_{\delta\to 0} \rho(a_\delta) = \lim_{\delta \to 0} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_\delta(a)} \ln |a(e^{i\theta})|\, d\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{\ln \delta}{2\pi} \operatorname{mes} \overline{\Gamma_\delta(a)} \right\} = \rho(a).$$

2°. Функциональный оператор. Докажем аналог теоремы 1 в случае, когда $a(t)$ может обращаться в нуль.

Теорема 1′. *Пусть $a(t) \in C/\dot{C}$ и $\frac{\omega}{2\pi}$ — иррациональное число, „медленно приближаемое" рациональными. Для того чтобы оператор $I + a(t)Q$ был нетеров в L_p $(1 < p < \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $-\infty \leqslant \rho(a) < 0$. При выполнении этого условия оператор $I + a(t)Q$ обратим.*

Достаточность. Пусть $-\infty < \rho(a) < 0$. Выберем $a_\delta(t)$ согласно лемме 7, и пусть δ настолько мало, что $\rho(a_\delta) < 0$. При фиксированном δ приблизим, как при доказательстве теоремы 1, функцию $a_\delta(t)$ функцией $a_{\delta,\varepsilon}(t) \in C^\infty \cap \dot{C}$ и воспользуемся полученной там факторизацией (16):

$$I + a(t)Q = \frac{1}{v_{\delta,\varepsilon}(t)} \left\{ I + \lambda_{a_{\delta,\varepsilon}} \frac{a(t)}{a_\delta(t)} \cdot \frac{a_\delta(t)}{a_{\delta,\varepsilon}(t)} Q \right\} v_{\delta,\varepsilon}(t). \tag{25}$$

При ε достаточно малом оператор в фигурных скобках в (25) обратим, что влечет обратимость оператора $I + a(t)Q$.

Пусть теперь $\rho(a) = -\infty$. Для функции $a_\delta(t)$ вида (24) при некотором δ будет $-\infty < \rho(a_\delta) < 0$. Далее можно использовать построение вида (25).

Необходимость. Пусть $a(t)$ такова, что $\rho(a) > 0$, $a(t_0) = 0$ в некоторой точке, а оператор $I + a(t)Q$, от противного, нетеров. Приблизим $a(t)$ бесконечнодифференцируемой функцией $a_\varepsilon(t)$, обращающейся в нуль в той же точке t_0 и такой, что $\rho(a_\varepsilon) > 0$. При достаточно малом ε оператор $I + a_\varepsilon(t)Q$ будет нетеров. Положим $a_\varepsilon(t) = (t - t_0)\, b(t)$.

Так как

$$\rho(t-t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\varphi_0}{2}}^{\pi-\frac{\varphi_0}{2}}\ln 2|\sin x|\,dx=0,\ t_0=e^{i\varphi_0},$$

то $\rho(b)=\rho(a_\varepsilon)>0$. Далее с помощью лемм 7, 2 функцию $b(t)$ можно приблизить бесконечнодифференцируемой функцией $b_\delta(t)$, не обращающейся в нуль, так чтобы $\rho(b_\delta)$ по-прежнему оставалось положительным, а оператор $I+(t-t_0)b_\delta(t)Q$—нетеровым. Отсюда (используя факторизацию $b_\delta(t)$) уже нетрудно вывести нетеровость оператора $I+\lambda_{b_\delta}(t-t_0)t^{r_\delta}Q$, где $|\lambda_{b_\delta}|>1$, $r_\delta=\operatorname{ind} b_\delta(t)$. Покажем, что оператор вида $I+\lambda(t-t_0)t^rQ$, где $|\lambda|>1$, не может быть нетеровым. Из нетеровости оператора $I+\lambda(t-t_0)t^rQ$, в силу утверждения в) леммы 5 следует, что нетеров оператор

$$I+\lambda(t-t_0)t^rQ)P_++P_-=I+\lambda(t-t_0)t^rQP_+.$$

Функцию $t-t_0$ можно приблизить непрерывными функциями $c_\varepsilon^1(t)\neq0$ и $c_\varepsilon^2(t)\neq0$ такими, что $\operatorname{ind} c_\varepsilon^1(t)=0$, $\operatorname{ind} c_\varepsilon^2(t)=1$, а операторы

$$I+\lambda c_\varepsilon^1(t)t^rQP_+ \text{ и } I+\lambda c_\varepsilon^2(t)t^rQP_+$$

нетеровы и имеют одинаковый индекс (при достаточно малом ε), что противоречит теореме 3.

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что при $\rho(a)=0$ оператор $I+a(t)Q$ не может быть нетеровым. Если предположить противное, то при малом $\varepsilon\,(>0)$ нетеров оператор $I+e^\varepsilon a(t)Q$. Последнее невозможно, поскольку $\rho(e^\varepsilon a)=\varepsilon>0$.

Следствие 4. Пусть $a(t)\in C/\hat{C}$ и $\frac{\omega}{2\pi}$ — иррациональное число, „медленно приближаемое" рациональными числами. Спектр оператора $a(t)Q$ есть круг $|\mu|\leqslant e^{\rho(a)}$ (в частности, при $\rho(a)=-\infty$ единственной точкой спектра служит точка $\mu=0$).

Теорема 2′. *Пусть* $a_j(t)\in\hat{C}$, $b_j(t)\in C/\hat{C}$, $j=1,2$ *и* $\frac{\omega}{2\pi}$ — *иррациональное число, „медленно приближаемое" рациональными числами. Для того чтобы оператор* (1) *был нетеров в* $L_p\,(1<p<\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\rho(a_j)>\rho(b_j)$, $j=1,2$, *при этом*

$$\varkappa(K)=\operatorname{ind}\frac{a_2(t)}{a_1(t)}.$$

Достаточность и формула для индекса доказываются подобно тому, как это сделано в лемме 6, необходимость доказывается по аналогии с доказательством необходимости в теореме 1.

Мы здесь избрали одну из „допустимых" возможностей для коэффициентов $a_j(t)$, $b_j(t)$. Аналоги теоремы 2′ можно получать, делая иные предположения относительно коэффициентов (например, $a_1(t)$, $b_2(t) \in \hat{C}$, $b_1(t)$, $a_2(t) \in C/\hat{C}$ и др.), при этом важно, чтобы среди коэффициентов функциональных операторов $a_j(t)\,I + b_j(t)\,Q$, $j = 1, 2$ хотя бы один принадлежал классу $\hat{C}$. Как показывает следующая теорема принадлежность обоих коэффициентов функционального оператора классу $C/\hat{C}$ приводит к потере нетеровости.

Теорема 3. *Если* $a_1(t)$, $b_1(t) \in C/\hat{C}$, *либо* $a_2(t)$, $b_2(t) \in C/\hat{C}$, *то оператор* (1) *не может быть нетеровым в* L_p $(1 < p < \infty)$.

Доказательство теоремы 3 основывается и проводится в целом аналогично доказательству следующей леммы.

Лемма 8. *Если* $a(t)$, $b(t) \in C/\hat{C}$, *то оператор* $a(t)\,I + b(t)\,Q$ *не может быть нетеровым в* L_p $(1 < p < \infty)$.

а) $\rho(a) > -\infty$, $\rho(b) > -\infty$. Пусть, от противного, $R = a(t)\,I + b(t)\,Q$ нетеров. Покажем, что тогда $\rho(a) = \rho(b)$. При малом δ оператор $a_\delta(t)\,I + b(t)\,Q$, где $a_\delta(t)$ построена согласно лемме 7, нетеров. Из теоремы 1′ следует, что $\rho(b) < \rho(a_\delta)$, откуда в пределе найдем $\rho(b) \leqslant \rho(a)$. Аналогично показывается, что $\rho(b) \geqslant \rho(a)$. Следовательно, $\rho(b) = \rho(a)$. Рассмотрим оператор $R_\delta = e^{\rho(b_\delta) - \rho(a_\delta)}\,a_\delta(t)\,I - b(t)\,Q$, где $a_\delta(t)$, $b_\delta(t)$ построены согласно (24). При малом δ оператор R_δ нетеров и $\rho(e^{\rho(b_\delta) - \rho(a_\delta)}\,a_\delta) = \rho(b_\delta)$, что противоречит теореме 1.

б) $\rho(a) = -\infty$, $\rho(b) > -\infty$. Пусть, от противного, R нетеров, и пусть $a_\delta(t)$ построена согласно (24). При малом δ оператор $a_\delta(t)\,I + b(t)\,Q$ нетеров. Но тогда согласно теореме 1 необходимо, чтобы $\rho(b) < \rho(a_\delta)$. Так как $\rho(a_\delta) \to -\infty$, то необходимо $\rho(b) = -\infty$, что противоречит конечности $\rho(b)$.

в) Случай $\rho(a) > -\infty$, $\rho(b) = -\infty$ рассматривается аналогично б).

г) $\rho(a) = \rho(b) = -\infty$. Предположив, что R нетеров, получим, что при малом δ нетеров оператор $a(t)\,I + b_\delta(t)\,Q$, где $b_\delta(t)$ — функция (24). Последнее противоречит доказанному в б), так как $\rho(b_\delta) \geqslant \ln\delta > -\infty$. Лемма доказана.

В заключение отметим, что аналогично рассматривается более общий чем (1) оператор вида

$$(\bar{K}\varphi)(t) = a_1(t)\,\varphi^+(t) + a_2(t)\,\varphi^-(t) + b_1(t)\,\varphi^+(te^{i\omega_1}) + b_2(t)\,\varphi^-(te^{i\omega_2}),\ |t| = 1,$$

где или $\frac{\omega_j}{2\pi}$, $j = 1, 2$ — иррациональные числа, „медленно приближаемые“ рациональными, или одно из них рационально.

Ростовский на-Дону
государственный университет

Поступила 22.IV.1974

Ն. Կ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆՑ. Սինգուլյար ֆունկցիոնալ օպերատորների մի դասի մասին *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրվում է Նյոտերի օպերատոր լինելու խնդիրը (1) տեսքի սինգուլյար ինտեգրալ օպերատորների համար։

Գտնված են անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ (1) տեսքի օպերատորը Նյոտերի տիպի լինելու համար։ Նկարագրված է $I+a(t)Q$ ֆունկցիոնալ օպերատորի տեսքը։

Ուսումնասիրությունը հիմնվում է գործակիցների տեղաշարժով ֆակտորիզացիայի վրա և թույլ է տալիս ֆունկցիոնալ օպերատորների (իսկ որոշ դեպքերում նաև սինգուլյար օպերատորների) համար նշել հակադարձ օպերատորի կառուցման եղանակը։

N. K. KARAPETIANTZ. *On a class of singular functional operators* (summary)

The necessary and sufficient conditions for the operator (1) to be Noether are given and the spectrum of the function operator $I+a(t)Q$ is described. In some classes the way of construction of the inverse operators is pointed out.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Арнольд.* Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, № 1, 1961, 21—86.
2. *A. Wintner.* The linear difference equations of first order for angular variables, Duke. Math. Journ., 12, № 3, 1945, 445—449.
3. *Ю. Мозер* О кривых, инвариантных при отображении кольца, сохраняющего площадь, Сб. переводов „Математика", 6: 5, 1962, 51—67.
4. *M. Kuċzma.* Functional equations in a single variables, PAN, v. 46, Warszawa, 1968.
5. *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко.* О функциональном уравнении $\psi(x+a) - b(x)\psi(x) = g(x)$, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., V, № 5, 1970, 441—448.
6. *Н. К. Карапетянц.* Об одном классе дискретных операторов свертки с осциллирующими коэффициентами, ДАН СССР, 216, № 1, 1974, 28—31.
7. *Э. И. Зверович, Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций и сингулярные функциональные уравнения, УМН, XXIII, 3, 1968, 68—121.
8. *Г. С. Литвинчук.* Теория Нетера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно сопряженными неизвестными, Изв. АН СССР, сер. матем., 31, № 3, 1967, 563—586; т. 32, № 6, 1968, 1414—1417.
9. *В. Г. Кравченко.* К теории Нетера интегро-функциональных уравнений со сдвигом, Укр. мат. журнал, XXIV, № 6, 1972, 752—761.
10. *А. В. Айзенштат, В. А. Чернецкий.* Краевая задача Карлемана с неинволютивным сдвигом, Матем. заметки, 14, № 5, 1973, 677—685.
11. *А. А. Бухштаб.* Теория чисел, Учпедгиз, М., 1960.
12. *А. Б. Антоневич.* Псевдодифференциальные операторы со сдвигом, Седьмая летняя матем. школа АН Укр.ССР, Инст. матем., Киев, 1970, 264—273.
13. *В. И. Арнольд.* Малые знаменатели и проблемы устойчивости движений в классической и небесной механике, УМН, XVIII, вып. 6 (114), 1963, 91—192.
14. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН, XII, вып. 2, 1957, 43—118.
15. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов, Кишинев, „Штиинца", 1973.
16. *Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко.* О дискретных операторах Винера—Хопфа с осциллирующими коэффициентами, ДАН СССР, 200, № 1, 1971, 17—20.