ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XII, № 2, 1977 Математика

В. А. ЯВРЯН

О СЛЕДЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1°. В пространстве $L^2(0, b)$ рассмотрим интегральный оператор

$$(Gf)(x) = \int_0^b G(x, t) f(t)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant b). \tag{1}$$

Если оператор G имеет след и ядро $G(x, t)$ непрерывно, то, как известно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(G) = \int_0^b G(x, x)\, dx,$$

где $\lambda_n(G)$—собственные значения оператора G. Но это равенство, вообще говоря, не имеет места даже тогда, когда ядро $G(x, t)$ непрерывно в $0 \leqslant x,\ t \leqslant b < \infty$.

В этой заметке рассматривается частный вид интегрального оператора, а именно

$$G(x, t) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{p} u_k(x) v_k(t), & x \leqslant t \\ \sum\limits_{k=1}^{p} u_k(t) v_k(x), & x \geqslant t, \end{cases} \tag{2}$$

где функции $u_k(x)$ и $v_k(x)$, $k = 1, 2, \cdots, p$, принадлежат пространству $L^2(0, b)$, $b \leqslant \infty$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Оператор G, задаваемый формулами* (1) *и* (2), *имеет след в смысле главного значения и*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{|\lambda_n(G)| > \varepsilon} \lambda_n(G) = \int_0^b \sum_{k=1}^{p} u_k(x) v_k(x)\, dx. \tag{3}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение вольтеров оператор

$$(Kf)(x) = \int_0^x \sum_{k=1}^{p} (u_k(t) v_k(x) - u_k(x) v_k(t)) f(t)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant b).$$

Обозначим через K_R и K_I соответственно вещественную и мнимую части оператора K. Легко видеть, что

$$K_R f - Gf = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left(v_k(x)\int_0^b u_k(t) f(t)\,dt + u_k(x)\int_0^b v_k(t) f(t)\,dt\right). \tag{4}$$

Пусть $\lambda_n^+(A)$ ($\lambda_n^-(A)$) — положительные (отрицательные) собственные значения оператора A, занумерованные в порядке убывания (возрастания). Так как разность $K_R - G$ является конечномерным оператором, то согласно одной теореме, доказанной в работе А. С. Маркуса ([1], стр. 115) имеем

$$\mathrm{Sp}\,(K_R - G) = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^+(K_R) - \lambda_n^+(G)) + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^-(K_R) - \lambda_n^-(G)).$$

Отсюда, с учетом равенства (4), получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^+(K_R) - \lambda_n^+(G)) + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_n^-(K_R) - \lambda_n^-(G)) =$$

$$= -\sum_{k=1}^{p}\int_0^b u_k(t)\,v_k(t)\,dt. \tag{5}$$

Так как оператор $K_R - G$ — $2p$-мерный, то по известным неравенствам Куранта (см. [2], стр. 258)

$$\lambda_{n+2p}(G) \leqslant \lambda_n(K_R),\quad \lambda_{n+2p}(K_R) \leqslant \lambda_n(G).$$

Отсюда и из (5) легко получить, что

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\sum_{|\lambda_n(K_R)|>\varepsilon}\lambda_n(K_R) - \sum_{|\lambda_n(G)|>\varepsilon}\lambda_n(G)\right) = -\sum_{k=0}^{p}\int_0^b u_k(t)\,v_k(t)\,dt. \tag{6}$$

Теперь вычислим мнимую часть оператора K. Имеем

$$(K_I f)(x) = \frac{1}{2i}(K - K^*) f = -\frac{1}{2i}\sum_{k=1}^{p}\left(u_k(x)\int_0^b v_k(t) f(t)\,dt - v_k(x)\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^b u_k(t) f(t)\,dt\right).$$

Итак, мнимая часть оператора K конечномерна. Следовательно, по известной теореме М. Г. Крейна ([3], стр. 240)

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sum_{|\lambda_n|>\varepsilon}\lambda_n(K_R) = 0.$$

Это равенство вместе с (6) дает требуемое соотношение (3).

Заметим, что из (5), вообще говоря, не следует (6).

2°. В предположении, что функции $q(x)$ и $\rho(x) \geqslant 0$, $\rho(x) \not\equiv 0$ являются суммируемыми функциями в любом конечном интервале на положительной полуоси, рассмотрим краевую задачу

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda \rho(x)\, y, \tag{7}$$

$$W(y, \varphi)|_{x=0} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} W(y, \psi) = 0. \tag{8}$$

Здесь $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — произвольные вещественные решения однородного уравнения $-y'' + q(x)\, y = 0$, а $W(y, z)$ — вронскиан функций y и z. Любое самосопряженное расширение, порожденное дифференциальным выражением $-y'' + q(x)\, y$ и разделенными граничными условиями, имеет вышеуказанный вид.

Предположим, что имеет место случай круга Вейля, т. е. любые решения уравнения (7) принадлежат $L_\rho^2(0, \infty)$.

Если $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (7), (8), то, как доказано М. Г. Крейном (см. [4]), существует след обратного оператора в смысле главного значения. С помощью теоремы 1 можно вычислить этот след.

Теорема 2. *Если* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *собственные значения задачи* (7), (8), *занумерованные в порядке возрастания модулей, то*

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{|\lambda_n|<r} \frac{1}{\lambda_n} = \int_0^\infty \varphi(x)\, \psi(x)\, \rho(x)\, dx.$$

Доказательство. Краевая задача (7), (8) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$y(x) = \lambda \int_0^\infty G(x, t)\, \rho(t)\, y(t)\, dt,$$

где

$$G(x, t) = \begin{cases} \varphi(x)\, \psi(t), & x \leqslant t \\ \varphi(t)\, \psi(x), & x \geqslant t. \end{cases}$$

После обозначений

$$\varphi(x) \sqrt{\rho(x)} = u(x), \quad \psi(x) \sqrt{\rho(x)} = v(x), \quad y(x) \sqrt{\rho(x)} = z(x)$$

это интегральное уравнение перейдет в уравнение

$$z(x) = \lambda \int_0^\infty G_1(x, t)\, z(t)\, dt,$$

где

$$G_1(x, t) = \begin{cases} u(x)\, v(t), & x \leqslant t \\ u(t)\, v(x), & x \geqslant t. \end{cases}$$

Следовательно, согласно теореме 1

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{|\lambda_n|<r} \frac{1}{\lambda_n}\int_0^\infty u(x)\,v(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi(x)\,\psi(x)\,\rho(x)\,dx.$$

Автор выражает благодарность М. Г. Крейну за ценное обсуждение.

Институт математики
АН Армянской ССР

Посутпила 27.III.1976

Վ. Ա. ՅԱՎՐՅԱՆ. Որոշ ինտեգրալ օպերատորների հետքի մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում (1) և (2) առնչություններով որոշված ինտեգրալ օպերատորի «գլխավոր իմաստով» հետքի համար ապացուցվում է (3) բանաձևը, որտեղ $\{\lambda_n(G)\}_{n=1}^{\infty}$ — *G օպերատորի սեփական արժեքներն են։ Նման բանաձև է ապացուցվում նաև (7), (8) Շտուրմ-Լիուվիլի օպերատորի համար Վեյլի շրջանի դեպքում (տես թեորեմ 2)։*

V. A. JAVRIAN. *On the trace of some integral operators* (summary)

The formula (3) is proved, where $\lambda_n(G)$ are the eigenvalues of the operator G given by (1) and (2). For the Sturm—Liouville operators an analogous formula is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. С. Маркус.* Собственные и сингулярные числа суммы и произведения линейных операторов, УМН, 19, вып. 4 (118), 1964, 93—123.
2. *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь.* Лекции по функциональному анализу, М., ИИЛ, 1954.
3. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., Изд. Наука", 1965.
4. *М. Г. Крейн.* О неопределенном случае краевой задачи Штурма-Лиувилля в интервале (0, ∞). Изв. АН СССР, серия матем., 16, 1952, 292—324.