ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

В. И. БЕЛЫЙ

# К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ В КРУГОВОМ КОЛЬЦЕ

В ряде работ М. М. Джрбашяна разработаны методы исследования мероморфных функций, в которых существенную роль играли аналоги классических формул Коши, Шварца и Пуассона для представления аналитических и гармонических в круге функций [1, 2], указано полное структурное описание классов функций, ассоциированных с операторами дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана—Лиувилля и их обобщением, предложенным М. М. Джрбашяном [2]. Применение данных методов для изучения аналогичных вопросов в круговом кольце связано с необходимостью получения аналогов интегральных представлений интегро-дифференциальных операторов дробного порядка и обобщенных операторов в круговом кольце; задача о построении таких представлений ставилась М. М. Джрбашяном в 1968 году.

В данной работе предлагаются интегральные представления, ассоциированные с так называемыми союзными ядрами [3], полностью решающие задачу М. М. Джрбашяна. Получены обобщения формулы А. Вилья [4], частными случаями которых являются интегральные представления типа формулы Шварца, ассоциированные с операторами дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, Вейля, М. М. Джрбашяна. Доказывается, что данные интегральные представления являются существенно более широкими, чем формула Вилья.

Пусть $G$—двусвязная ограниченная область, граница которой составлена замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми $L_1$ и $L_2$, $G_1$—внутренность $L_1$, $G_2$—внешность $L_2$, $G = G_1 \cap G_2$, $0 \in G_1 \setminus G_2$. Всякую регулярную в $G$ функцию $f(z)$ можно представить в виде $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, где $f_1$ регулярна в $G_1$ и имеет в окрестности точки $z = 0$ разложение $f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, а $f_2$ регулярна в $G_2$ и разлагается в окрестности точки $z = \infty$ в ряд $f_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^{-k}$. Рассмотрим пару союзных ядер (см. [3], стр. 168)

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad F_*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{-1} z^k \quad (b_k \neq 0, \ k = 0, 1, \cdots). \tag{1}$$

Функции (1) регулярны в единичном круге, имеют особенность в точке $z=1$ и допускают аналитическое продолжение по любому пути, не проходящему через 1, $\infty$, 0. Приведем некоторые известные результаты.

Если $D$ — односвязная область, ограниченная жордановой спрямляемой кривой $L$ и содержащая начало координат, $\varphi(z)$ — регулярная в $D$, причем в окрестности точки $z=0$ имеет место разложение $\varphi(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k$, то композиция Адамара

$$\varphi_*(z)=\varphi\circ F\overset{df}{=}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k b_k z^k$$

аналитически продолжима в $D$, и для всякого $z\in D$ и $\varphi\in E_1$ имеет место формула

$$\varphi_*(z)=\varphi\circ F=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\varphi(\zeta)F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (2)$$

Если $D$ — односвязная область со спрямляемой жордановой границей, содержащая $z=\infty$, и $\varphi(z)$ регулярна в $D$, причем в окрестности точки $z=\infty$ имеет место разложение $\varphi(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_{-k}z^{-k}$, то композиция $\varphi_*(z)=\varphi\circ F\overset{df}{=}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_{-k}b_k z^{-k}$ является элементом регулярной в $D$ функции, причем для всякого $z\in D$ и $\varphi\in E_1$

$$\varphi_*(z)=\varphi\circ F=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\varphi(\zeta)F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}. \qquad (3)$$

Эти результаты для кусочно-гладкой границы $L$ и функции $\varphi(z)$, регулярной на $\overline{D}$, содержатся в [3], их доказательство остается в силе при сделанных здесь предположениях. В случае, когда $\varphi_*(z)\in E_1$ (а $\varphi$ может и не принадлежать классу $E_1$), формулы (2) и (3) допускают обращение

$$\varphi(z)=\varphi_*\circ F_*=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\varphi_*(\zeta)F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\quad(D\ni 0), \qquad (2')$$

$$\varphi(z)=\varphi_*\circ F_*=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\varphi_*(\zeta)F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\quad(D\ni\infty). \qquad (3')$$

Заметим, что интегральные представления (2′) и (3′) возможны для функций $\varphi(z)$, не представимых интегралом Коши по контуру $L$. Формула интеграла Коши, различные соотношения для дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля в комплексной области [5], [1, гл. IX], операторов М. М. Джрбашяна, обобщающих дробное интегро-дифференцирование [2], и некоторых других получаются из формул (2), (3), (2′), (3′) при соответствующем выборе ядер $F$ и $F_*$.

Определение 1. Композицией Адамара функции $f$ с союзным ядром $F$ в двусвязной области $G$ назовем функцию

$$f_*(z) = f \circ F \overset{df}{=} f_1 \circ F + f_2 \circ F. \tag{4}$$

Из определения и формул (2), (3), (2′), (3′) следует, что $f_*(z)$ регулярна в $G$, причем при $z \in G$

$$f_*(z) = f \circ F = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} f_1(\zeta)\, F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} f_2(\zeta)\, F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} f(\zeta)\, F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} f(\zeta)\, F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} - a_0 b_0, \tag{5}$$

если $f(z) \in E_1$ в $G$ (определение класса $E_1$ в двусвязной области очевидно)*. Аналогично, если $f_*(z) \in E_1$ в $G$, то $f(z)$ выражается через свои угловые предельные значения формулой

$$f(z) = f_* \circ F_* = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} f_*(\zeta)\, F_*\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} f_*(\zeta)\, F_*\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} - a_0. \tag{5′}$$

Формулы (5) и (5′) позволяют получить в круговом кольце обобщения классической формулы Вилья [4].

Теорема 1. *Если $f(z) \in E_1$ в кольце $G = \{z\colon r < |z| < \rho\}$, а $F(z)$ и $F_*(z)$ — пара союзных ядер (1), то для всякого $z \in G$ справедливо интегральное представление*

$$f_*(z) = f \circ F = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho} [\mathrm{Re}\, f(\zeta)]\, \mathbf{F}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r} [\mathrm{Re}\, f(\zeta)]\, \mathbf{F}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} - b_0(a_0 + 2\bar{a}_0), \tag{6}$$

*где*

$$\mathbf{F}(z) = 2F(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1 - r^{2k}\rho^{-2k}}\, b_k (z^k - z^{-k})$$

— *аналог ядра Вилья, а*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta, \quad t \in [r, \rho].$$

---

* Все криволинейные интегралы берутся в положительном относительно внутренности кривой направлении.

*Если $f(z)$ регулярна в $G$ и $f_*(z)=f\circ F$ принадлежит классу $E_1$ в $G$, то при всяком $z\in G$ имеет место интегральное представление*

$$f(z)=f_*\circ F_*=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re}f_*(\zeta)]\,\check{\mathbf{F}}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re}f_*(\zeta)]\,\check{\mathbf{F}}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{a_0b_0+2\overline{a_0b_0}}{b_0}, \tag{6'}$$

*где*

$$\check{\mathbf{F}}(z)=2F_*(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\,b_k^{-1}(z^k-z^{-k})$$

*— аналог ядра Вилья, а*

$$a_0b_0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\frac{f_*(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta,\ t\in[r,\rho].$$

Доказательство. Достаточно доказать формулу (6), так как (6′) получается применением (6) к композиции $f_*\circ F_*$. Принимая во внимание, что для функций класса $E_1$ в кольце $G$ коэффициенты ряда Лорана могут быть вычислены через радиальные предельные значения $f(z)$ на границе $G$ по формулам

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}\,d\zeta;\quad \overline{a}_k=\frac{t^{-2k}}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\overline{f(\zeta)}\,\zeta^{k-1}\,d\zeta;\ t=r,\rho;\ k=0,\pm1,\cdots,$$

из представления (5) получаем

$$f_*(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-$$

$$-a_0b_0-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}\overline{f(\zeta)}\,F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\overline{f(\zeta)}\,F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-a_0b_0-$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{0}\overline{a}_k\,b_{|k|}\,\rho^{2k}z^{-k}-\sum_{k=0}^{\infty}\overline{a}_k\,b_{|k|}\,r^{2k}z^{-k}=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,F\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,F\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-a_0b_0-2\overline{a}_0b_0+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[f(\zeta)+\overline{f(\zeta)}]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}b_k}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\left[\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}-\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{-k}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[f(\zeta)+\overline{f(\zeta)}]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}b_k}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\left[\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k-\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{-k}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\mathrm{Re}\,f(\zeta)]\,\mathbf{F}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\mathrm{Re}\,f(\zeta)]\,\mathbf{F}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-b_0\,(a_0+2\overline{a}_0),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Поскольку в теореме 1 $G$ — круговое кольцо, требование возможности аналитического продолжения союзных ядер $F$ и $F_*$ из единичного круга в плоскость без точек 0, 1, $\infty$ является излишним.

Для функции $f(z)$, регулярной в двусвязной области можно построить более общий аналог композиции Адамара. Для этого рассмотрим две пары союзных ядер:

$$F^{(1)}(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^k,\ F_*^{(1)}(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}b_k^{-1}z^k,\ b_k\neq 0,\ k=1,2,\cdots,$$

$$F^{(2)}(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}b_{-k}z^k,\ F_*^{(2)}(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}b_{-k}^{-1}z^k,\ b_{-k}\neq 0,\ k=1,2,\cdots.$$

Как и раньше, функцию $f(z)$ представим в виде $f(z)=f_1(z)+f_2(z)$, где $f_1$ и $f_2$ — те же, что и в определении 1.

Определение 2. Композицией Адамара функции $f$ с ядрами $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ в двусвязной области $G$ назовем функцию

$$f_*(z)=f_1\circ(F^{(1)},F^{(2)})\overset{df}{=}f_1\circ F^{(1)}+f_2\circ F^{(2)}. \tag{7}$$

Регулярность функции $f_*=f\circ(F^{(1)},F^{(2)})$ в области $G$ очевидным образом следует из определения 2. Кроме того, учитывая формулы (2), (2'), (3), (3') для функции $f\in E_1$ в $G$ и $z\in G$ будем иметь

$$f_*(z)=f\circ(F^{(1)},F^{(2)})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}f_1(\zeta)F^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}f_2(\zeta)F^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}f(\zeta)F^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}f(\zeta)F^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-a_0. \tag{8}$$

Совершенно аналогично, если $f_*=f\circ(F^{(1)},F^{(2)})\in E_1$ в $G$ и $f$ регулярна в $G$, то

$$f(z)=f_*\circ(F_*^{(1)},F_*^{(2)})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}f_*(\zeta)F_*^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} f_*(\zeta)\, F_{\bullet}^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\cdot \tag{8'}$$

Основываясь на интегральных представлениях (8) и (8'), получаем следующее усиление теоремы 1.

Теорема 2. *Если $f(z) \in E_1$ в кольце $G = \{z: r < |z| < \rho\}$; $F^{(1)}(z)$ $F_{\bullet}^{(1)}(z)$ и $F^{(2)}(z)$, $F_{\bullet}^{(2)}(z)$ — две пары союзных ядер, не обязательно продолжаемых аналитически за пределы единичного круга, то для всякого $z \in G$ справедливо интегральное представление*

$$f_*(z) = f \circ (F^{(1)}, F^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho} [\operatorname{Re} f(\zeta)]\, \mathbf{F}^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r} [\operatorname{Re} f(\zeta)]\, \mathbf{F}^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} - (a_0 + 2\bar{a}_0), \tag{9}$$

*где*

$$\mathbf{F}^{(1)}(z) = 2F^{(1)}(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\,(b_{-k} z^{k} - b_k z^{-k}), \tag{10}$$

$$\mathbf{F}^{(2)}(z) = 2F^{(2)}(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\,(b_k z^{k} - b_{-k} z^{-k}), \tag{11}$$

*— аналоги ядер Вилья и*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta,\quad t \in [r, \rho].$$

*Если же $f(z)$ регулярна в $G$, а $f_*(z) = f \circ (F^{(1)}, F^{(2)}) \in E_1$ в $G$, то при $z \in G$ справедливо интегральное представление*

$$f(z) = f_* \circ (F_{\bullet}^{(1)}, F_{\bullet}^{(2)}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho} [\operatorname{Re} f_*(\zeta)]\, \check{\mathbf{F}}^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r} [\operatorname{Re} f_*(\zeta)]\, \check{\mathbf{F}}^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} - (a_0 + 2\bar{a}_0), \tag{9'}$$

*где*

$$\check{\mathbf{F}}_1(z) = 2F_{\bullet}^{(1)}(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\, b_{-k}^{-1} z^{k} - b_k^{-1} z^{-k}), \tag{10'}$$

$$\check{\mathbf{F}}_2(z) = 2F_{\bullet}^{(2)}(z) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\,(b_k^{-1} z^{k} - b_{-k}^{-1} z^{-k}), \tag{11'}$$

*— аналоги ядер Вилья и*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\frac{f_*(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=t}\frac{z(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta,\quad t \in [r, \rho].$$

Доказательство. Как и в теореме 1, достаточно убедиться в справедливости формулы (9). Преобразовывая правую часть (8), находим

$$f_*(z)=f\circ(F^{(1)},\ F^{(2)})=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,F^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,F^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}\overline{f(\zeta)}\,F^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\overline{f(\zeta)}\,F^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-a_0=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,F^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,F^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-a_0-$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{-1}\bar{a}_k\,b_{-k}\,\rho^{2k}\,z^{-k}-\sum_{k=1}^{\infty}\bar{a}_k\,b_{-k}\,r^{2k}\,z^{-k}-2\bar{a}_0=$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,F^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,F^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-(a_0+2\bar{a}_0)+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[f(\zeta)+\overline{f(\zeta)}]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\left[b_{-k}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}-b_k\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{-k}\right]-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[f(\zeta)+\overline{f(\zeta)}]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}\left[b_{-k}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}-b_k\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k}\right]\frac{d\zeta}{\zeta}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=\rho}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,\mathbf{F}^{(1)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}[\operatorname{Re}f(\zeta)]\,\mathbf{F}^{(2)}\left(\frac{\zeta}{z}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}-(a_0+2\bar{a}_0),$$

что и требовалось доказать.

Укажем характерные частные случаи формул (6—6′) и (9—9′), а также некоторые следствия теорем 1 и 2.

1°. *Формула Вилья.* Пусть в теореме 1 $F(z)=\dfrac{1}{1-z}$ или в теореме 2 $F^{(1)}(z)=F^{(2)}(z)=\dfrac{1}{1-z}$. Тогда $F_*(z)=F_*^{(1)}(z)=F_*^{(2)}(z)=\dfrac{1}{1-z}$ и формулы (6—6′) и (9—9′) превращаются в формулу Вилья [4]

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}f(\rho e^{it})\,\Phi\left(\frac{z}{\rho e^{it}}\right)dt+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}f(re^{it})\,\Phi\left(\frac{re^{it}}{z}\right)dt-\bar{a}_0,$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1+z}{1-z} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}}(z^k + z^{-k}); \; a_0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=R;\, r<R<\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta.$$

2°. *Аналог дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Луивилля.* Пусть в теореме 1

$$F(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{1+\alpha}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+k)} z^k, \; |z|<1,$$

$$F_*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+\alpha+k)} z^k, \; |z|<1,$$

где $\alpha$ — произвольное действительное число, не принимающее целых отрицательных значений. Тогда оператор $f_* = f \circ F$ в кольце $r<|z|<\rho$ является аналогом интегро-дифференцирования по Риману-Лиувиллю порядка $\alpha$ функций, регулярных в единичном круге (см., например, [6], [5], [2]). Ядро $\check{\mathrm{F}}$ в интегральном представлении (6′) в этом случае имеет вид

$$\check{\mathrm{F}}(z) = \frac{2\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{1+\alpha}} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{2k}\rho^{-2k}}{1-r^{2k}\rho^{-2k}} \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha+k)}(z^k - z^{-k}).$$

Пример функции $\frac{1}{1-z}$, не принадлежащей классу $E_1$ в кольце $r<|z|<1$, но представимой по формуме (6′) через предельные значения $\operatorname{Re} f_*$ при всяком нецелом $\alpha<0$, показывает, что формулы (6—6′) и (9—9′) являются принципиально более широким классом интегральных представлений.

3°. *Аналог дробного интегро-дифференцирования в смысле Вейля.* Выбирая в качестве союзных ядер в теореме 1 функции

$$F(z, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(in)^\beta} z^n; \; F_*(z, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} (in)^\beta z^n,$$

где $\beta$ — действительное число, для функций в кольце, коэффициент $a_0$ лорановского разложения которых равен нулю, получим обобщение формулы Вилья, являющееся представлением функции через действительную часть аналогов дробных производных и интегралов в смысле Вейля. Если $r=0$, $\rho=1$ и функция $f(z)$ регулярна в замкнутом единичном круге, причем $f(0)=0$, получим новое обобщение формулы Шварца:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f^{(\beta)}(e^{it})\, F_*(ze^{-it})\,dt,$$

где $f^{(\beta)}(e^{it})$ — оператор дробного интегро-дифференцирования по Вейлю функции $\varphi(t) = f(e^{it})$, $t \in (-\infty, \infty)$.

4°. *Аналог интегро-дифференциального оператора М. М. Джрбашяна* [2]. Пусть $\omega(x)$ — неотрицательная непрерывная на $[0, 1)$ функция, для которой $\omega(0) = 1$; $\int\limits_0^1 \omega(x)\,dx < \infty$, и при любом $r \in [0, 1)$

$$\int\limits_r^1 \omega(x)\,dx > 0.$$

Положим $\Delta_0 = 1$,

$$\Delta_k = k\int\limits_0^1 \omega(x)\,x^{k-1}\,dx \quad (k = 1, 2, \cdots),$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k z^k, \quad F_*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k^{-1} z^k. \tag{12}$$

Известно [2], что степенные ряды (12) имеют единичный радиус сходимости. Композиция регулярной в кольце $r < |z| < \rho$ функции $f(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_k z^k$ с ядром $F(z)$, определяемая формулой (4), является аналогом оператора М. М. Джрбашяна [2] $L^{\omega}[f(z)]$. (Если $f(z)$ регулярна в единичном круге, то $f \circ F \equiv L^{\omega}[f(z)]$), а формулы (6—6′) с ядрами (12) дают обобщение на случай кругового кольца интегральных представлений М. М. Джрбашяна типа формулы Шварца (см. [2], теорема 3).

Теорема 2 позволяет получать для конкретных союзных ядер интегральные представления с „несимметричным" изменением ряда Лорана функции, регулярной в кольце.

В качестве следствия теорем 1 и 2 легко вывести интегральные формулы для гармонических в кольце функций, аналогичные формуле Пуассона.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР, г. Донецк

Поступила 20.I.1975

Վ. Ի. ԲԵԼԻ. Շրջանային օղակում ռեգուլյար ֆունկցիաների ինտեգրալային ներկայացումների խնդրի վերաբերյալ (*ամփոփում*)

*Շրջանային օղակում ռեգուլյար ֆունկցիաների համար նշված են որոշ ինտեգրալային ներկայացումներ, որոնք հանդիսանում են Վիլլյաի բանաձևի ընդհանրացումներ։ Որպես մասնավոր դեպքեր ստացված են միավոր շրջանում կոտորակային ինտեգրո-դիֆերենցման տարբեր տեսքերի օպերատորներով ներկայացումների անալոգները։*

V. I. BELYI. *On the problem of the integral, representation for functions regular in the ring* (summary)

Some integral representations are pointed out for the regular in the ring functions. These representations generalise the Villat's formula. Analogues of the integral representations associated with various operators of fractional integration and differentiation in the unit disk are obtained for special cases.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Изд. „Наука", 1966.
2. *М. М. Джрбашян.* Обобщенный оператор Римана-Лиувилля и некоторые его применения, Изв. АН СССР, серия матем., 32, № 5, 1968, 1075—1111.
3. *В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев.* Конструктивная теория функций комплексного переменного, М—1, „Наука", 1964.
4. *H. Villat.* Le probleme de Dirichlet dans une aire annulaire, Rend. Circolo Mathem. di Palermo, XXXIII, 1912, 134—174.
5. *W. E. Sewell.* Generalized derivatives and approximation by polynomials, Trans. Amer. Math. Soc., 41, № 1, 1937, 84—123.
6. *Н. Я. Сонин.* О дифференцировании с произвольным указателем Матем. сб, 6, вып. 1, 1972, 134—176.